МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНИ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Г.Г. ШВАЧИЧ, А.В. СОБОЛЕНКО, Е.И. ХРИСТЯН

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Часть 1. Теория вероятностей

Утверждено на заседании Ученого совета академии
в качестве учебного пособия

Днепропетровск НМетАУ 2006

ББК 22.142

Швачич Г.Г., Соболенко А.В., Христян Е.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Часть 1. Теория вероятностей: Учебное пособие. - Днепропетровск: НМетАУ, 2006.- 78 с.

Содержит рабочую программу по теории вероятностей, основной теоретический материал по основным разделам дисциплины. Представлен широкий круг примеров и задач, приведены варианты индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов экономических специальностей заочной формы обучения.

Табл. 1. Библиогр.: 13 наим.

Печатается в авторской редакции.

Ответственный за выпуск Г.Г.Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенты: Ю.Н. Головко, канд. физ-мат. наук, доц. (УДХТУ)
Ю.Е.Чернявский, канд. физ-мат. наук, доц. (ДУБП)

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» (РАЗДЕЛ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ») ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.

1.1. Предмет теории вероятностей. Основные понятия и определения. Классическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности.

1.2. Операции над событиями и отношения между ними. Теоремы умножения и сложения вероятностей случайных событий. Следствия из теорем.

1.3. Повторение опытов. Формулы Бернулли и Пуассона. Предельные теоремы Муавра-Лапласса.

II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

2.1. Определение случайной величины. Формы законов распределения. Числовые характеристики случайных величин.

2.2. Дискретные и непрерывные распределения. Примеры распределений: биномиальное, пуассоновское, равномерное, показательное, нормальное. Распределения, связанные с нормальным.

III. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

3.1. Понятие системы случайных величин. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции. Корреляционная матрица. Нормированная матрица.

IV. ЦЕПИ МАРКОВА.

4.1. Случайные функции. Цепи Маркова. Вероятности перехода. Матрица перехода. Равенство Маркова.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Предмет теории вероятностей

В основе теории вероятностей лежат методы изучения случайного явления, позволяющие находить закономерности в случайных явлениях. Эти закономерности необходимо знать для принятия обоснованного решения в условиях неопределенности. Одним из основных понятий теории вероятностей есть понятие случайного события. Под случайным событием в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта, наблюдения, эксперимента может произойти или не произойти.

Примерами случайных событий являются: появление герба при бросании монеты, появление 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при бросании игральной кости, попадание или промах при выстреле и т.д.

События обычно обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C, D, E, … .

Событие называется достоверным, если оно обязательно является результатом опыта. Невозможным событием называется событие, которое при данных условиях опыта не может произойти.

Теория вероятностей – это наука, которая изучает закономерности в случайных явлениях. Предметом теории вероятностей является изучение вероятностых закономерностей массовых однородных случайных событий. Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяют предвидеть, как эти события будут развиваться.

Методы теории вероятностей широко применяются в экономике, финансах, учете, аудите.

1.2. Виды случайных событий

События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого. Совместные события – это такие события, при которых появление одного не исключает появление другого.

Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

События называются равновозможными, если ни одно из них не является более возможным, чем другое.

1.3. Непосредственный подсчет вероятностей

Чтобы количественно сравнить между собой события по степени их возможности, нужно с каждым событием связать число, которое тем больше, чем больше возможное событие.

Такое число называется вероятностью события. Таким образом, вероятность события есть количественная мера степени объективной возможности появления этого события.

Вероятность достоверного события, т.е. такого события, которое при данных условиях обязательно произойдет, принимается равной единице.

Если положить вероятность невозможного события равной нулю, то, таким образом, вероятность любого случайного события будет изменяться в интервале от 0 до 1.

Существуют следующие способы подсчета вероятностей событий: классический способ, геометрический и статический.

Классическая формула определения вероятности случайного события:

$$P(A) = \frac{m_A}{n},$$

где n – число всех элементарных исходов опыта, m_A – число исходов, благоприятных событию A.

Эта формула применяема только в том случае, когда исходы опыта несовместны, равновозможны и образуют полную группу событий.

Геометрическое определение вероятности является частным случаем классического способа и применяется при бесконечно большом числе равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{R_d}{R_D},$$

где R_D – размерность области всех возможных исходов,
R_d – размерность области исходов, благоприятных событию A.

Для неравновозможных исходов применяется статистическое определение вероятностей:

$$P(A) \approx P^*(A) = \frac{m^*{}_A}{n^*},$$

где n^* - число всех проведенных опытов, m^* - число опытов, в которых событие A появилось.

При подсчете вероятностей случайных событий по классической формуле применяется теория соединений и правило произведения.

Группы элементов, отличающиеся порядком или составом элементов, называются соединениями. Соединения бывают трех видов: размещения, перестановки и сочетания.

Размещениями из S элементов по K называются соединения, отличающиеся или порядком элементов, или хотя бы одним элементом. Размещения обозначаются A_S^K (от французского “*arrangement*” - размещения) и вычисляются по формуле:

$$A_S^K = S \cdot (S-1) \cdot (S-2) \cdot \ldots \cdot (S-K+1) = \frac{S!}{(S-K)!}.$$

Пример: $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Задача 1.1. Сколькими способами можно набрать шестизначный номер телефона, если помнить, то все цифры различны?

$$n = A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200 .$$

Перестановками из K элементов называются соединения, каждое из которых содержит K элементов и которые отличаются одно от другого только порядком расположения элементов (это A_S^K). Обозначаются перестановки P_K (от французского слова “*permutation*” - перестановка) и вычисляется по формуле:

$$P_k = 1 \cdot 2 \cdots k = k!$$

Задача 1.2. Сколькими способами можно разместить 3-х студентов за одной партой?

$$n = P_3^1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Сочетаниями из *S* элементов по *K* называются такие соединения, которые отличаются между собой хотя бы одним элементом. Обозначаются сочетания C_S^K (от французского слова “*combination*”- комбинация) и вычисляются по формуле:

$$S_S^K = \frac{A_S^K}{P_K} = \frac{S \cdot (S-1) \cdot \ldots \cdot (S-K+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot K} = \frac{S!}{K!(S-K)!}.$$

Задача 1.3. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов на конференцию из группы, в которой 25 студентов?

$$n = C_{25}^3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300.$$

Легко показать, что $C_S^K = C_S^{S-K}$, т.е. $C_{100}^{100-99} = C_{100}^1 = 100$.

Правило произведения заключается в следующем:
если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого выбора этого элемента следующий за ним элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, …, после выбора элементов a_1 …, $a_{к-1}$ элемент $а_к$ выбирается $n_к$ способами, то последовательность *k* элементов (a_1, a_2, …, $a_к$) можно выбрать:

$$n = n_1, n_2, \ldots, n_k \qquad \text{способами.}$$

Задача 1.4. Сколькими способами можно составить команду игроков, состоящую из 1 вратаря, 2 защитников и 3 нападающих, если имеются 2 вратаря, 7 защитников и 9 нападающих?

$$n_1 = C_2^1 = 2; \quad n_2 = C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21; \quad n_3 = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84;$$

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3;$$

$$n = C_2^1 \cdot C_7^2 \cdot C_9^3 = 2 \cdot 21 \cdot 84 = 3528.$$

При решении многих задач применяется также непосредственный подсчет способов отбора.

Задача 1.5. Сколькими способами можно составить набор из 2-х игральных костей, чтобы сумма очков на верхних гранях была равна 7?

I-я: 1 2 3 4 5 6

$\Longrightarrow$ $n = 6$

II-я: 6 5 4 3 2 1

Задача 1.6. Имеется 7 слитков: 4 слитка изготовленны в 1-м цехе и 3 изготовлены во 2-м. Наугад берут 3 слитка. Какова вероятность того, что среди отобраных есть 2 слитка, изготовленные в 1-м цехе?

E – выбор 3-х слитков из 7,

A – появление двух слитков из 1-го цеха и 1 слитка из 2-го цеха.

Число исходов конечно. Они несовместимы, равновозможны и образуют полную группу. Применяем классическое определениие:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{\dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{3}{1}}{\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{18}{35}.$$

Задача 1.7. Заявка предприятия на оборудование может поступить в любое время суток. Найти вероятность того, что заявка поступит в первой половине дня (от 6 часов до 1 часов).

E – поступление заявки в любое время суток

A - поступление заявки от 6 до 12 часов.

Всех равновозможных исходов опыта (моментов поступления заявки) бесчисленное множество, поэтому применяем геометрическое определение вероятности:

$$P(A) = \frac{R_d}{R_D} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Задача 1.8. Система состоит из 7 элементов. При проверке вышли из строя 2. Найти вероятность отказа элемента.

E – проверка элементов

A – выход элементов из строя.

Так как опыты были проведены (исходы неравновозможны), то применяем статистическое определение вероятности события А:

$$P(A) = P^*(A) = \frac{m_A^*}{n^*} = \frac{2}{7}.$$

1.4.Теоремы умножения и сложения вероятностей случайных событий. Следствия из теорем

Часто требуется определять вероятность сложных событий, непосредственное вычисление вероятностей которых затруднительно, а иногда практически невозможно.

В этих случаях применяются не прямые, а косвенные методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий определить вероятности других событий.

Применение косвенных методов основано на использовании основных теорем теории вероятности: теоремы сложения и умножения вероятностей.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей двух событий:
вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Для совместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Если события A_1, A_2, …, A_n несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным событию А*, если оно состоит в непоявлении события *А*.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Условной вероятностью события *А* при наличии *В* называется вероятность события *А*, вычисленная при условии, что событие *В* произошло. Эта вероятность обозначается: $P(A/B)$.

События *А* и *В* называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий:

$$P(A/B) = P(A); \quad P(B/A) = P(B).$$

Теорема умножения вероятностей двух событий:
вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже имело место, т.е.:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A),$$

или

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Для независимых событий *А* и *В*:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Задача 1.9.. К одной из станций внутризаводского транспорта возможен подъезд с 2-х направлений. Вероятность прибытия состава в любой момент суток с первого направления равна 0.3, а со второго – 0.4. Найти вероятность того, что в данный момент суток диспетчер будет принимать два состава одновременно.

А - прибытие состава с I-го направления,

В – прибытие состава со II-го направления,

С – прибытие состава с I-го и со II-го направлений.

$$C = A \cdot B \text{ (независимые события)}$$

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12.$$

Задача 1.10.. В мастерской имеется 10 новых инструментов. Каждое утро рабочий случайным образом выбирает инструмент, а вечером его возвращает. Найти вероятность того, что два первых дня он пользовался новым инструментом.

A – I-й день пользовался новым инструментом,

B- II-й день пользовался новым инструментом,

C = два первых дня пользовался новым инструментом.

$$C = A \cdot B \text{ (зависимые события).}$$

$$P(C) = P(A) \cdot P(B/A).$$

$P(A) = 1$, т.к. все инструменты еще новые,

$P(B/A) = 9/10$ (новых осталось делать).

$$P(C) = 1 \cdot 9/10 = 0.9.$$

Задача 1.11. Бункерное устройство имеет два захвата. Вероятность того, что первый захват примет заготовку и передаст ее к отводному каналу равна 0.6, того, что второй – 0.2. Найти вероятность того, что заготовка будет передана в отводной канал.

A – заготовку передает I-й захват,

B – заготовку передает II-й захват,

C – заготовку передает или I-й, или II-й захват.

$$C = A + B \text{(несовместные события),}$$

$$P(C) = P(A) + P(B) = 0.6 + 0.2 = 0.8.$$

Задача 1.12. Устройство содержит 2 независимо работающих элемента. Вероятность отказа I-го равна 0,05, II-го 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно отказа хотя бы одного из них.

A – отказ I-го элемента,

B - отказ II-го элемента,

C - отказ хотя бы одного из них (или I, или II, или обоих).

I-й способ:

$$C = A + B \text{ (несовместные события),}$$

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B),$$

т.к. события A и B независимы.

$$P(C) = 0{,}05 + 0{,}08 - 0{,}05 \cdot 0{,}08 = 0{,}126,$$

II-й способ:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0{,}95 \cdot 0{,}92 = 0{,}126.$$

Задача 1.13. Рабочий обслуживает два станка. Вероятность того, что в течении часа I-й станок не потребует внимания рабочего равна 0,7, для II-го эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что в течении часа только один станок потребует внимания рабочего.

A – I-й станок потребует внимания рабочего,

B – II-й станок потребует внимания рабочего,

C – только один из них потребует внимания.

$$C = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B,$$

отсюда

$$P(C) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = p_1 q_2 + q_1 p_2 =$$
$$= (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}27 + 0{,}07 = 0{,}34.$$

Следствием теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения является так называемая формула полной вероятности. Метод вычисления вероятности по формуле полной вероятности предусматривает следующую постановку задачи.

Пусть событие A может произойти только вместе с одним из образующих полную группу несовместных событий H_1 , H_2 , …, H_n. Эти события будем называть гипотезами. Тогда

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H),$$

т.е. вероятность события A вычисляется как сумма произведений вероятностей каждой гипотезы на вероятность события A при этой гипотезе. Это выражение носит название формулы полной вероятности(ФПВ).Заметим, что $\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1$.

Задача 1.14. Химические анализы на содержание примеси в целевом продукте делают два лаборанта. Вероятность ошибки для I-го лаборанта равна 0.01, а для II-го – 0.02. Первый лаборант выполнил 25 анализов, второй – 15. Найти вероятность того, что будет допущена ошибка.

Рассмотрим следующие события:

A – допущена ошибка в анализах.

H_1 – анализ выполнял I-й лаборант.

H_2 – анализ выполнял II-й лаборант.

$$P(H_1)=\frac{25}{40}=\frac{5}{8};\quad P(H_2)=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}.$$

Проверка: $P(H_1)+P(H_2)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1$.

A/H_1 – допущена ошибка I-м лаборантом

$$P(A/H_1)=0.01,$$

A/H_2 – допущена ошибка II-м лаборантом

$$P(A/H_2)=0.02.$$

По формуле вероятности получим:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=$$
$$=\frac{5}{8}\cdot 0{,}01+\frac{3}{8}\cdot 0{,}02\approx 0{,}014.$$

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является так называемая теорема гипотез(или формулы Бейеса).

Теорема гипотез предусматривает следующую постановку задачи. Имеется полная группа несовместных гипотез H_1 , H_2 , ..., H_n. Вероятности этих гипотез до опыта известны и соответственно равны $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$. Произведен опыт, в результате которого появилось некоторое событие A. Требуется определить, как изменятся вероятности гипотез в связи с появлением этого события.

В этой задаче речь идет о том, чтобы найти условную вероятность $P(H_i/A)$ для каждой гипотезы:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A)\cdot P(A/H_i)},\ (i=1, 2, 3, \dots n).$$

Задача 1.15. В ящике находится три детали. Наугад вынимается одна деталь. Она оказалась годной. Найти вероятность того, что все детали окажутся годными.

A – появление годной детали,

H_1 – в ящике все детали годные,

H_2 – в ящике все детали бракованные,

H_3 – 1 годная и 2 бракованные,

H_4 – 2 годные и одна бракованная.

До опыта все гипотезы равновероятны, поэтому:

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=P(H_4)=1/4$$

Требуется переоценить гипотезу H_1 после появления годной детали. Для этого применяется формула Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}$$

A/H₁ – появление годной детали при условии, что все детали в ящике годные:

$$P(A/H_1) = 1.$$

A/H_2 – появление годной детали, при условии, что в ящике все детали бракованные:

$$.P(A/H_2) = 0$$

A/H_3 – появление годной детали при условии, что в ящике 1 годная и 2 бракованные детали:

$$P(A/H_3) = 1/3.$$

A/H_4 – появление годной детали при условии, что в ящике 2 годные и 1 бракованная деталь:

$$P(A/H_4) = 2/3,$$

$$P(H_1/A) = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

1.5.Повторение опытов

На практике часто приходиться встречаться с задачами, в которых один и тот же опыт или аналогичные опыты повторяются неоднократно. В результате каждого опыта может появиться или не появится некоторое событие *A*. Тогда експериментатора интересует не результат каждого отдельного опыта, о общее число появлений события *A* в результате серии испытаний. В таких задачах требуется определить вероятность любого заданого числа появлений события *A* в результате серии испытаний. Такие задачи решаются весьма просто в случае, когда опыты являются независимыми.

Несколько опытов называются независимыми, если вероятность того или иного исхода каждого из опытов не зависит от того, какие исходы имели другие опыты. Например, несколько последовательных бросаний монеты или игральной кости представляют независимые опыты. Несколько последовательных выниманий карты из колоды представляют независимые опыты, если карта каждый раз возвращается в колоду и колода тщательно перемешивается, в противном случае опыты зависимые.

Если производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причем в каждом из них с вероятностью p появляется событие *A*, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие *A* произойдет в этих n опытах ровно m раз, выражается формулой Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{m-n}; \quad (m=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

где $q=1-p$.

Вероятность хотя бы одного появления события *A* в n независимых опытах равна:

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n.$$

Вероятность того, что при n опытах событие *A* появится не менее m раз, выражается формулой:

$$P_n(k \geq m) = \sum_{k=m}^{n} P_{k,n}\text{, или } P_n(k \geq m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_{k,n}.$$

Задача 1.16. Вероятность размещения заказа на производство продукции на данном заводе равна 0.6. Какова вероятность получить 3 заказа из 5?

A – получение заказа;

$$P(A) = p = 0.6, \qquad P(\overline{A}) = q = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^{5-3} = 10 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456.$$

Если $n \to \infty$, а $p \to 0$, то применяется формула Пуассона:

$$P_m = \lim_{n\to\infty}(C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}) = \frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a},$$

где $a = n\cdot p$

Задача 1.17. По каналу связи передается ложный сигнал в одном из ста случаев. Какова вероятность появления 5 ошибок при передаче 200 независимых сигналов?

А – появление ложного сигнала;

$$P(A) = p = 0{,}01; \quad a = n\cdot p = 200\cdot 0{,}01 = 2;$$

$$P_5 = \frac{2^5}{5!}\cdot e^{-2} = \frac{32}{120}\cdot 0{,}137 \approx 0{,}27.$$

При большом числе опытов можно применять приближенные формулы Лапласа:

- ***локальную*** $\quad P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot \varphi(x),$

где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot \pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$

- ***интегральную*** $\quad P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$

где

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ табулированы, причем $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \quad \Phi(x \ge 5) = 0{,}5.$$

Задача 1.18. Вероятность отклонения температуры в реакторе от номинальной равна 0.2 при каждом замере. Произведено 400 замеров. Найти вероятность того, что:

а) в 50 замерах будет отклонение от номинальной температуры;

б) отклонение температуры будет не менее, чем в 50 замерах и не более чем в 80 замерах.

А – появление отклонения температуры;

$$P(A) = p = 0{,}2; \qquad P(\overline{A}) = q = 1 - p = 0{,}8;$$

а) $$P_{400}(50) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot j\,(x),$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -3{,}75;$$

$$j\,(-3.75) = j\,(3.75) = 0{,}0004;$$

$$P_{400}(50) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot 0{,}0004 = 0{,}00005\,.$$

б) $$P_{400}(50 \le m \le 80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -3{,}75; \ \Phi(-3{,}75) = -0{,}4998;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0; \quad \Phi(0) = 0;$$

$$P_{400}(50 \le m \le 80) \approx 0 - (-0{,}4998) = 0{,}4998.$$

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин

Случайные события являются качественной характеристикой исходов опыта. Количественной характеристикой исходов опыта являются случайные величины. Под ***случайной величиной*** понимают множество (совокупность) возможных ее значений, каждое из которых может стать исходом предстоящего опыта, результат которого нельзя предсказать.

Случайные величины разделяют на два класса: дискретные и непрерывные. *Дискретной случайной величиной* называют величину, которая принимает отдельные, изолированные значения. Значения такой величины можно перечислить, т.е. между соседними значениями есть пустоты. *Непрерывной случайной величиной* называют величину, которая сплошным образом заполняет некоторый промежуток. Число принимаемых значений такой величины бесконечно.

Случайные величины обозначаются последними большими буквами латинского алфавита: $X, Y, Z, ..., W$ или $X_1, X_2, ..., X_n$; $Y_1, Y_2, ..., Y_n$; …, а возможны значения соответствующими малыми буквами: $x_1, x_2, ..., x_n$; $y_1, y_2, ..., y_n$ и т.д.

Например, опыт – одно бросание монеты. Случайные события: *A* – появление герба, *B* – появление надписи. Случайная величина – *X* – число появление герба, ее значения $X_1 = 1$ (появление герба), $X_2 = 0$ (непоявление герба).

Если проводится несколько опытов, то в результате каждого опыта случайная величина *X* примет одно из своих возможных значений $X_1, X_2, ..., X_n$, т.е. произойдет одно из полной группы несовместных событий:

$$X = x_1, X = x_2, ..., X = x_n.$$

Обозначим соответствующие формулы вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$.

Так как эти события образуют полную группу несовместных событий, то:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

т.е. сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице.

Эта суммарная вероятность каким-то образом распределена между отдельными значениями случайной величины. Полностью описывается случайную величину, если указано с какой вероятностью она принимает каждое конкретное значение.

Тем самым задают закон распределения случайной величины.

Итак, ***законом распределения случайной величины*** называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Основными формами закона распределения являются:

Для дискретных величин – ряд распределения и функция распределения;

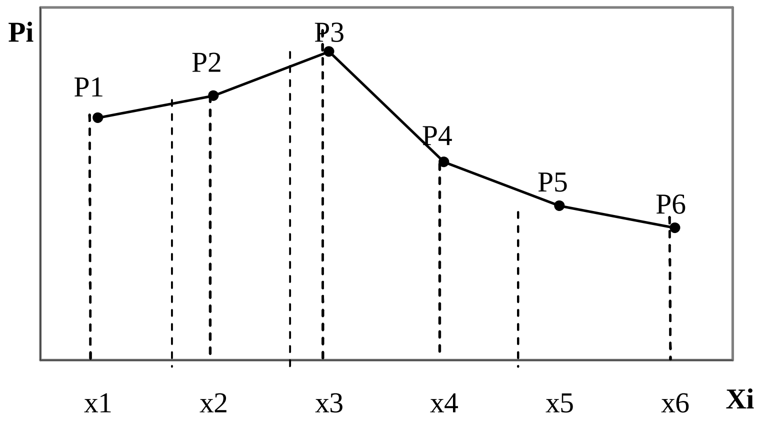
Для непрерывных случайных величин - функция распределения и плотность распределения.

Таблица, в которой перечислены все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

X_i	X_1	X_2	…..	X_{n-1}	X_n
p_i	P_1	P_2	….	P_{n-1}	p_n

называется *рядом распределения дискретной случайной величины X*.

Графическое изображение ряда распределения называется *многоугольников распределения*.



Вероятность того, что $X < x$, где x – некоторая текущая переменная, называется *функцией распределения случайной величины X* и обозначается $F(x)$, т.е. $F(x) = P(X < x)$. Ее называют также *интегральным* *законом распределения*. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в некоторых пределах, например, от x_1 до x_2, вычисляется по формуле:

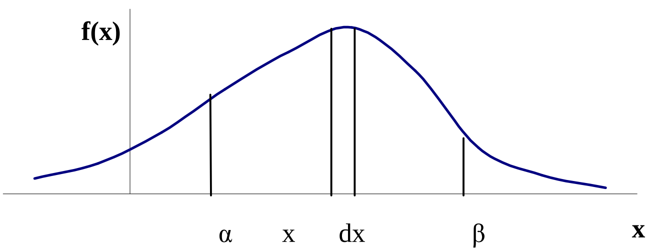
$$P(x_1 \le x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Введем обозначение

$$f(x) = F^{'}(x)$$

Функция $f(x)$ - производная функции распределения – характеризует плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке и называется *плотностью распределения случайной величины* и ее дифференциальным законом распределения.

Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется *кривой распределения*.



Величина $f(x)dx$ называется *элементом вероятности*. Геометрически – это площадь элементарного прямоугольника, опирающегося на элемент dx

Выразим теперь вероятность попадания величины x на некоторый интервал от α до β через плотность распределения:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Геометрически эта вероятность равна площади под кривой, опирающейся на интервал (α, β).

Однако для решения многих задач практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью, исчерпывающим образом.

Такие характеристики, назначение которых выразить в сжатой форме существенные особенности распределения, называются числовыми характеристиками случайной величины.

Из характеристик важнейшую роль играет ***математическое ожидание случайной величины***, которое иногда называют просто средним значением. Математическое ожидание (m_x или $M(X)$) вычисляется по формулам:

$$m_x = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, & \text{для дискретных СВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, & \text{для непрерывных СВ} \end{cases}$$

Как следует из приведенных формул, под математическим ожиданием понимают среднее взвешенное значение случайной величины. Здесь весом является вероятность появления этого события. Таким образом, математическое ожидание – это центр, относительно которого разбросаны остальные значения случайной величины.

Наиболее общими числовыми характеристиками являются моменты. Начальным моментом *S*-го порядка дискретной случайной величины *X* называется сумма вида:

$$a_s[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i .$$

Для непрерывной случайной величины *X* начальным моментом *S*-го порядка называется интеграл:

$$a_s[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx .$$

Очевидно, что введенная характеристика положения – *математическое ожидание* представляет собой *первый начальный момент* случайной величины *X*.

Центральным моментом *S*-го порядка называется математическое ожидание *S*-й степени отклонения значения случайной величины от своего математического ожидания:

$$m_s[X] = M[(X - m_x)^s] .$$

Для дискретной случайной величины *S*-й центральный момент выражается сумой:

$$m_s[X]=\sum_{i=1}^{n}(X-m_x)^s p_i .$$

Для непрерывной случайной величины *S*-й центральный момент выражается интегралом:

$$m_s[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^s f(x)dx ,$$

$f(x)$ – плотность распределения случайной величины *X*. Центральный момент первого порядка равен нулю:

$$m_1=0 .$$

Важнейшую роль в практических приложениях играет второй центральный момент:

$$m_2=m[x^2]=\sum_{i=1}^{n}(X-m_x)^2 p_i$$

для дискретной случайной величины и:

$$m_2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx$$

для непрерывной случайной величины.

Легко показать, что:

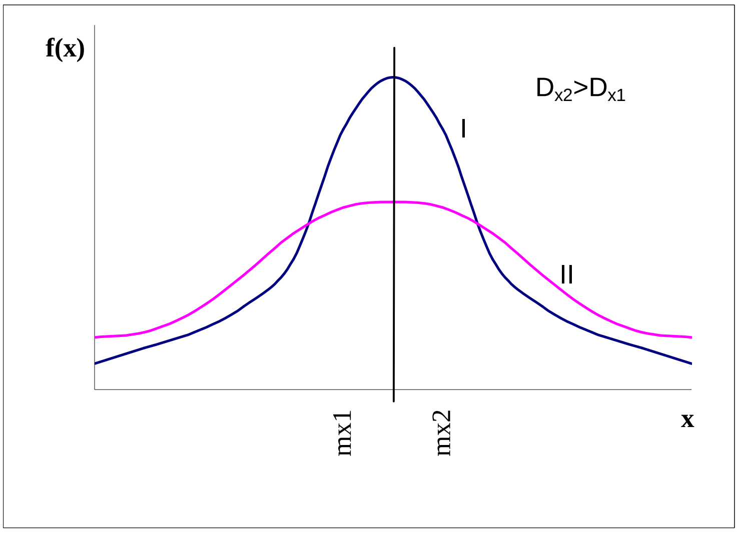
$$m_2[X]=a_2[X]-m_x^2=M(X^2)=m_x^2$$

Второй центральный момент называется *дисперсией* случайной величины. Для этого чаще всего применяют случайные обозначения: $D[X];Dx$.

Итак,

$$D_x=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i, если\ X-ДСВ\\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx, если\ X-НСВ\end{cases}$$

Дисперсия случайной величины есть характеристика рассеивания значений случайной величины около ее математического ожидания. Само слово «дисперсия» означает «рассеивание». Чем больше дисперсия случайной величины, тем больше разброс ее значений относительно математического ожидания.



Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Часто бывает удобно для характеристики рассеивания пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень.

Полученная величина называется средним квадратическим (или стандартным) отклонением случайной величины

$$s_x = \sqrt{D_x}$$

Задача 2.1. В группе из 3-х изделий имеется бракованное. Наугад отбирают 2 изделия. Построить ряд распределения вероятностей числа годных изделий среди отобранных; функцию распределения; найти числовые характеристики.

Решение. X – число годных изделий среди отобранных; возможные значения $X = \{1;2\}$ X = {1;2}. Соответствующие вероятности:

$$p_1 = P(X=1) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_3^2} = \frac{2}{3};\ p_1 = P(X=2) = \frac{C_2^2 C_0^1}{C_3^2} = \frac{1}{3}.$$

Проверка: $p_1 + p_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

Запишем ряд распределения:

X_i	1	2
p_i	2/3	1/3

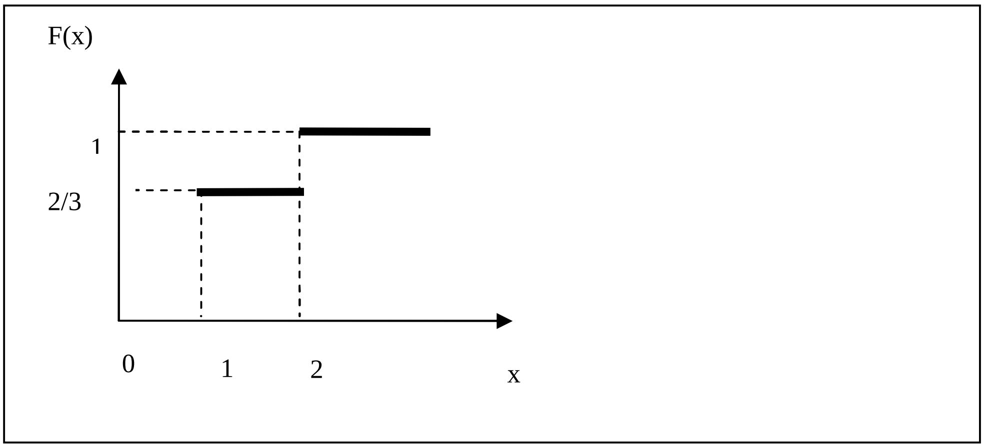
Построим функцию распределения, задавая значение *X*:

$$x \le 1,\ F(x) = \sum_{x_i<x} p_i = 0$$

$$1 < x \le 2,\ F(x) = \sum_{x_i<x} p_i = p_1 = \frac{2}{3}$$

$$2 < x < \infty,\ F(x) = \sum_{x_i<x} p_i = p_1 + p_2 = 1$$

Построим график $F(x): x_i < x$:



Определим числовые характеристики случайной величины:

$$m_x = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 1 \cdot 2/3 + 2 \cdot 1/3 = 4/3; \quad M_0 = 1;$$

$$D_x = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 p_i - m_x^2 = 1^2 \cdot 2/3 + 2^2 \cdot 1/3 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2/9;$$

$$s_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{2}{9} = 0{,}47}.$$

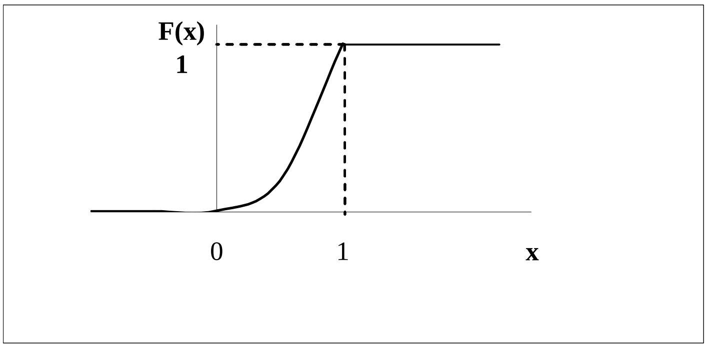
Задача 2.2. Функция имеет вид

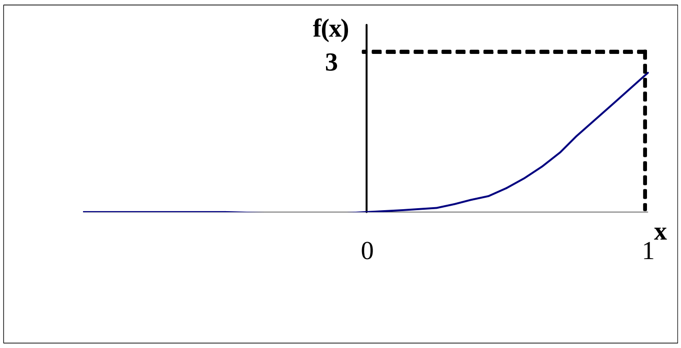
$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0, \\ x^3; & 0 < x \le 1, \\ 1; & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, построить графики $F(x)$ и $f(x)$; найти числовые характеристики: определить $P(0{,}5 < x < 2)$.

Решение:

$$f(x) = F^{'}(x) = \begin{cases} 3x^2 & если\, x \in [0;1], \\ 0 & если\, x \notin [0;1]. \end{cases}$$





$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x \cdot 3x^2 \cdot dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= \int_{0}^{1} 3x^3 dx = 3 \cdot \frac{x^4}{4} |_0^1 = \frac{3}{4};$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - m_x^2 = [\int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 3x^2 \cdot dx +$$

$$+ \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx] - \left(\frac{3}{4}\right)^2 == 3\int_{0}^{1} x^4 dx - \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80};$$

$$s_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{3}{80}}.$$

$$P(0.5 \le x < 2) = F(2) - F(0.5) = 1 = 0.5^3 = 0.875,$$

или

$$P(0.5 \le x < 2) = \int_{0.5}^{2} f(x)dx = 3\int_{0.5}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{2} 0 \cdot dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_{0.5}^{1} = x^3\big|_{0.5}^{1} == 1 - 0{,}5^3 = 0{,}875.$$

2.2. Примеры конкретных распределений

В зависимости от вида распределения (для дискретных случайных величин) или плотности распределения (для непрерывных случайных величин) получаем то или иное конкретное распределение.

Биномиальным распределением называется распределение конкретной случайной величины X, представляющей собой число появлений некоторого события A при проведении n независимых опытов, когда в каждом опыте вероятность появления события одинакова и равна $P(A) = p$.

Закон распределения случайной величины X в виде ряда распределения определяется по известной нам формуле Бернулли:

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m q^{(n-m)} \; (m = 0,1,2,\ldots,n).$$

Характер биномиального распределения зависит от значений p и n, т.е. p и n являются параметрами биномиального распределения.

Числовые характеристики случайной величины, распределенной по биномиальному закону, определяется так:

$$m_x = n \cdot p,$$

$$D_x = n \cdot p \cdot q.$$

Если число испытаний велико, а вероятность появления события p в каждом испытании очень мала, то пользуются приближенной формулой:

$$P(X = m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!},$$

где m – число появлений события в n независимых испытаниях;
$a = n \cdot p$ - среднее число появлений события в n испытаниях.

Это распределение называется ***распределением Пуассона***. Оно зависит от одного параметра a. Числовые характеристики этого распределения определяются следующим образом:

$$m_x = a,$$

$$D_x = a,$$

т.е. $$m_x = D_x = a.$$

Закон Пуассона описывает также распределение числа появлений какого-либо события в течение заданного промежутка времени, если известно среднее число появлений события в единицу времени и события появляются независимо друг от друга. Рассмотрим этот случай подробнее.

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает следующими тремя свойствами: стационарностью, «отсутствием последействия» и ординарностью.

Свойство стационарности состоит в том, что вероятность появления m событий за промежуток времени длительностью t есть функция, зависящая только от m и t.

Свойство «отсутствия последействия» состоит в том, что вероятность появления m событий в любом промежутке времени не зависит от того, появились или не появились события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка. Другими словами, предыстория потока не влияет на вероятности появления событий в ближайшем будущем.

Свойство ординарности состоит в том, что появление двух или более событий за малый промежуток времени практически невозможно. Другими словами, вероятность появления более одного события за малый промежуток времени пренебрежимо мало по сравнению с вероятностью появления только одного события.

Распределение такого потока может быть описано законом Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} = \frac{(l l)^m}{m!} e^{-l l}$$

Здесь P_m – вероятность появления ровно m событий в течении промежутка времени длиной l. Величина a есть среднее число событий, происходящих за тот или иной промежуток времени.

Величина $l = \frac{a}{l}$ представляет собой среднее число событий, появляющихся в единицу времени, или среднюю скорость появления событий.

Величина λ называется параметром потока событий или интенсивностью потока событий.

Потоки событий, удовлетворяющие условиям 1, 2, 3, имеют место в теории массового обслуживания.

Теория массового обслуживания изучает так называемые системы массового обслуживания. Примерами таких систем могут быть телефонные станции, ремонтные мастерские, справочные бюро, магазины, промышленные предприятия, отдельные участки, цеха, станки и т.д.

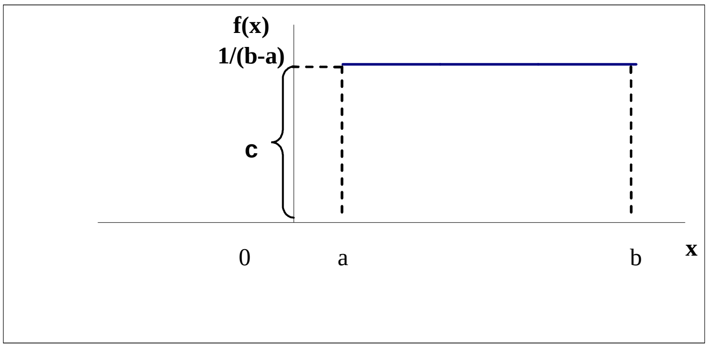
Работа любой системы массового обслуживания состоит в выполнении поступающего на нее потока требований (заявок). Заявки поступают одна за другой в некоторые случайные моменты времени. Если поток заявок распределен по закону Пуассона, то, определив среднее число заявок в единицу времени, можно найти вероятность поступления m заявок в единицу времени Δt. Тем самым можно определить, например, оптимальное количество обслуживающих единиц.

Закон Пуассона иногда называют «законом редких явлений».

Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если на интервале (a, b), которому принадлежат все возможные значения X, дифференциальная функция сохраняет постоянное значение, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}$$

Кривая распределения имеет вид



Числовые характеристики*:*

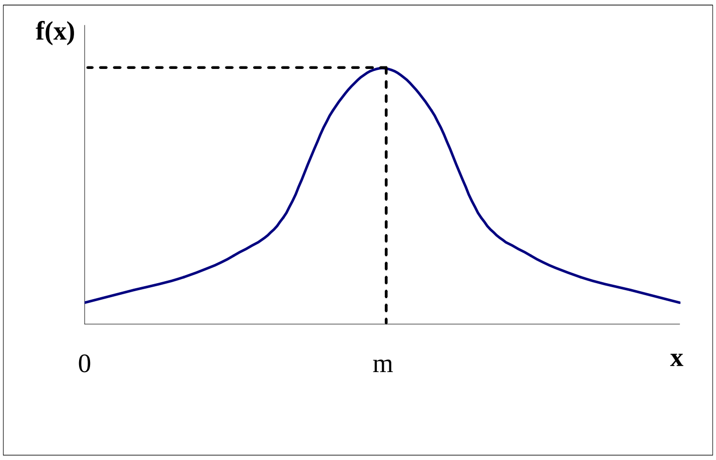
$$m_x = \frac{a+b}{2};\ D_x = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Нормальный закон характеризуется плотностью распределения вида

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}.$$

Кривая нормального распределения имеет симметричный холмообразный вид. Максимальная ордината кривой имеет место в точке $x = m$ и равна $\frac{1}{s\sqrt{2p}}$.

По мере удавления от точки $x = m$ плотность распределения падает и при $x \to \pm\infty$ кривая асимптотически приближается к кривой абсцисс.



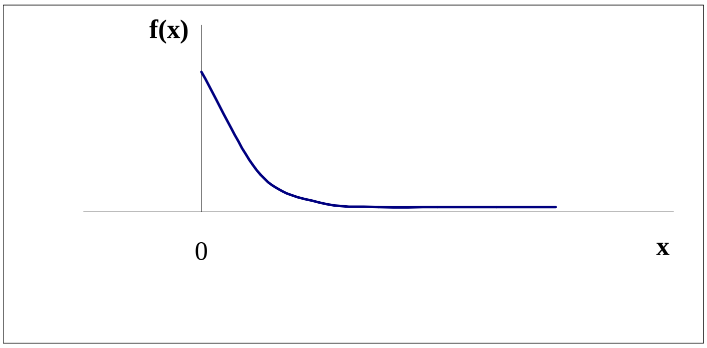
Параметры m и σ, входящие в выражение плотности нормального распределения, имеют определенный смысл: m есть не что иное, как математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X, а σ – ее среднее квадратическое отклонение.

Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которое описывается дифференциальной функцией:

$$f(x)=\begin{cases} o, & при\, x<0 \\ l\,l^{-lx}, & при\, x\geq 0 \end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

График кривой распределения имеет вид:



Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение показательного распределения соответственно равны:

$$M[x]=\frac{1}{l};\quad D[x]=\frac{1}{l^2};\quad s\,[x]=\frac{1}{l}.$$

Вероятность попадания значений непрерывной случайной величины в заданный интервал (α , β) определяется по следующим формулам:

$$P(a<x<b)=\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{b-m}{s}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-m}{s}\right) & \textit{для нормального распределения,} \\ e^{-la}-e^{-lb} & \textit{для показательного распределения,} \\ \dfrac{b-a}{b-a} & \textit{для равномерного распределения.} \end{cases}$$

Здесь

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Ее значения определяются по таблице.

Примечание: если $a<0$ для показательного распределения то надо положить $a=0$; если для равномерного распределения $a<a$, то надо

взять $a = a$; если $b > b$, то брать $b = b$. Если в равномерном распределении $(a, b) \notin (a,b)$, то $P(a < x < b) = 0$.

В математической статистике, которая будет изучаться в последующих разделах курса, широко используется для проверки гипотез и оценки неизвестных параметров распределения целый ряд статистических критериев, построенных на основе распределений z, c^2, t, F (для этих распределений имеются стандартные таблицы во многих учебниках и руководствах).

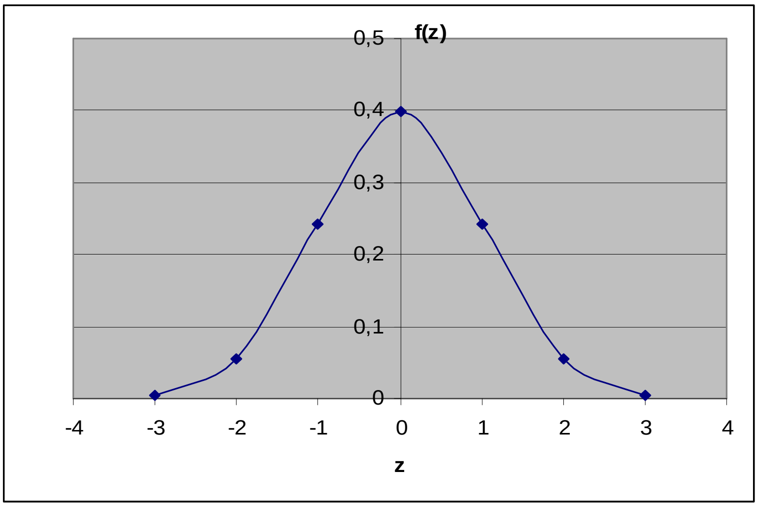
2.3. Нормированное нормальное распределение (*z*).

Если X – нормально распределенная случайная величина с параметрами m и σ, то величина $z = \dfrac{x - m}{s}$ также распределена нормально с параметрами $m_z = 0$ и $s_z = 1$ (кратко обозначают $z(0,1)$).

Плотность нормированного нормального распределения:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Кривая плотности распределения имеет вид:

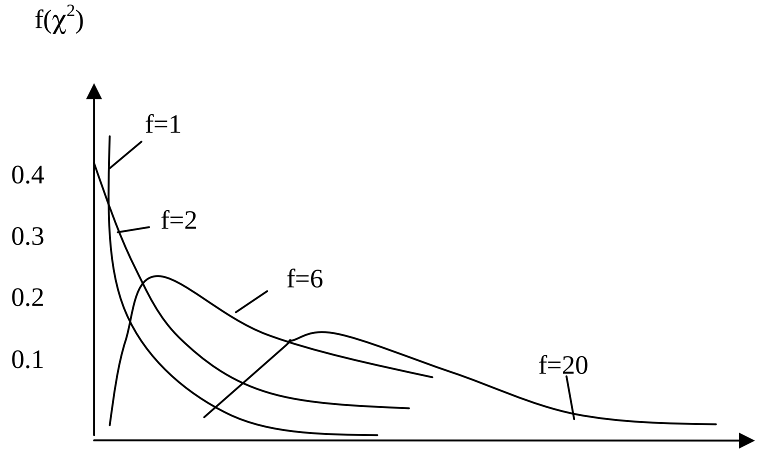


2.4. Распределение К.Пирсона (χ^2)

Если $X_i (i = 1,2,...,n)$ – нормально распределенные независимые случайные величины, причем математическое ожидание каждой из них $M[X_i] = 0$, а среднее квадратическое значение $\sigma[X_i] = 1$, то сумма квадратов этих величин $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ распределена по закону χ^2 («хи»-квадрат) с $f = n - z$ степенями свободы, где z – число связей, наложенных на величины X_i .

Например, если величины X_i связаны одним линейным соотношением $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}$, то число степеней свободы $f = n - 1$.

График плотности распределения закона χ^2 для различных чисел степеней свободы имеет вид:



2.5. Распределение Стьюдента (*t*)

Если z – нормально распределенная случайная величина, причем $M[z] = 0$ и $\sigma[z] = 1$, а χ^2 – независимая от z величина, которая распределена по закону χ^2 с f степенями свободы, то величина

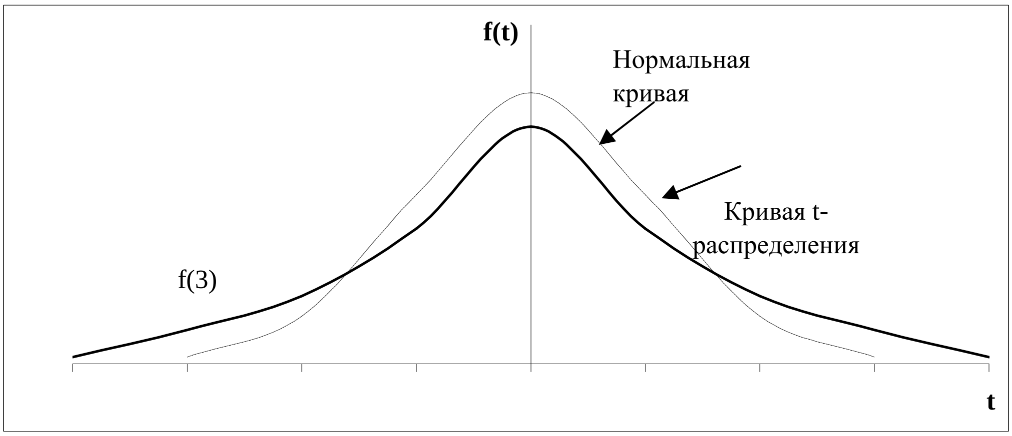
$$t = \frac{z}{\sqrt{c^2 / f}}$$

имеет распределение Стьюдента с f степенями свободы.

Распределение t определяется одним параметром – числом степеней свободы f.

С увеличением числа степеней свободы распределение быстро приближается к нормальному.

График плотности распределения t для $f = 3$ имеет вид:



2.6. Распределение Фишера (*F*)

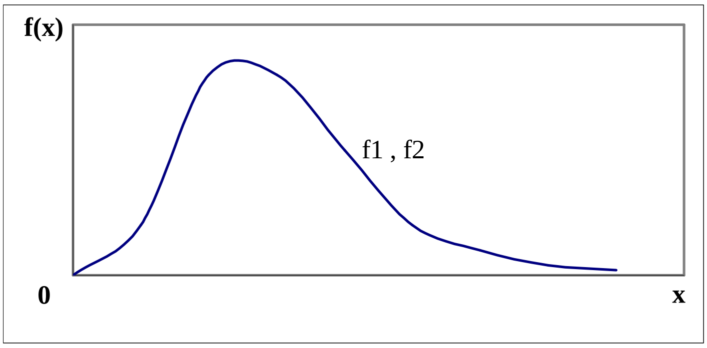
Если c_1 и c_2^2 - независимые случайные величины, распределенные по закону c^2 со степенями свободы f_1 и f_2, то величина

$$F = \frac{c_1^2 / f_1}{c_2^2 / f_2}$$

имеет распределение, называемое распределением Фишера со степенями свободы f_1 и f_2.

Распределение F определяется двумя параметрами – числами степеней свободы f_1 и f_2.

График плотности распределения F для чисел степеней свободы f_1 и f_2 представлен на рисунке:



Задача 2.3. По заданным параметрам распределений записать плотности распределений, построить кривые распределений, найти числовые характеристики, определить вероятность попадания значений случайной величины в интервал (α , β), т.е. $P(a < x < b)$:

а) нормальное распределение: $m = -6, s = 3$, кратко обозначают N(-6 , 3).

Плотность нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-s)^2}{2s^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x+6)^2}{18}}.$$

Кривая нормального распределения симметрична относительно прямой $x = m = -6$, максимальное значение достигается при $x = m = -6$ и равно

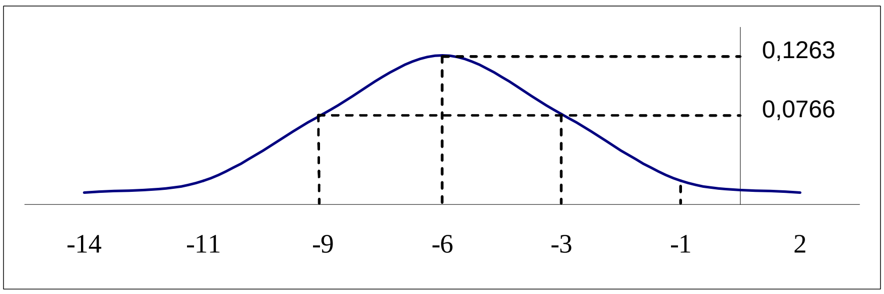
$$f(-6) = \frac{1}{3\sqrt{2p}} = 0.1263,$$

Точки перегиба:

$$x_1 = m - s = -6 - 3 = -9;\ y_1 = f(-9) = \frac{1}{3\sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}} = 0,0766;$$

$$x_2 = m + s = -6 + 3 = -3;\ y_2 = f(-3) == 0,0766$$

Кривая нормального распределения (кривая Гаусса) имеет вид:



Определим теперь вероятность попадания значений случайной величины в заданный интервал (-1 ; 2):

$$P(-1<x<2)=\Phi\left(\frac{2+6}{3}\right)-\Phi\left(\frac{-1+6}{3}\right)=\Phi(2.67)-\Phi(1.67)=$$
$$=0.4962-0.4525=0.0437.$$

Это площадь заштрихованной области под кривой Гаусса от X=-1 до X=2.

Зная параметры, легко найти числовые характеристики:

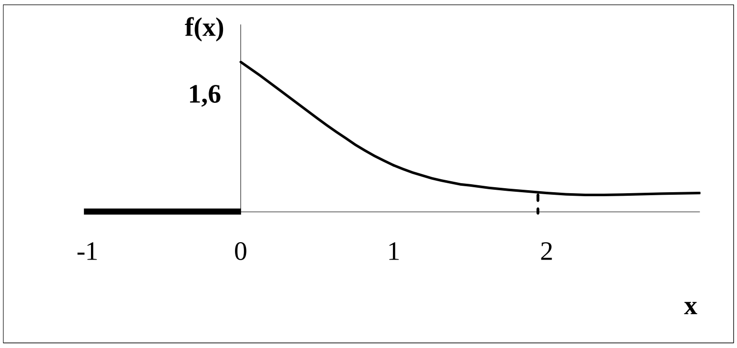
$$m_x=m=-6;\quad s_x=s=3;\quad D_x=s_x^2=9$$

б) показательное распределение: λ=1.6

Плотность показательного распределения для $x\geq 0$

$$f(x)=le^{-lx}=1{,}6e^{-1.6x}.$$

Кривая плотности распределения имеет вид:



Определим P(-1<x<2). Так как для x<0 $f(x)$=0, то надо взять интервал (0;2)

$$P(-1<x<2)=P(0<x<2)=e^{-1.6*0}-e^{-1.6*2}=$$
$$=e^{0}-e^{-3.2}=1-0{,}0476=0{,}9524$$

(площадь заштрихованной области).

Числовые характеристики этого распределения

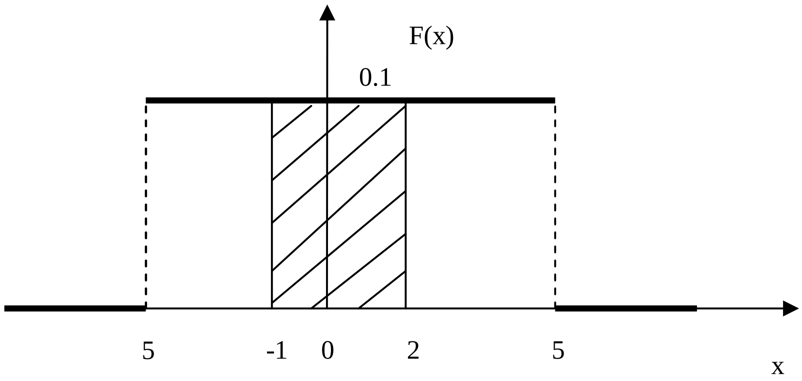
$$m_x=\frac{1}{l}=\frac{1}{1.6}=0.625;\quad D_x=\frac{1}{l^2}=0.3906$$

в) равномерное распределение: a=-5; b=5.

Плотность равномерного распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \textit{для } x\in(a,b)\\ 0 & \textit{для } x\notin(a,b)\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{10} & \textit{для } x\in(-5;5)\\ 0 & \textit{для } x\notin(-5;5)\end{cases}$$

Кривая плотности:



$$P(-1<x<2)=\frac{2-(-1)}{5-(-5)}=0,3.$$

Числовые характеристики:

$$m_x=\frac{a+b}{2}=\frac{-5+5}{2};$$

$$D_x=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(5+5)^2}{12}=\frac{100}{12}=8,33.$$

3. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1. Основные понятия. Числовые характеристики системы случайных величин

Совокупность нескольких случайных величин, совместно характеризующих рассматриваемое случайное явление, называется *системой случайных величин* или *векторной случайной величиной*.

Систему *n* случайных величин K_{xy} обычно обозначат ($X_1, X_2, ..., X_n$).

Свойства системы случайных величин не исчерпываются свойствами отдельных величин, ее составляющих. Они включают также взаимные связи (зависимости) между случайными величинами.

Для геометрической интерпретации системы случайных величин пользуются образом случайной точки или случайного вектора в *n*-мерном пространстве (для системы *n* случайных величин).

При *n*=2 система интерпретируется точкой на плоскости с координатами (X_1, X_2) и т.д.

Числовые характеристики системы случайных величин, как и числовые характеристики обыкновенных случайных величин, представляются их соответствующими моментами.

Начальным моментом ($K+S$)-го порядка системы двух случайных величин (X, Y) называется математическое ожидание произведения *K*-й степени случайной величины *X* на *S*-ю степень *У*:

$$d_{k,s} = M[X^K Y^S]$$

Центральным моментом ($K+S$)-го порядка системы двух случайных величин (X, Y) называется математическое ожидание произведения *K*-й и *S*-й степеней соответствующих центрированных случайных величин

$$m_{k,s} = M[\overset{0}{X}{}^K \overset{0}{Y}{}^S] = M[(x-m_x)^K (y-m_y)^S].$$

Особую роль характеристики системы случайных величин играет второй смешанный центральный момент

$$m_{1,1} = M[\overset{0}{X}\overset{0}{Y}],$$

т.е. математическое ожидание произведения центрированных случайных величин. Введем для него обозначение K_{xy}. Для дискретных случайных величин K_{xy} выражается формулой:

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) P_{ij},$$

а для непрерывных случайных величин – формулой:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dxdy.$$

Корреляционный момент, как и другие моменты второго порядка, характеризует рассеивание случайных величин. Но помимо этого данный момент описывает еще и связь между случайными величинами, входящими в систему.

Равенство нулю корелляционного момента есть необходимое условие независимости случайных величин.

Заметим сразу, что это условие не является достаточным, т.е. из равенства нулю корреляционного момента в общем случае не следует независимость случайных величин.

Из приведенных формул видно, что корреляционный момент характеризует не только зависимость величин, но и их рассеивание. Действительно, если хотя бы одна из величин мало отклоняется от своего математического ожидания (т.е. почти случайна), то корреляционный момент будет мал, как бы тесно не были связаны случайные величины X и $У$.

Поэтому для характеристики связи между X и $У$ в чистом виде переходит от корреляционного момента K_{xy} к безразмерной характеристике:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{s_x s_y},$$

где σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения соответственно X и $У$. Если r_{xy}, а значит и K_{xy}, отличен от нуля, то случайные величины X и $У$ называются корреляционными. Случайные величины могут быть связаны вероятностной связью, при которой каждому значению одной случайной величины соответствует некоторое распределение другой. Например, вес и рост человека – две случайные величины, между которыми существует вероятностная связь (зависимость). Мы не можем сказать, что для каждого значения роста человека существует строго определенный вес. Вес может колебаться в довольно широких пределах. Однако здесь может быть указана тенденция увеличения веса при увеличении роста.

Если при изменении значений одной случайной величины другая испытывает изменение своего математического ожидания (т.е. тем самым проявляя тенденцию к изменению своих значений), то такой вид вероятностной зависимости между случайными величинами называется корреляционной связью или зависимостью.

Таким образом, корреляционная зависимость – это разновидность вероятной зависимости. Например, на изменение значений одной величины, другая величина может реагировать изменением своей дисперсии или других характеристик.

Корреляционная зависимость это наиболее важная, с точки зрения практики, зависимость между случайными величинами. Она выражается в виде функциональных зависимостей математического ожидания одной случайной величины от значений другой, т.е. в виде функций $m_x(y)$ и $m_y(x)$, представляющих собой условные математические ожидания одних случайных величин при рассмотрении других в качестве независимых переменных (аргументов).

Функциональные зависимости $m_x(y)$ и $m_y(x)$ называются соответственно *регрессией* *X* на *У* и *регрессией* *У* на *X*. Графическое из изображение носит название линий или кривых регрессии. В зависимости от вида функций $m_x(y)$ и $m_y(x)$ различают линейную корреляционную зависимость, квадратичную, показательную, гиперболическую и т.д.

Наиболее часто встречающейся зависимостью между случайными величинами оказывается линейная корреляционная хависимость, поэтому наличие этой зависимости при исследовании различных случайных величин проверяется в первую очередь.

Рассмотренные нами характеристики связи между случайными величинами, т.е. K_{xy} и r_{xy}, характеризуют именно степень линейной корреляционной зависимости между случайными величинами *X* и *У*.

При этом они полностью описывают линейную корреляционную зависимость, определяя угол наклона прямых регрессии к координатным осям.

Если же между случайными величинами существуют другие формы или виды вероятностной зависимости, то указанные характеристики для описания этих зависимостей непригодны либо недостаточны.

Когда между двумя случайными существует линейная функциональная зависимость, например,

$$Y = AX + B,$$

то коэффициент корреляции равен плюс или минус единице. При этом знак коэффициента корреляции совпадает со знаком коэффициента *A*. Поэтому можно сказать, что величина корреляции по абсолютной величине не превосходит единицы, т.е.

$$|r_{xy}| \le 1.$$

На практике часто приходится рассматривать системы более чем двух случайных величин.

Для системы *n* случайных величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ минимальное число числовых характеристик составят:

- *n* математических ожиданий $m_{x1}, m_{x2}, ..., m_{xn}$, характеризующих средние значения величин;
- *n* дисперсий $D_{x1}, D_{x2}, ..., D_{xn}$, характеризующих рассеивание случайных величин;
- *n·(n-1)* корреляционных моментов $k_{x_i y_j} = M[\overset{0}{X}_i \overset{0}{X}_j] = K_{ij}$, где $i \neq j$, характеризующих попарную корреляцию всех величин, входящих в систему.

Заметим, что D_x есть не что иное, как K_{xx}, т.е.

$$k_{x_1 x_1} = D_{x_1} = D_1, \quad k_{x_2 x_2} = D_{x_1} = D_2$$

и т.д.

Все корреляционные моменты, дополненные дисперсиями, можно расположить в виде таблицы (матрицы):

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} D_1 \; K_{12} \; \mathbf{K} \; K_{1n} \\ K_{21} \; D_2 \; \mathbf{K} \; K_{2n} \\ \mathbf{K} \; \mathbf{K} \; \mathbf{K} \; \mathbf{K} \\ K_{n1} \; K_{n2} \; \mathbf{K} \; D_n \end{bmatrix}$$

Эта таблица называется ***корреляционной матрицей случайных величин***. Матрица, составленная из коэффициентов корреляции, называется ***нормированной корреляционной матрицей*** и имеет вид:

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} r_{11} \; r_{12} \; \mathbf{K} \; r_{1n} \\ r_{21} \; r_{22} \; \mathbf{K} \; r_{2n} \\ \mathbf{K} \; \mathbf{K} \; \mathbf{K} \; \mathbf{K} \\ r_{n1} \; r_{n2} \; \mathbf{K} \; r_{nn} \end{bmatrix}$$

Задача 3.1. Дана корреляционная матрица системы трех случайных величин (X_1, X_2, X_3):

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ & 49 & 1 \\ & & 36 \end{bmatrix}$$

Определить, где степень линейной корреляционной зависимости сильнее – между X_1 и X_2 или между X_1 и X_3.

Решение. Определим средние квадратические отклонения случайных величин X_1, X_2 и X_3:

$$s_{x_1} = \sqrt{16} = 4; \quad s_{x_2} = \sqrt{49} = 7; \quad s_{x_3} = \sqrt{36} = 6$$

Характеристикой степени линейной зависимости является коэффициент корреляции. Поэтому найдем $r_{x1ч2}$ и $r_{x1ч3}$:

$$r_{x_1x_2} = \frac{K_{x_1x_2}}{s_{x_1x_2}} = \frac{4}{4 \cdot 7} = 0{,}143; \quad r_{x_1x_3} = \frac{K_{x_1x_3}}{s_{x_1x_3}} = \frac{4}{4 \cdot 6} = 0{,}167.$$

Таким образом, связь между случайными величинами X_1 и X_3 более тесная, чем между X_1 и X_2.

4. СЛУЧЙНЫЕ ФУНКЦИИ. ЦЕПИ МАРКОВА

4.1. Основные понятия. Цепи Маркова

Случайной функцией называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, при чем заранее не известно какой именно.

Важным классом случайных функций являются марковские случайные функции – функции, дальнейшее поведение которых зависит только от значения, принятого функцией в настоящий момент, и не зависит от ранее принятых значений. Рассмотрим такие марковские случайные функции $X(t)$, у которых аргумент t принимает дискретное множество значений t_0, $t_1,\ldots, t_m$ и при каждом значении аргумента сама функция принимает одно из значений $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Такие марковские случайные функции называют цепями Маркова. Таким образом, цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых система принимает одно из K состояний полной группы, причем условная вероятность $p_{i,j}(s)$ того, что при s – м испытании система будет находиться в состоянии j, при условии, что в $(s-1)$ – м испытании она находилась в состоянии i , не зависит от результатов остальных, ранее произведенных испытаний.

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность $p_{i,j}(s)$ появления событий A_j в s – м испытании при условии, что в предыдущем $(s-1)$ – м испытании наступило событие A_i, не зависит от номера испытания (или, что тоже, от времени). Поэтому вместо $p_{i,j}(s)$ пишут просто $p_{i,j}$.

Вероятностью перехода или переходной вероятностью $p_{i,j}$ называют условную вероятность того, что из состояния i (в котором система оказалась в результате некоторого испытания, безразлично с каким номером) в итоге следующего испытания система перейдет в состояние j. Таким образом, в обозначении $p_{i,j}$ первый индекс указывает номер предшествующего, а второй – номер последующего состояния. Например, p_{11} - вероятность «перехода» из первого состояния в первое, p_{23} - вероятность перехода из второго состояния в третье.

Матрицей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы:

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{00}\ p_{01}\ \cdots\ p_{0k} \\ p_{10}\ \ p_{11}\ \cdots\ p_{1k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{k0}\ p_{k1}\ ..\cdots\ p_{kk} \end{bmatrix}.$$

В каждой строке матрицы помещены вероятности событий (переход системы из состояния i в состояние j), которые образуют полную группу. В этой связи сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, \quad i = \overline{0,k}.$$

Обозначим через $p_i(t_q)$ вероятность того, что $X(t)$ в момент времени t_q принимает значение X_i. Вектор $\boldsymbol{P}(t_q)=(p_0(t_q),\ p_1(t_q), \ldots,\ p_k(t_q))$ называют вектором вероятностей состояния цепи Маркова в момент времени t_q.

Вектор вероятностей состояний цепи Маркова в момент времени t_q равен произведению вектора вероятностей состояний в момент t_{q-1} на матрицу перехода, т.е. $\boldsymbol{P}(t_q)= \boldsymbol{P}(t_{q-1})*P_1$.

Цепь Маркова называется однородной по времени, если вероятность перехода $p_{i,j}$ из состояния i в состояние j зависит от длины промежутка времени и не зависит от начала отсчета. Однородная цепь Маркова определяется вектором вероятностей состояний в начальный момент $P(t_0)$ и матрицей перехода P_1, т.е.

$$P(t_q) = P(t_0) \cdot P_1^q,$$

где P_1^q - q – я степень матрицы перехода.

Задача 4.1. Цех производит продукцию двух видов X_0 и X_1. Эта продукция поставляется $n=100$ заказчикам. В некоторый момент времени продукцию X_0 получали $n_0=60$ заказчиков, а продукцию X_1 получали $n_0=40$ заказчиков. По истечении месяца оказалось, что из 60 заказчиков, получавших продукцию X_0, $m_{01}=12$ заказчиков стали получать продукцию X_1, а $m_{00}=48$, заказчиков – продукцию X_0, а из 40 заказчиков, получавших продукцию X_1, $m_{10}=10$ заказчиков стали получать продукцию X_0, а $m_{11}=30$ заказчиков – продукцию X_1.

Определить какая продукция пользуется наибольшим спросом: а) по истечении месяца; б) по истечении двух месяцев. (Предполагается, что имеет место однородная цепь Маркова).

Решение задачи

а) Вектор вероятностей состояния имеет вид

$$P(t_0) = (\frac{n_0}{n}; \frac{n_1}{n}) = (\frac{60}{100}; \frac{40}{100}) = (0{,}6;\ \ 0{,}4).$$

Матрица перехода имеет вид

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{m_0}{n_0} & \frac{m_{01}}{n} \\ \frac{m_{10}}{n_1} & \frac{m_{11}}{n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{48}{60} & \frac{12}{60} \\ \frac{10}{40} & \frac{30}{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}.$$

По истечении месяца вектор вероятностей состояния будет иметь вид:

$$P(t_1) = P(t_0) \cdot P_1 = [0,6 \;\; 0,4] \cdot \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} = [0,58 \;\; 0,42].$$

Таким образом, через месяц наибольшим спросом будет пользоваться продукция X_0.

б) Вектор вероятностей через два месяца определяется следующим образом:

$$P(t_2) = P(t_0) \cdot P_1^2.$$

Определим на первом этапе P_1^2. При этом,

$$P_1^2 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,69 & 0,31 \\ 0,3875 & 0,6125 \end{bmatrix}.$$

В таком случае

$$P(t_2) = [0,6 \;\; 0,4] \cdot \begin{bmatrix} 0,69 & 0,31 \\ 0,3875 & 0,6125 \end{bmatrix} = [0,569 \quad 0,431].$$

Поскольку $P_0(t_2)$ больше $P_1(t_2)$, то и через два месяца большим спросом будет пользоваться продукция X_0.

5. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Учебным планом дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» предусмотрено выполнение индивидуальных заданий. Количество задач индивидуальных заданий определяется преподавателем. Перед решением соответствующих задач не обходимо соответствующий раздел теоретического материала.

При выполнении индивидуальных заданий студент должен строго придерживаться следующих правил.

1. Выполнять контрольне работы, строго в соответствии с вариантом, номер котрого указывает прподаватель.

2. Каждое индивидуальное задание выполняется в отдельной тетради в клеточку черниламм любого цвета, кроме красных. В тетраде должны быть отведены поля для рецензента; в конце тетради должно быть оставлено несколько чистых страниц для дополнений и исправлений в соответствии с замечаниями рецензента.

3. Оформление титульного листа долино соответствовать принятому образцу.

4. Перед решением каждой задачи указывается ее условие. Размещение задач неободимо выполнять в порядке увеличения их номеров.

5. Решение задач обязательно сопровождается пояснениями, необходимыми рисунками или графиками. Обязательна ссылка на соответствующие теоретические положения и формулы.

6. После получения прорецензированной работы студент должен внимательно изучить рецензию и выполнить все замечания рецензента.

7. Работа, виполненная с любими нарушениями перечисленнях више тренований, не засчитывается и возвращается студенту для переработки.

8. Если индивидуальное задание после проверки имеет замечания рецензента, то не обходимо выполнить справить ошибки на дополнительных листах задания в конце тетради. Вносить изменения в текст индивидуальных заданий после проверки рецензентом категорически запрещается.

9. Индивидуальные задания должны выполняться самостоятельно. Контроль за самостоятельно выпаолненной работой студента осуществляется преподавателем в форме собеседования со студентом или тестом.

10. Номер варианта контрольной роботы выбирается в соответствии с двумя последними цифрами зачетной книжки или студентческого билета. При этом, если этот номер превышает цифру 50, то номер контрольной работы определяется следующим образом: от цыфры 100 вычитается цыфра, которая соответствует двум последним цифрам зачетной книжки или студентческого билета. Например, если номер двух последних цифр зачетной книжки соответствует цыфре 48, то студент выполняет 48 вариант. Если номер двух последнх цыфр зачетной книжки книжки 85, то вариант контрольної работы выбирается следующим образом: 100-85=15 и студент виполняет 15 вариант контрольной работы.

6. ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. –Ч.1. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Математика для економістів: Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: Національна академія управління, 1997.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969 .
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1997
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1997.

Дополнительная

1. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991.

2. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – К.: Вища школа, 1991.

3. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975 .

4. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1969.

5. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1991.

6. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971.

7. Микулик Н.А., Рейзина Г.Н. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Вышэйшая школа, 1991.

7. ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1
Тема: *Подсчет вероятностей по классическому определению*

1.1 **Бросают два игральных кубика. Найти вероятности событий:**

а) число очков на обоих кубиках одинаково;
б) сумма очков четна;
в) хотя бы на одном кубике появится цифра "6";
г) произведение выпавших очков равно 6.

1.2 Наугад выбирается пятизначное число. Найти вероятности событий:

а) число читается одинаково слева направо и справа налево;

б) число кратно пяти;
в) число состоит из нечетных цифр;
г) число состоит из различных цифр.

1.3

Из партии в 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наугад извлекают три изделия для контроля. Найти вероятности событий:

а) среди отобранных ровно два бракованных изделия;
б) среди отобранных все изделия бракованные;
в) среди отобранных нет бракованных изделий;
г) среди отобранных хотя бы одно изделие бракованное.

1.4

Из колоды карт в 52 листа извлекают наугад 4 карты. Найти вероятности событий:

а) среди отобранных все карты бубновой масти;
б) среди отобранных все карты одной масти;
в) среди отобранных окажется хотя бы один туз;
г) будут отобраны карты: валет, дама и два короля.

1.5

Числа 1, 2, 3, ... 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности событий:

а) числа будут записаны в порядке возрастания;
б) числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания;
в) числа 3, 6, 9 будут следовать друг за другом в произвольном порядке;
г) на четных местах будут стоять четные числа.

1.6

Из телефонной книги наугад выбирается случайный номер телефона (все номера шестизначные). Найти вероятности событий:

а) три последние цифры одинаковы;
б) все цифры различны;
в) номер начинается с цифры 5;
г) номер не содержит четных цифр.

1.7 В коробке лежат цветные шары: 7 красных, 8 белых и 5 черных. Наугад достают три шара. Найти вероятности событий:

а) среди отобранных шаров все белые;
б) среди отобранных 2 черных и 1 красный;
в) среди отобранных нет красных шаров;
г) хотя бы один из отобранных шаров красного цвета.

1.8 На карточках написаны первые 10 букв русского алфавита. Отбирают по одной 4 карточки и, выкладывая их в порядке отбора, составляют слово. Найти вероятности событий:

а) слово заканчивается на букву "А" ;
б) будет получено слово "БЕДА";
в) в слове нет букв "Б" и "В" ;
г) в слове нет гласных.

1.9 Десять вариантов контрольных работ, написанных на отдельных карточках, перемешиваются и распределяются среди восьми студентов, сидящих в одном ряду. Найти вероятности событий:

а) варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными;
б) варианты 1 и 2 достанутся студентам, сидящим рядом;
в) будут распределены последовательные номера вариантов;
г) все полученные номера заданий будут розданы строго в порядке возрастания.

1.10 На пяти карточках написаны цифры от одного до пяти. Случайным образом отбирают три карточки и раскладывают их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности событий:

а) появится число 123;
б) появится число, не содержащее цифры 3 ;
в) появится число, состоящее из последовательных цифр;
г) появится четное число.

Задача 2

Тема : *Теоремы сложения и умножения вероятностей*

2.1 Проверяют качество изделий. Для каждого из них вероятность того, что оно будет первого сорта, равна 0,3. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий первосортным окажется только одно.

2.2 При изготовлении детали заготовка должна пройти через четыре операции. Вероятность брака на первой из операций равна 0,02; на второй – 0,01; на третьей – 0,02; на четвертой – 0,03 . Появление брака на каждой из операций – события независимые. Найти вероятность изготовления нестандартной детали.

2.3 В цехе 4 станка. Для любого из них вероятность выхода из строя равна 0,1. Найти вероятность того, что в данный момент неисправен ровно один станок.

2.4 В пункте продажи железнодорожных билетов 4 кассы. Для любой из них вероятность того, что касса в данный момент окажется свободной, равна 0,2. Найти вероятность того, что подошедший пассажир сможет купить билет, не ожидая в очереди.

2.5 Индикатор цели состоит из трех датчиков. Вероятность обнаружения цели для любого из датчиков равна 0,7 . Найти вероятность того, что цель будет обнаружена, если индикатор включается при срабатывании хотя бы двух датчиков.

2.6 Студент знает 30 вопросов из 50. Найти вероятность того, что он ответит хотя бы на один вопрос из четырех предложенных .

2.7 Найти вероятность того, что в мишени будет ровно 3 пробоины, если по ней сделано 4 выстрела с вероятностью попадания в каждом 0,8.

2.8 Имеется две коробки с цветными шарами. В первой 7 красных и 3 белых; во второй 4 красных и 6 белых. Из каждой коробки достают по одному шару. Найти вероятность того, что среди них окажется один красный и один белый.

2.9 Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятность того, что первый успешно пройдет отбор и попадет в сборную, равна 0,8; для второго вероятность равна 0,6; для третьего – 0,5. Найти вероятность того, что хотя бы один из этих спортсменов в сборную попадет.

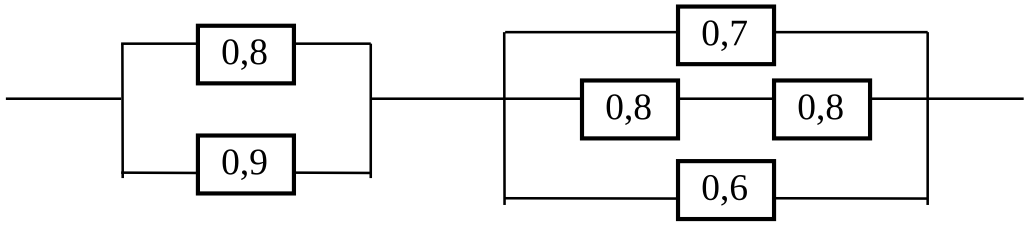
2.10 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,6 ; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, не менее двух экзаменов он сдаст.

Задача 3

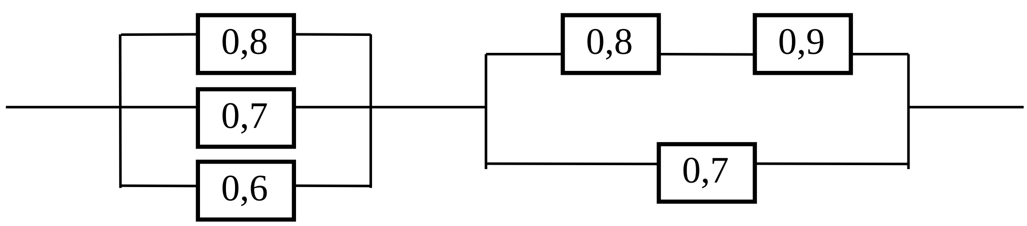
Тема: *Рассчитать надежность системы*

Надежности элементов, ее составляющих, указаны на схеме.

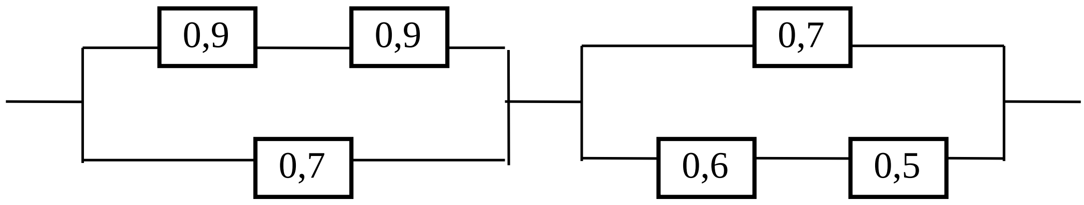
3.1



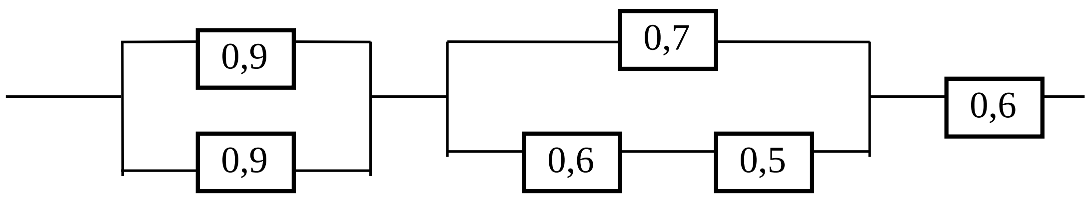
3.2



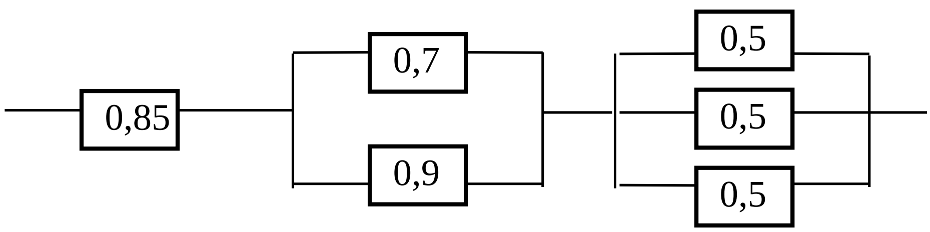
3.3



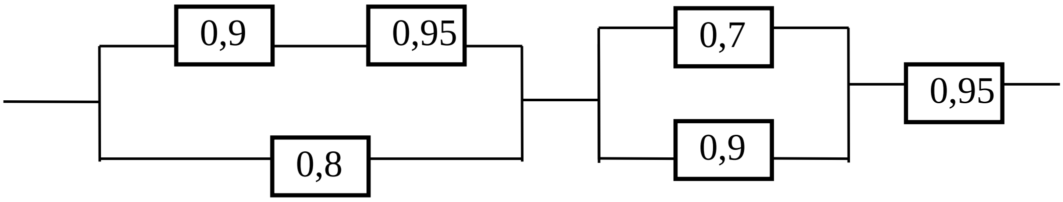
3.4



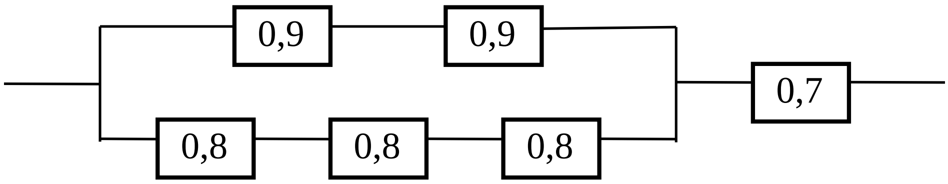
3.5



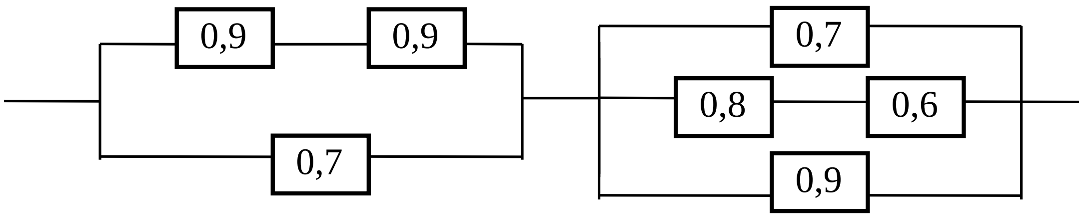
3.6



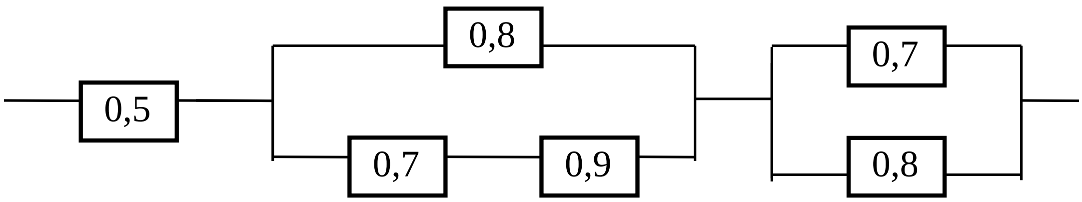
3.7



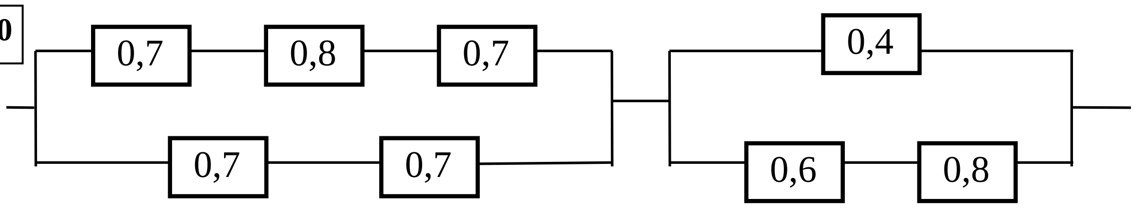
3.8



3.9



3.10



Задача 4

Тема: *Формула полной вероятности и формула Бейеса*

4.1 Добираясь на работу, служащий может выбирать три маршрута. Первый из них самый короткий, но на нем вероятность опоздания равна 0,25. При выборе второго вероятность опоздания – 0,15. На третьем, самом длинном маршруте, эта вероятность равна 0,05. Первый маршрут человек выбирает в 60 % случаев, второй – в 30 % случаев. Какова вероятность того, что сегодня он успеет на работу вовремя ?

4.2 В магазине имеются в продаже однотипные изделия трех фирм в равных количествах. У изделий, изготавливаемых первой фирмой, вероятность наличия дефекта равна 0,1; у изделий второй фирмы – 0,05; у изделий третьей фирмы – 0,02. Наугад взятое изделие оказалось дефектным. Какова вероятность того, что оно изготовлено первой фирмой?

4.3 Студент выучил 20 билетов из 30. Что для него лучше, идти отвечать первым, вторым или третьим ?

4.4 Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попаданий: первого – 0,7; второго – 0,9; третьего – 0,8. В мишени оказалось две пробоины. Какова вероятность того, что промахнулся второй стрелок ?

4.5 Группа из 30 студентов идет сдавать экзамен по теории вероятностей. Десять из них изучили весь материал и поэтому для них вероятность сдать экзамен равна 90%. Двенадцать человек изучили 75% вопросов, для них вероятность сдать экзамен равна 60%. Остальные идут на экзамен почти ничего не изучив, поэтому у них вероятность сдать экзамен равна 0,001. Какова вероятность того, что наугад взятый студент экзамен сдаст ?

4.6 Контроль качества осуществляют два контролера. Первый проверяет 60% изделий, второй – 40%. У первого контролера вероятность пропустить брак равна 0,02, у второго – 0,01. Из изделий, уже прошедших контроль, наугад выбрано одно, и оно оказалось дефектным. Какова вероятность того, что пропустил брак первый контролер?

4.7 В коробке лежит шар неизвестного цвета – с равной вероятностью белый или черный. В нее опускают один белый шар и после тщательного перемешивания наугад достают один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар, оставшийся в урне, тоже белый?

4.8 На завод поступает сырье от трех поставщиков. Вероятность изготовить качественную продукцию из сырья, поставляемого первым из них, равна 0,75 ; из сырья, изготовляемого вторым, – 0,9; третьим – 0,8. На складе имеется 40% упаковок от первого поставщика; 25% – от второго и 35% от третьего. Какова вероятность того, что из наугад взятой со склада упаковки будет изготовлена качественная продукция?

4.9 Система состоит из двух блоков, работающих и отказывающих независимо друг от друга, причем для ее работы нужно, чтобы работали оба блока. Для первого из них вероятность безотказной работы равна 0,8, для второго – 0,9. Система испытывалась и вышла из строя. Какова вероятность того, что отказал именно второй элемент ?

4.10 Имеются две коробки с цветными шарами. В первой 6 белых и 4 черных. Во второй 3 белых и 2 черных. Из второй коробки наугад достают два шара и перекладывают в первую. Затем из первой наугад достают один шар. Какова вероятность того, что он окажется черным?

Задача 5

Тема: Повторение опытов. Биномиальное распределение и его предельные случаи

5.1 Вероятность выигрыша на игральном автомате равна 0,05. Какова вероятность того, что при 50 попытках выигрыш будет получен не менее 2 раз ?

5.2 На потоке 100 студентов. Каждый из них может сдать экзамен по теории вероятностей с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что не менее 70 % студентов экзамен сдадут ?

5.3 Из всех сходящих с конвейера изделий 5% имеют дефект. Для контроля отбираются наугад 7 изделий. Какова вероятность того, что среди них будет по крайней мере одно дефектное?

5.4 Вероятность попадания в одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что в 50 выстрелах будет получено не менее 30 попаданий.

5.5 Вероятность ошибки в платежной ведомости равна 0,01. Какова вероятность того, что из 50 ведомостей окажется хотя бы две ошибочных ?

5.6 Вероятность отказа при срабатывании реле равна 0,05. Какова вероятность того, что из 50 реле по крайней мере три не сработают ?

5.7 В течение гарантийного срока выходят из строя в среднем 3% изготавливаемых фирмой изделий. Найти вероятность того, что из 50 проданных изделий возвращены будут не более двух.

5.8 Какова вероятность того, что при 50 бросаниях монеты герб появится не более 15 раз ?

5.9 Какова вероятность того, что при 5 бросаниях кубика цифра "6" появится не менее 3 раз ?

5.10 В цехе работают 80 человек. Каждый из них может не выйти на работу с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что число не вышедших на работу будет не более трех ?

Задача 6
Составить закон распределения для случайной величины, указанной в условии задачи

6.1 Вероятность попадания в первом выстреле равна 0,7; во втором – 0,9; в третьем – 0,8. Случайная величина X – число попаданий в трех выстрелах.

6.2 Случайная величина X – сумма числа очков, выпавших на двух кубиках.

6.3 Случайная величина X – число гербов, выпавших при бросании трех монет.

6.4 Прибор состоит из трех элементов, работающих и отказывающих независимо друг от друга. Надежности элементов: первого – 0,6; второго – 0,9; третьего – 0,8. Случайная величина X – число отказавших элементов.

6.5 Вероятность попадания стрелка в одном выстреле равна 0,7. Патроны ему выдают до первого промаха. Случайная величина X – число использованных патронов.

6.6 В коробке лежат 5 красных, 7 белых и 8 черных шаров. Наугад достают три шара. Случайная величина X – число извлеченных белых шаров.

6.7 Бросают три игральных кубика. Случайная величина X – число выпавших шестерок.

6.8 В партии изделий 8 качественных и два дефектных. Наугад отбирают три. Случайная величина X – число дефектных среди них.

6.9 Студенту задают вопросы до первого неправильного ответа. На 80% вопросов ответы он знает. Случайная величина X – число заданных вопросов.

6.10 В партии деталей 10 % брака. Наугад берут 4 детали. Случайная величина X – число бракованных среди них.

Задача 7
Тема*: Закон распределения дискретной случайной величины*

Дискретная случайная величина задана *рядом распределения*.

Необходимо:
1. Записать пропущенную вероятность.
2. Подсчитать вероятности попаданий в указанные интервалы.
3. Записать значения функции распределения F(x) в указанных точках.
4. Записать функцию распределения при любых значениях аргумента, построить ее график.
5. Вычислить числовые характеристики случайной величины :

$$m_x,\ \ m_o,\ \ D_x,\ \sigma_x .$$

7.1

x_i	1	3	7	9	12	14
p_i	0,1	0,2		0,4	0,05	0,15

$P(X=2)$; $P(X=9)$; $P(X<5)$; $P(X>8)$; $P(4<X<13)$; $P(10<X<20)$;

$F(0)$; $F(4)$; $F(10)$; $F(40)$.

7.2

x_i	3	4	6	8	13	18
p_i	0,15	0,20	0,10	0,35		0,05

$P(X=9)$; $P(X=4)$; $P(X<8)$; $P(X>2)$; $P(5<X<11)$; $P(70<X<40)$;

$F(–3)$; $F(6)$; $F(12)$; $F(70)$.

7.3

x_i	0	2	4	5	9	11
p_i	0,20	0,05	0,15		0,4	0,10

$P(X=5)$; $P(X=7)$; $P(X<3)$; $P(X>6)$; $P(2<X<10)$; $P(7<X<100)$;

$F(–8)$; $F(5)$; $F(12)$; $F(35)$.

7.4

x_i	1	4	5	8	11	14
p_i	0,10	0,10	0,25		0,10	0,05

$P(X=11)$; $P(X=0)$; $P(X<10)$; $P(X>4)$; $P(5<X<13)$; $P(3<X<30)$;

$F(–5)$; $F(6)$; $F(11)$; $F(90)$.

7.5

x_i	0	2	5	9	12	16
p_i	0,10		0,15	0,05	0,25	0,05

$P(X=12)$; $P(X=6)$; $P(X<7)$; $P(X>2)$; $P(5<X<14)$; $P(10<X<30)$;

$F(–1)$; $F(5)$; $F(8)$; $F(90)$.

7.6

x_i	1	4	5	8	10	12
p_i	0,05	0,15	0,05	0,20	0,10	

$P(X=3)$; $P(X=5)$; $P(X<8)$; $P(X>6)$; $P(3<X<9)$; $P(5<X<25)$;

$F(-4)$; $F(5)$; $F(11)$; $F(37)$.

7.7

x_i	3	5	7	9	13	14
p_i	0,05	0,05	0,25	0,35		0,10

$P(X=1)$; $P(X=7)$; $P(X<8)$; $P(X>5)$; $P(6<X<15)$; $P(10<X<30)$;

$F(2)$; $F(7)$; $F(12)$; $F(45)$.

7.8

x_i	6	7	9	11	14	17
p_i	0,35		0,15	0,05	0,10	0,10

$P(X=4)$; $P(X=9)$; $P(X<10)$; $P(X>7)$ $P(2<X<9)$; $P(6<X<26)$;

$F(5)$; $F(11)$; $F(15)$; $F(45)$.

7.9

x_i	0	5	7	8	11	15
p_i		0,05	0,10	0,10	0,35	0,10

P(X=3); P(X=15); P(X<6); P(X>9); P(2<X<12); P(7<X<25);

F(–5); F(6); F(11); F(33).

7.10

x_i	2	6	9	12	14	16
p_i	0,25	0,15	0,10		0,05	0,05

P(X=1); P(X=12); P(X<6); P(X>7); P(3<X<15); P(8<X<80);

F(1); F(8); F(12); F(20).

Задача 8
Тема: *Закон распределения непрерывной случайной величины*

Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения *F(x).* Найти плотность распределения *f*(x), построить графики функций *F(x)* и *f*(x), найти математическое ожидание, дисперсию, вероятность попадания значений *X* в заданный интервал (α , β).

8.1

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad при\ x\le 0,\\ x^2 \quad при\ 0<x<1,\\ 1 \quad при\ x>1;\end{cases} \quad a=0.5,\ b=2.$$

8.2

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \textit{при } x \le 2, \\ x/2-1 \quad \textit{при } 2 < x < 4, \quad a=1,\ b=3. \\ 1 \quad \textit{при } x > 4; \end{cases}$$

8.3

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \textit{при } x \le 0, \\ 3x^2+2x \quad \textit{при } 0 < x \le 1/3, \quad a=1/6,\ b=2/3. \\ 1 \quad \textit{при } x > 1/3; \end{cases}$$

8.4

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \textit{при } x \le 0, \\ x^3 \quad \textit{при } 0 < x \le 1, \quad a=0.5,\ b=1.5. \\ 1 \quad \textit{при } x > 1; \end{cases}$$

8.5

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \textit{при } x \le 0, \\ x^2/9 \quad \textit{при } 0 < x \le 3, \quad a=1,\ b=4. \\ 1 \quad \textit{при } x > 3; \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{8.6}}$

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \textit{при } x\le 1/2, \\ x^2/4 \quad \textit{при } 0<x\le 2, \\ 1 \quad \textit{при } x>2; \end{cases} \quad a=1,\ b=3.$$

$\boxed{\textbf{8.7}}$

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \textit{при } x\le 0, \\ x-1/2 \quad \textit{при } 1/2<x\le 3/2, \\ 1 \quad \textit{при } x>3/2; \end{cases} \quad a=1,\ b=3.$$

$\boxed{\textbf{8.8}}$

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \textit{при } x\le 1, \\ x^2-x/2 \quad \textit{при } 1<x<2, \\ 1 \quad \textit{при } x>2; \end{cases} \quad a=0,\ b=1.5.$$

$\boxed{\textbf{8.9}}$

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \textit{при } x\le 0, \\ x/4 \quad \textit{при } 0<x\le 4, \\ 1 \quad \textit{при } x>4; \end{cases} \quad a=2,\ b=5.$$

8.10

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad при\ x \le -2, \\ x/4+1/2 \quad при -2 < x \le 2, \\ 1 \quad при\ x > 2; \end{cases} \quad a=0,\ b=1.$$

Задача 9
Тема : *Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал*

Найти вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал (α, β), если она распределена по указанному закону:

1) равномерное распределение на интервале (a, b);
2) показательное распределение с математическим ожиданием, равным b;
3) нормальное распределение с математическим ожиданием, равным a, и среднеквадратическим отклонением, равным α.

9.1 a = **1 ;** b = **10 ;** **a = 8 ; b = 15 .**

9.2 a = **2 ;** b = **8 ;** **a = 3 ; b = 12 .**

9.3 a = **3 ;** b = **7 ;** **a = 5 ; b = 10 .**

9.4 a = **4 ;** b = **12 ;** **a = 6 ; b = 15 .**

9.5	a = **5 ;** b = **9 ;**	**a = 7 ; b = 11 .**
9.6	a = **6 ;** b = **10 ;**	**a = 8 ; b = 12 .**
9.7	a = **7 ;** b = **12 ;**	**a = 8 ; b = 14 .**
9.8	a = **8 ;** b = **15 ;**	**a = 12 ; b = 16 .**
9.9	a = **9 ;** b = **14 ;**	**a = 10 ; b = 15 .**
9.10	a = **10 ;** b = **16;**	**a = 11 ; b = 20 .**

Задача 9
Тема : *Системы случайных величин*

Определить тесноту линейной корреляционной зависимости между составляющими системы (X_1 , X_2) по заданной корреляционной матрице.

9.1

$$[K_{i,j}] = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ & 4 \end{bmatrix}$$

9.2

$$[K_{i,j}] = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ & 9 \end{bmatrix}$$

9.3

$$[K_{i,j}]=\begin{bmatrix}4 & 7\\ & 25\end{bmatrix}$$

9.4

$$[K_{i,j}]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ & 16\end{bmatrix}$$

9.5

$$[K_{i,j}]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ & 9\end{bmatrix}$$

9.6

$$[K_{i,j}]=\begin{bmatrix}16 & 1\\ & 3\end{bmatrix}$$

9.7

$$[K_{i,j}]=\begin{bmatrix}4 & 5\\ & 16\end{bmatrix}$$

9.8

$$[K_{i,j}]=\begin{bmatrix}9 & 7\\ & 25\end{bmatrix}$$

9.9

$$[K_{i,j}]=\begin{bmatrix}9 & 10\\ & 16\end{bmatrix}$$

9.10

$$[K_{i,j}]=\begin{bmatrix}16 & 12\\ & 25\end{bmatrix}$$

Задача 10
Тема : *Цепи Маркова*

Имеются три конкурирующих изделия X_0 , X_1 , X_2. Для определения спроса на эти изделия произведен опрос n=1000 человек. Оказалось, что в данный момент изделие X_0 покупают n_0 человек, изделие X_1 - n_1 , а X_2 - n_2 человек. По истечении месяца оказалось, что из n_0 человек, покупавших изделие X_0 , m_{00} человек продолжают его покупать, m_{01} стали покупать изделие X_1, m_{02} изделие X_2. Из n_1 человек, покупавших изделие X_1, m_{11} человек продолжают его покупать, m_{10} стали покупать изделие X_0 , m_{12} изделие X_2 . Из n_2 человек, покупавших изделие X_2, m_{22} продолжают его покупать, m_{20} стали покупать изделие X_0, m_{21} изделие X_1. Определить, какое изделие пользуется по истечении месяца наибольшим спросом, предполагая, что поведение покупателей в каждый следующий месяц обусловлено только их поведением в предыдущий месяц (т.е. образует цепь Маркова). Какое изделие будет пользоваться наибольшим спросом по истечении двух месяцев?

10.1

n_0=400; n_1=100; n_2=500; m_{00}=50; m_{01}=150; m_{02}=200;
m_{10}=30; m_{11}=50; m_{12}=20; m_{20}=200; m_{21}=100; m_{22}=200

10.2

n_0=600; n_1=200; n_2=200; m_{00}=150;m_{01}=200; m_{02}=250;
m_{10}=120; m_{11}=60; m_{12}=20; m_{20}=50; m_{21}=100; m_{22}=50

10.3

n_0=100; n_1=500; n_2=400; m_{00}=25 m_{01}=35; m_{02}=40;
m_{10}=250; m_{11}=50; m_{12}=200; m_{20}=50; m_{21}=150; m_{22}=200

10.4

n_0=550; n_1=150; n_2=300; m_{00}=50 m_{01}=300; m_{02}=200;

m_{10}=20; m_{11}=30; m_{12}=100; m_{20}=100; m_{21}=50; m_{22}=150.

10.5 n_0=800; n_1=50; n_2=150; m_{00}=400; m_{01}=200; m_{02}=200;
m_{10}=10; m_{11}=20; m_{12}=20; m_{20}=50; m_{21}=100; m_{22}=0;

10.6 n_0=150; n_1=450; n_2=400; m_{00}=50;m_{01}=75; m_{02}=25;
m_{10}=100; m_{11}=250; m_{12}=100; m_{20}=200; m_{21}=50; m_{22}=150

10.7 n_0=700; n_1=200; n_2=100; m_{00}=300;$_{01}$=250; m_{02}=150;
m_{10}=75; m_{11}=100; m_{12}=25; m_{20}=20; m_{21}=30; m_{22}=50

10.8 n_0=500; n_1=100; n_2=400; m_{00}=100;m_{01}=200; m_{02}=200;
m_{10}=25; m_{11}=30; m_{12}=45; m_{20}=50; m_{21}=150; m_{22}=200

10.9 n_0=200; n_1=700; n_2=100; m_{00}=50;m_{01}=100; m_{02}=50;
m_{10}=250 m_{11}=150; m_{12}=300; m_{20}=20; m_{21}=45; m_{22}=35

10.10 n_0=300; n_1=500; n_2=200; m_{00}=100;m_{01}=50; m_{02}=150;
m_{10}=200; m_{11}=50; m_{12}=250; m_{20}=50; m_{21}=100; m_{22}=50

8. ТАБЛИЦА ВАРИАНТОВ ИНДИВИДУАЛЬНИХ ЗАДАНИЙ

№№ вар	*номера задач*									
1	1.3	2.2	3.9	4.2	5.4	6.2	7.9	8.3	9.10	10.4
2	1.1	2.8	3.4	4.4	5.3	6.4	7.2	8.4	9.5	10.6
3	1.2	2.4	3.3	4.5	5.10	6.8	7.5	8.9	9.8	10.7
4	1.4	2.6	3.1	4.7	5.9	6.9	7.4	8.2	9.3	10.10
5	1.9	2.5	3.5	4.8	5.7	6.3	7.10	8.7	9.6	10.4
6	1.2	2.3	3.9	4.9	5.8	6.1	7.8	8.6	9.9	10.9
7	1.5	2.1	3.4	4.6	5.2	6.7	7.6	8.10	9.1	10.4
8	1.4	2.9	3.8	4.3	5.5	6.5	7.1	8.8	9.4	10.7
9	1.10	2.7	3.3	4.1	5.4	6.10	7.8	8.1	9.7	10.3
10	1.8	2.10	3.4	4.10	5.6	6.5	7.3	8.10	9.8	10.1
11	1.6	2.1	3.9	4.5	5.1	6.4	7.4	8.6	9.9	1.6
12	1.1	2.5	3.2	4.8	5.2	6.6	7.6	8.7	9.6	10.5
15	1.8	2.9	3.7	4.3	5.4	6.1	7.7	8.9	9.3	10.10
14	1.3	2.7	3.6	4.6	5.9	6.3	7.10	8.5	9.2	10.1
15	1.4	2.5	3.10	4.9	5.6	6.7	7.4	8.4	9.1	10.8
16	1.6	2.3	3.8	4.1	5.7	6.9	7.9	8.9	9.4	10.6
17	1.7	2.2	3.1	4.4	5.3	6.8	7.4	8.3	9.7	10.7
18	1.10	2.8	3.10	4.7	5.10	6.5	7.7	8.1	9.1	10.5
19	1.4	2.4	3.6	4.8	5.5	6.2	7.3	8.5	9.2	10.2
20	1.9	2.6	3.7	4.9	5.3	6.10	7.1	8.2	9.5	10.9
21	1.4	2.5	3.9	4.6	5.1	6.6	7.6	8.6	9.10	10.3
22	1.7	2.2	3.5	4.3	5.6	6.1	7.5	8.4	9.4	10.4
23	1.3	2.8	3.4	4.2	5.4	6.7	7.10	8.5	9.5	10.6
24	1.1	2.10	3.9	4.1	5.5	6.2	7.1	8.10	9.1	10.7
25	1.6	2.1	3.3	4.4	5.4	6.9	7.8	8.3	9.5	10.5
26	1.5	2.3	3.1	4.7	5.9	6.4	7.6	8.8	9.8	10.4
27	1.10	2.4	3.5	4.1	5.7	6.3	7.7	8.5	9.7	10.10
28	1.1	2.9	3.2	4.2	5.8	6.10	7.5	8.2	9.10	10.4
29	1.8	2.7	3.6	4.5	5.5	6.9	7.2	8.9	9.6	10.7
30	1.6	2.10	3.4	4.10	5.6	6.6	7.9	8.2	9.7	10.3
31	1.7	2.4	3.5	4.4	5.4	6.5	7.3	8.5	9.1	10.2
32	1.5	2.6	3.10	4.5	5.3	6.1	7.4	8.7	9.8	10.6
33	1.2	2.5	3.3	4.1	5.2	6.5	7.6	8.8	9.6	10.5
34	1.9	2.1	3.8	4.5	5.6	6.10	7.7	8.1	9.5	10.5
35	1.3	2.6	3.5	4.8	5.9	6.5	7.5	8.6	9.2	10.3
36	1.4	2.3	3.2	4.7	5.4	6.6	7.6	8.5	9.3	10.1
37	1.6	2.8	3.9	4.10	5.5	6.8	7.7	8.1	9.4	10.9

38	1.7	2.2	3.2	4.6	5.3	6.10	7.5	8.4	9.5	10.3
39	1.5	2.9	3.5	4.7	5.2	6.4	7.2	8.2	9.10	10.4
40	1.4	2.3	3.7	4.1	5.6	6.2	7.9	8.6	9.4	10.6
41	1.10	2.5	3.8	4.8	5.10	6.2	7.2	8.3	9.7	10.7
42	1.4	2.6	3.1	4.6	5.5	6.6	7.5	8.10	9.1	10.5
43	1.7	2.3	3.6	4.5	5.6	6.3	7.4	8.5	9.8	10.4
44	1.3	2.9	3.5	4.2	5.3	6.7	7.10	8.2	9.6	10.10
45	1.2	2.2	3.1	4.3	5.5	6.4	7.8	8.9	9.5	10.4
46	1.6	2.2	3.4	4.4	5.10	6.9	7.6	8.2	9.2	10.7
47	1.5	2.4	3.2	4.5	5.9	6.7	7.1	8.5	9.3	10.3
48	1.5	2.5	3.6	4.10	5.5	6.4	7.8	8.7	9.4	10.2
49	1.3	2.10	3.3	4.4	5.6	6.1	7.3	8.8	9.5	10.6
50	1.1	2.8	3.10	4.7	5.9	6.10	7.4	8.1	9.10	10.5

Приложение

ТАБЛИЦЫ

функции Гаусса

и

функции Лапласа

Функция Гаусса и функция Лапласа

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000
0,01	0,3989	0,0040
0,02	0,3989	0,0080
0,03	0,3988	0,0120
0,04	0,3986	0,0160
0,05	0,3984	0,0199
0,06	0,3982	0,0239
0,07	0,3980	0,0279
0,08	0,3977	0,0319
0,09	0,3973	0,0359
0,10	0,3970	0,0398
0,11	0,3965	0,0438
0,12	0,3961	0,0478
0,13	0,3956	0,0517
0,14	0,3951	0,0557
0,15	0,3945	0,0596
0,16	0,3939	0,0636
0,17	0,3932	0,0675
0,18	0,3925	0,0714
0,19	0,3918	0,0753
0,20	0,3910	0,0793
0,21	0,3902	0,0832
0,22	0,3894	0,0871
0,23	0,3885	0,0910
0,24	0,3876	0,0948
0,25	0,3867	0,0987
0,26	0,3857	0,1026
0,27	0,3847	0,1064
0,28	0,3836	0,1103
0,29	0,3825	0,1141

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,30	0,3814	0,1179
0,31	0,3802	0,1217
0,32	0,3790	0,1255
0,33	0,3778	0,1293
0,34	0,3765	0,1331
0,35	0,3752	0,1368
0,36	0,3739	0,1406
0,37	0,3725	0,1443
0,38	0,3712	0,1480
0,39	0,3697	0,1517
0,40	0,3683	0,1554
0,41	0,3668	0,1591
0,42	0,3653	0,1628
0,43	0,3637	0,1664
0,44	0,3621	0,1700
0,45	0,3605	0,1736
0,46	0,3589	0,1772
0,47	0,3572	0,1808
0,48	0,3555	0,1844
0,49	0,3538	0,1879
0,50	0,3521	0,1915
0,51	0,3503	0,1950
0,52	0,3485	0,1985
0,53	0,3467	0,2019
0,54	0,3448	0,2054
0,55	0,3429	0,2088
0,56	0,3410	0,2123
0,57	0,3391	0,2157
0,58	0,3372	0,2190
0,59	0,3352	0,2224

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,60	0,3332	0,2257
0,61	0,3312	0,2291
0,62	0,3292	0,2324
0,63	0,3271	0,2357
0,64	0,3251	0,2389
0,65	0,3230	0,2422
0,66	0,3209	0,2454
0,67	0,3187	0,2486
0,68	0,3166	0,2517
0,69	0,3144	0,2549
0,70	0,3123	0,2580
0,71	0,3101	0,2611
0,72	0,3079	0,2642
0,73	0,3056	0,2673
0,74	0,3034	0,2704
0,75	0,3011	0,2734
0,76	0,2989	0,2764
0,77	0,2966	0,2794
0,78	0,2943	0,2823
0,79	0,2920	0,2852
0,80	0,2897	0,2881
0,81	0,2874	0,2910
0,82	0,2850	0,2939
0,83	0,2827	0,2967
0,84	0,2803	0,2995
0,85	0,2780	0,3023
0,86	0,2756	0,3051
0,87	0,2732	0,3078
0,88	0,2709	0,3106
0,89	0,2685	0,3133

0,90	0,2661	0,3159	1,25	0,1826	0,3944	1,65	0,1023	0,4505
0,91	0,2637	0,3186	1,26	0,1804	0,3962	1,66	0,1006	0,4515
0,92	0,2613	0,3212	1,27	0,1781	0,3980	1,67	0,0989	0,4525
0,93	0,2589	0,3238	1,28	0,1758	0,3997	1,68	0,0973	0,4535
0,94	0,2565	0,3264	1,29	0,1736	0,4015	1,69	0,0957	0,4545
0,95	0,2541	0,3289	1,30	0,1714	0,4032	1,70	0,0940	0,4554
0,96	0,2516	0,3315	1,31	0,1691	0,4049	1,71	0,0925	0,4564
0,97	0,2492	0,3340	1,32	0,1669	0,4066	1,72	0,0909	0,4573
0,98	0,2468	0,3365	1,33	0,1647	0,4082	1,73	0,0893	0,4582
0,99	0,2444	0,3389	1,34	0,1626	0,4099	1,74	0,0878	0,4591
1,00	0,2420	0,3413	1,35	0,1604	0,4115	1,75	0,0863	0,4599
1,01	0,2396	0,3438	1,36	0,1582	0,4131	1,76	0,0848	0,4608
1,02	0,2371	0,3461	1,37	0,1561	0,4147	1,77	0,0833	0,4616
1,03	0,2347	0,3485	1,38	0,1539	0,4162	1,78	0,0818	0,4625
1,04	0,2323	0,3508	1,39	0,1518	0,4177	1,79	0,0804	0,4633
1,05	0,2299	0,3531	1,40	0,1497	0,4192	1,80	0,0790	0,4641
1,06	0,2275	0,3554	1,41	0,1476	0,4207	1,81	0,0775	0,4649
1,07	0,2251	0,3577	1,42	0,1456	0,4222	1,82	0,0761	0,4656
1,08	0,2227	0,3599	1,43	0,1435	0,4236	1,83	0,0748	0,4664
1,09	0,2203	0,3621	1,44	0,1415	0,4251	1,84	0,0734	0,4671
1,10	0,2179	0,3643	1,45	0,1394	0,4265	1,85	0,0721	0,4678
1,11	0,2155	0,3665	1,46	0,1374	0,4279	1,86	0,0707	0,4686
1,12	0,2131	0,3686	1,47	0,1354	0,4292	1,87	0,0694	0,4693
1,13	0,2107	0,3708	1,48	0,1334	0,4306	1,88	0,0681	0,4699
1,14	0,2083	0,3729	1,49	0,1315	0,4319	1,89	0,0669	0,4706
1,15	0,2059	0,3749	1,50	0,1295	0,4332	1,90	0,0656	0,4713
1,16	0,2036	0,3770	1,51	0,1276	0,4345	1,91	0,0644	0,4719
1,17	0,2012	0,3790	1,52	0,1257	0,4357	1,92	0,0632	0,4726
1,18	0,1989	0,3810	1,53	0,1238	0,4370	1,93	0,0620	0,4732
1,19	0,1965	0,3830	1,54	0,1219	0,4382	1,94	0,0608	0,4738
1,15	0,2059	0,3749	1,55	0,1200	0,4394	1,95	0,0596	0,4744
1,16	0,2036	0,3770	1,56	0,1182	0,4406	1,96	0,0584	0,4750
1,17	0,2012	0,3790	1,57	0,1163	0,4418	1,97	0,0573	0,4756
1,18	0,1989	0,3810	1,58	0,1145	0,4429	1,98	0,0562	0,4761
1,19	0,1965	0,3830	1,59	0,1127	0,4441	1,99	0,0551	0,4767
1,20	0,1942	0,3849	1,60	0,1109	0,4452	2,00	0,0540	0,4772
1,21	0,1919	0,3869	1,61	0,1092	0,4463	2,01	0,0529	0,4778
1,22	0,1895	0,3888	1,62	0,1074	0,4474	2,02	0,0519	0,4783
1,23	0,1872	0,3907	1,63	0,1057	0,4484	2,03	0,0508	0,4788
1,24	0,1849	0,3925	1,64	0,1040	0,4495	2,04	0,0498	0,4793

2,05	0,0488	0,4798	2,40	0,0224	0,4918	2,80	0,0079	0,4974
2,06	0,0478	0,4803	2,41	0,0219	0,4920	2,81	0,0077	0,4975
2,07	0,0468	0,4808	2,42	0,0213	0,4922	2,82	0,0075	0,4976
2,08	0,0459	0,4812	2,43	0,0208	0,4925	2,83	0,0073	0,4977
2,09	0,0449	0,4817	2,44	0,0203	0,4927	2,84	0,0071	0,4977
2,10	0,0440	0,4821	2,45	0,0198	0,4929	2,85	0,0069	0,4978
2,11	0,0431	0,4826	2,46	0,0194	0,4931	2,86	0,0067	0,4979
2,12	0,0422	0,4830	2,47	0,0189	0,4932	2,87	0,0065	0,4979
2,13	0,0413	0,4834	2,48	0,0184	0,4934	2,88	0,0063	0,4980
2,14	0,0404	0,4838	2,49	0,0180	0,4936	2,89	0,0061	0,4981
2,15	0,0396	0,4842	2,50	0,0175	0,4938	2,90	0,0060	0,4981
2,16	0,0387	0,4846	2,51	0,0171	0,4940	2,91	0,0058	0,4982
2,17	0,0379	0,4850	2,52	0,0167	0,4941	2,92	0,0056	0,4982
2,18	0,0371	0,4854	2,53	0,0163	0,4943	2,93	0,0055	0,4983
2,19	0,0363	0,4857	2,54	0,0158	0,4945	2,94	0,0053	0,4984
2,15	0,0396	0,4842	2,55	0,0154	0,4946	2,95	0,0051	0,4984
2,16	0,0387	0,4846	2,56	0,0151	0,4948	2,96	0,0050	0,4985
2,17	0,0379	0,4850	2,57	0,0147	0,4949	2,97	0,0048	0,4985
2,18	0,0371	0,4854	2,58	0,0143	0,4951	2,98	0,0047	0,4986
2,19	0,0363	0,4857	2,59	0,0139	0,4952	2,99	0,0046	0,4986
2,20	0,0355	0,4861	2,60	0,0136	0,4953	3,00	0,00443	0,49865
2,21	0,0347	0,4864	2,61	0,0132	0,4955	3,01	0,00430	0,49869
2,22	0,0339	0,4868	2,62	0,0129	0,4956	3,02	0,00417	0,49874
2,23	0,0332	0,4871	2,63	0,0126	0,4957	3,03	0,00405	0,49878
2,24	0,0325	0,4875	2,64	0,0122	0,4959	3,04	0,00393	0,49882
2,25	0,0317	0,4878	2,65	0,0119	0,4960	3,05	0,00381	0,49886
2,26	0,0310	0,4881	2,66	0,0116	0,4961	3,06	0,00370	0,49889
2,27	0,0303	0,4884	2,67	0,0113	0,4962	3,07	0,00358	0,49893
2,28	0,0297	0,4887	2,68	0,0110	0,4963	3,08	0,00348	0,49897
2,29	0,0290	0,4890	2,69	0,0107	0,4964	3,09	0,00337	0,49900
2,30	0,0283	0,4893	2,70	0,0104	0,4965	3,10	0,00327	0,49903
2,31	0,0277	0,4896	2,71	0,0101	0,4966	3,11	0,00317	0,49906
2,32	0,0270	0,4898	2,72	0,0099	0,4967	3,12	0,00307	0,49910
2,33	0,0264	0,4901	2,73	0,0096	0,4968	3,13	0,00298	0,49913
2,34	0,0258	0,4904	2,74	0,0093	0,4969	3,14	0,00288	0,49916
2,35	0,0252	0,4906	2,75	0,0091	0,4970	3,15	0,00279	0,49918
2,36	0,0246	0,4909	2,76	0,0088	0,4971	3,16	0,00271	0,49921
2,37	0,0241	0,4911	2,77	0,0086	0,4972	3,17	0,00262	0,49924
2,38	0,0235	0,4913	2,78	0,0084	0,4973	3,18	0,00254	0,49926
2,39	0,0229	0,4916	2,79	0,0081	0,4974	3,19	0,00246	0,49929

3,20	0,002384	0,499313	3,60	0,000612	0,499841	4,00	0,0001338	0,4999683
3,21	0,002309	0,499336	3,61	0,000590	0,499847	4,02	0,0001235	0,4999709
3,22	0,002236	0,499359	3,62	0,000569	0,499853	4,04	0,0001140	0,4999733
3,23	0,002165	0,499381	3,63	0,000549	0,499858	4,06	0,0001051	0,4999755
3,24	0,002096	0,499402	3,64	0,000529	0,499864	4,08	0,0000969	0,4999775
3,25	0,002029	0,499423	3,65	0,000510	0,499869	4,10	0,0000893	0,4999793
3,26	0,001964	0,499443	3,66	0,000492	0,499874	4,12	0,0000822	0,4999810
3,27	0,001901	0,499462	3,67	0,000474	0,499879	4,14	0,0000757	0,4999826
3,28	0,001840	0,499481	3,68	0,000457	0,499883	4,16	0,0000697	0,4999841
3,29	0,001780	0,499499	3,69	0,000441	0,499888	4,18	0,0000641	0,4999854
3,30	0,001723	0,499517	3,70	0,000425	0,499892	4,20	0,0000589	0,4999866
3,31	0,001667	0,499533	3,71	0,000409	0,499896	4,22	0,0000542	0,4999878
3,32	0,001612	0,499550	3,72	0,000394	0,499900	4,24	0,0000498	0,4999888
3,33	0,001560	0,499566	3,73	0,000380	0,499904	4,26	0,0000457	0,4999898
3,34	0,001508	0,499581	3,74	0,000366	0,499908	4,28	0,0000420	0,4999906
3,35	0,001459	0,499596	3,75	0,000353	0,499912	4,30	0,0000385	0,4999915
3,36	0,001411	0,499610	3,76	0,000340	0,499915	4,32	0,0000354	0,4999922
3,37	0,001364	0,499624	3,77	0,000327	0,499918	4,34	0,0000324	0,4999929
3,38	0,001319	0,499638	3,78	0,000315	0,499922	4,36	0,0000297	0,4999935
3,39	0,001275	0,499650	3,79	0,000303	0,499925	4,38	0,0000272	0,4999941
3,40	0,001232	0,499663	3,80	0,000292	0,499928	4,40	0,0000249	0,4999946
3,41	0,001191	0,499675	3,81	0,000281	0,499930	4,42	0,0000228	0,4999951
3,42	0,001151	0,499687	3,82	0,000271	0,499933	4,44	0,0000209	0,4999955
3,43	0,001112	0,499698	3,83	0,000260	0,499936	4,46	0,0000191	0,4999959
3,44	0,001075	0,499709	3,84	0,000251	0,499938	4,48	0,0000175	0,4999963
3,45	0,001038	0,499720	3,85	0,000241	0,499941	4,50	0,000016	0,4999966
3,46	0,001003	0,499730	3,86	0,000232	0,499943	4,55	0,000013	0,4999973
3,47	0,000969	0,499740	3,87	0,000223	0,499946	4,60	0,000010	0,4999980
3,48	0,000936	0,499749	3,88	0,000215	0,499948	4,65	0,000008	0,4999983
3,49	0,000904	0,499758	3,89	0,000207	0,499950	4,70	0,000006	0,4999987
3,50	0,000873	0,499767	3,90	0,000199	0,499952	4,75	0,000005	0,4999990
3,51	0,000843	0,499776	3,91	0,000191	0,499954	4,80	0,000004	0,4999992
3,52	0,000814	0,499784	3,92	0,000184	0,499956	4,85	0,000003	0,4999994
3,53	0,000785	0,499792	3,93	0,000177	0,499958	4,90	0,000002	0,4999995
3,54	0,000758	0,499800	3,94	0,000170	0,499959	4,95	0,000002	0,4999996
3,55	0,000732	0,499807	3,95	0,000163	0,499961			
3,56	0,000706	0,499815	3,96	0,000157	0,499963	5,00	0,000001	0,4999997
3,57	0,000681	0,499821	3,97	0,000151	0,499964			
3,58	0,000657	0,499828	3,98	0,000145	0,499966			
3,59	0,000634	0,499835	3,99	0,000139	0,499967			

Учебное издание

Швачич Геннадий Григорьевич
Соболенко Александр Викторович
Христян Елена Ивановна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Раздел 1. Теория вероятностей

Учебное пособие

Тем. план 2006, поз. 104

Подписано к печати 24.01.2006. Формат 60х84 1/16. Бумага типогр. Печать плоская. Уч.-изд. л. 4,59. Усл. печ. л. 4,52. Тираж 450 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины
49600, Днепропетровск-5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ