МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Г.Г. ШВАЧИЧ, Г.І. РИЖАНКОВА, В.П. БАРВІНОВ, М.О. КОЛОМОЄЦ

ДИСКРЕТНИЙ АНАЛІЗ

Розділи "Множини. Операції над множинами", "Відношення", "Елементи комбінаторики"

Затверджено на засіданні Вченої ради академії як навчальний посібник

Дніпропетровськ НМетАУ 2007

УДК 519.854(07)

Швачич Г.Г., Рижанкова Г.І., В.П. Барвінок В.П., Коломоєц М.О. Дискретний аналіз. Учбовий посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2007. – 29 с.

Викладені важливі розділи дисципліни "Дискретний аналіз", що складають невід‘ємну частину сучасної освіти і вживаються в інженерії, програмуванні, в постановці та вирішенні економічних задач.

Призначений для студентів спеціальності 050.102 – "Економічна кібернетика", але може використовуватися студентами інших спеціальностей.

Іл. 9 Бібліогр.: 5 найм.

Відповідальний за випуск Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенти: І.М. Пістунов, д-р тенх. наук, доцент (НГУ)
Н.К. Васильєва, канд. фіз.-мат. наук, доцент (ДГАУ)

1. МНОЖИНИ. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ. ПОРІВНЯННЯ МНОЖИН

1.1. Множина. Підмножина. Рівність множин. Операції над множинами

Множина – одне з основних понять математики. *Під множиною розуміють сукупність об'єктів, яка розглядається як одне ціле.* Можна, наприклад, говорити про множину натуральних чисел, про множину коренів даного рівняння, про множину робітників даної фабрики, тощо. Об'єкти, що становлять множину, називаються елементами множини. Висловлювання "Об'єкт *a* є елементом множини A", так само, як і висловлювання "Об'єкт *a* належить до множини A," записують символом $a \in A$. Якщо елемент *a* не належить до множини A, то пишуть $a \notin A$. Символ $\in$ називається знаком приналежності.

Множина, число елементів якої скінчене, називається скінченою множиною, інакше множина є нескінченою. Задати множину – значить визначити його елементи. Скінчену множину можна задати, перерахувавши її елементи, наприклад, A = { 9, 44, 3 }(множина A складається з чисел 9, 44 і 3). Множина, що містить n елементів, називається n-множиною.

Ейлер запропонував зобразити множину у вигляді плоскої фігури, точка якої символізує елемент множини. Приклад наведений на рис. 1.

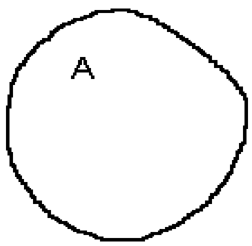


Рис. 1

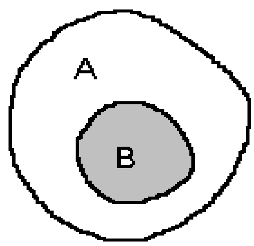


Рис. 2

якої

Підмножина. Множина B називається підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A. Якщо множина B є підмножиною множини A, то пишуть $B \subset A$

Символ $\subset$ називається знаком включення. Підмножина множини A зображена на рис. 2.

Відношення включення має такі властивості:

- відношення включення рефлексивне, тобто для кожної множини A має місце включення $A \subset A$;
- відношення включення антисиметричне, тобто якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$;
- відношення включення транзитивне, тобто для будь-яких множин A, B і C із умов $A \subset B$ і $B \subset C$ витікає $A \subset C$.

Множина всіх підмножин множини A називається булеаном A і позначається B(A).

Порожня і універсальна множина. Серед всіх множин виділяють універсальну множину U і порожню множину $\varnothing$.

Універсальна множина (від латинського universum – "все, що існує") – це така множина, що містить як підмножину будь-яку множину, тобто для будь-якої множини A має місце включення $A \subset U$.

Порожня множина $\varnothing$ – це множина, що не містить жодного елементу. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини, тобто для будь-якої множини A має місце включення $\varnothing \subset A$.

Універсальну множину прийнято зображати прямокутником, всередині якої зображають множини універсальної множини. Фігура, що зображена на рис. 3, називається діаграмою Ейлера-Венна.

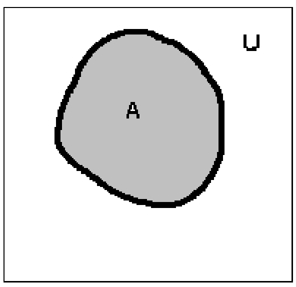


Рис.3

Рівність множин. Множини A і B рівні, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто коли кожний елемент множини A є елементом множини B і, навпаки, кожний елемент множини B є елементом множини A. Рівність $A = B$ рівнозначна виконанню двох включень $A \subset B$ і $B \subset A$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}. \qquad (1.1)$$

Відношення рівності для множин, як і відношення рівності для чисел, має властивості рефлективності, симетричності і транзитивності.

1. A = A (рефлективність);
2. якщо A = B, то B = A (симетричність);
3. якщо A = B і B = C, то A=C (транзитивність).

Операції над множинами. Розглянемо операції над множинами, які дозволяють одержувати з однієї або двох множин нові множини.

Об'єднанням множин A і B називається множина $A \cup B$, що складається з тих елементів універсальної множини, які належать хоча б одній з множин A або B. Наприклад, якщо A = {1,3,5} і B = {1,2,3,4}, то $A \cup B$= {1,2,3,4,5}.

З визначення об'єднання виходить, що для будь-яких множин A і B справедливі ствердження:

$$1.\ x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right. \qquad (1.2)$$

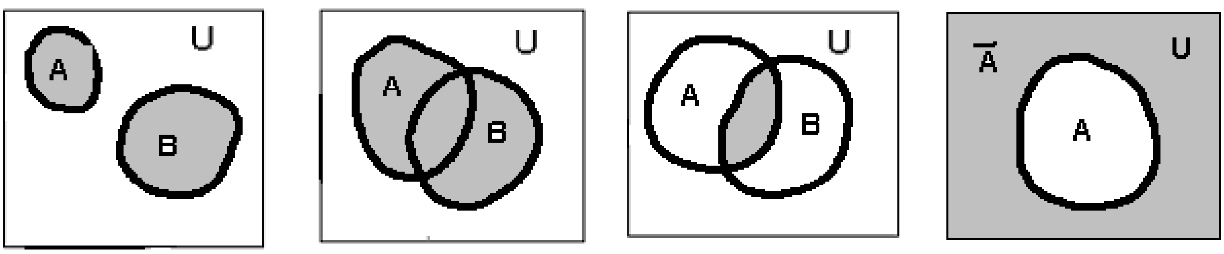
(x належить об'єднанню множин A і B тоді і тільки тоді, коли або $x \in A$ або $x \in B$);

$$2.\ x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \qquad (1.3)$$

(якщо $x \in A$, то $x \in A \cup B$).

Об'єднання множин $A \cup B$ зображено на рис. 4 а, б.

Перетином множин A і B називається множина $A \cap B$, що складається з тих елементів універсальної множини, які належать обом множинам A і B. Наприклад, якщо A = {1,3,5} і B = {1,2,3,4}, то $A \cap B$ = ={1,3}.



а б в г

Рис. 4

З визначення перетину випливають наступні ствердження:

1) $x\in A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\in B \end{cases}$ (1.4)

(x належить перетину тоді і тільки тоді, коли x належить A і x належить B);

2) $x\in A\cap B \Rightarrow x\in A$ (1.5)

(якщо x належить перетину $A\cap B$, то x належить A).

Перетин множин A і B зображено на рис. 4 в.

Доповненням множини A називається сукупність тих елементів універсальної множини, які не належать до множини A.

Доповнення множини A зображено на рис. 4 г.

Якщо U = {1,2,3,4,5} і A = {2, 4}, то A' ={1, 3, 5}.

З визначення доповнення витікає ствердження

$x\in A' \Leftrightarrow x\notin A$

(x належить доповненню A' тоді і тільки тоді, коли x не належить A).

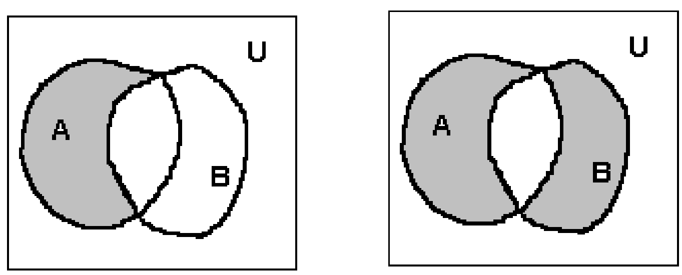
Різницею A\B множин A і B називається сукупність тих елементів A, які не належать до B.

Якщо A ={1, 3, 5} і B ={1, 2, 3, 4}, то A\B ={5} і B\A ={2, 4}.

З визначення різниці A\B слідує

1) $x\in A\setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\in B' \end{cases} \Leftrightarrow x\in A\cap B'$; (1.6)

2) $A\setminus B = A\cap B'$. (1.7)



а) б)

Рис. 5

Різниця A\B зображена на рис 5 а.

Симетричною різницею множин A і B називається сукупність елементів універсуму, які належать тільки одній множині – A або B. Наприклад, симетричною різницею множин A ={1, 3, 5} і B ={1, 2, 3, 4} є множина A∇B ={2, 4, 5}.

З визначення симетричної різниці виходить

$A\nabla B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A),$ (1.8)

$A\nabla B = (A\cap B')\cup (A'\cap B)$ (1.9)

Симетрична різниця множин A і B зображена на рис. 5 б).

Приклад. Довести рівність $B\cap(A\backslash B) = \varnothing$

Пригадаємо рівнозначність (1.1), що визначає умови (необхідне і достатнє) рівності множин. Для доказу першої рівності слід довести два включення: $B\cap(A\backslash B) \subset \varnothing$ і $\varnothing \subset B\cap(A\backslash B)$.

Останнє включення виходить з визначення порожньої множини. Доведемо перше включення. Нехай x – елемент множини $B\cap(A\backslash B)$. Покажемо, що x є елементом множини $\varnothing$, тобто що множина $B\cap(A\backslash B)$ є підмножиною порожньої множини. Користуючись рівнозначностями (1.4), (1.6) і (1.5), одержимо

$$x\in B\cap(A\backslash B)\Rightarrow\begin{cases} x\in B \\ x\in A\backslash B\Rightarrow\begin{cases} x\in A \\ x\in B'\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\in B \\ x\in A \\ x\in B'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\in B \\ x\in B'\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing.$$

Приклад. Довести твердження: якщо множина B є підмножиною множини A, то множини $(A\backslash B)\cup B$ і A рівні: $B\subset A \Rightarrow (A\backslash B)\cup B = A$.

У припущенні $B\subset A$ доведемо рівність

$(A\backslash B)\cup B = A.$ (*)

Відповідно до (1.1) рівність (*) означає справедливість двох включень $(A\backslash B)\cup B \subset A$ і $A\subset (A\backslash B)\cup B$. Докажемо перше включення. Нехай x – елемент множини $(A\backslash B)\cup B$. Тоді

$$x\in (A\backslash B)\cup B \Rightarrow\left[\begin{array}{l} x\in A\backslash B\Rightarrow x\in A \\ x\in B\Rightarrow x\in A\end{array}\right.\Rightarrow x\in A.$$

Доведемо включення $A\subset (A\backslash B)\cup B$. Нехай x – довільний елемент множини A. Користуючись (1.5) і (1.3), одержимо

$$x \in A \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup B \\ \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A \setminus B \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup B. \end{array} \right.$$

Рівність множин доведена.

Вправи

1. Укажіть 3 трьохелементні підмножини множини A = {a, b, c, d, e}.

2. Укажіть булеан множини A = {1, 2, 3, 4}.

3. Доведіть наступні рівності:

а) $A \setminus B = A \cap B'$;

б) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

в) $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$;

г) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

д) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

е) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4. Доведіть твердження

а) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$;

б) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$;

в) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow (A \cup B) \setminus B = A$;

г) $A \subset B \Rightarrow A \setminus C \subset B \setminus C$;

д) $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$;

е) $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$;

ж) $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$;

з) $C = A \setminus B \Rightarrow B \cap C = \varnothing$;

і) $\begin{cases} B \subset A \\ C = A \setminus B \end{cases} \Rightarrow A = B \cup C$;

к) $A \subset C \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

5. Побудуйте множину D на діаграмі Ейлера-Венна

а) $D = (A \cap B) \cap C$;

б) $D = (A \cup B) \cap C$;

в) $D = A \cap B \cap C'$;

г) $D = A \setminus (B \cap C)$;

д) $D = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$;

е) $D = (A \cup B') \setminus C$;

ж) $D = A' \setminus (B \cup C')$;

з) $D = A \cap (B' \triangledown C)$;

і) $D = (A \cap C) \triangledown B'$;

к) $D = (A \triangledown B) \setminus (C' \cap B)$.

1.2. Властивості операцій над множинами.

Булева алгебра множин

Відзначимо основні властивості введених операцій. Для будь-яких множин

A, B і C справедливі рівності:

1. Комутативний закон

1а. $A \cup B = B \cup A$ 1б. $A \cap B = B \cap A$

2. Асоціативний закон

2а. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ 2б. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$

3. Дистрибутивний закон

3а. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 3б. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Закон ідемпотентності

4а. $A \cup A = A$ 4б. $A \cap A = A$

5. Властивості доповнення

5а. $A \cup A' = U$ 5б. $A \cap A' = \varnothing$

6-8. Дії з константами

6а. $A \cup U = U$ 6б. $A \cap \varnothing = \varnothing$

7а. $A \cup \varnothing = A$ 7б. $A \cap U = A$

8а. $U' = \varnothing$ 8б. $\varnothing' = U$

9. Закон поглинання

9а. $A \cup (A \cap B) = A$ 9б. $A \cap (A \cup B) = A$

10. Закон де Моргана (подвійності)

10а. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ 10б. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

11. Закон інфолюції (подвійного заперечення)

$(A')' = A$

Визначення. Множина M, на якій введені дві двомісні операції ($\cup$ і $\cap$) і одна одномісна ('), в якій виділені два елементи 0 і 1 ($\varnothing$ і U), причому для операцій і елементів виконується рівності 1а – 11, називається *булевою алгеброю*.

Оскільки елементами множини, на якому введені операції $\cup$, $\cap$, ' (об'єднання, перетину і доповнення) є множини, то рівності 1а – 11 складають закони булевої алгебри множин.

Закони булевої алгебри дозволяють спростити задачу побудови множини на діаграмі Ейлера-Венна і доведення рівності множин.

Доведемо, наприклад, рівність $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$.

$B \cap (A \setminus B) = B \cap (A \cap B') = B \cap (B' \cap A) = (B \cap B') \cap A = \varnothing \cap A = \varnothing$.

Закони булевої алгебри можна використовувати при побудові множини на діаграмі, щоб перетворити його уявлення до вигляду "об'єднання перетинів". Як приклад, перетворимо до вигляду "об'єднання перетинів" множину $D = (A \triangledown B)\backslash(C \cup B')$:

$D = (A \triangledown B)\backslash(C \cup B') = ((A \cap B') \cup (A' \cap B))\backslash(C \cup B') = ((A \cap B') \cup (A' \cap B)) \cap (C \cup B')' = = ((A \cap B') \cup (A' \cap B)) \cap (C' \cap (B')') = ((A \cap B') \cup (A' \cap B)) \cap (C' \cap B) = (A \cap B' \cap C' \cap B) \cup \cup (A' \cap B \cap C' \cap B) = (A \cap C' \cap (B \cap B')) \cup (A' \cap C' \cap (B \cap B)) = (A \cap C' \cap \varnothing) \cup (A' \cap C' \cap B) = = \varnothing \cup (A' \cap C' \cap B) = A' \cap B \cap C'$.

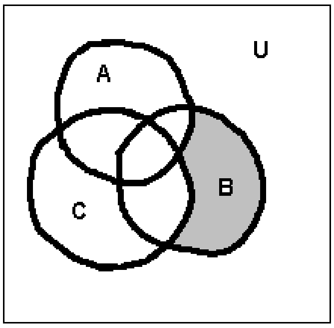


Рис. 6

Множина D зображена на рис. 6.

Вправи

1. Доведіть рівності, користуючись законами булевої алгебри

а) $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$;

б) $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C')$;

в) $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B)\backslash C$;

г) $A \triangledown B = B \triangledown A$;

д) $(A \triangledown B) \triangledown 3 = A \triangledown (B \triangledown C)$;

е) $A \cap (B \triangledown C) = (A \cap B) \triangledown (A \cap C)$;

ж) $A \triangledown (A \triangledown B) = B$;

з) $A \triangledown (A \cap B) = A\backslash B$.

2. Доведіть твердження

а) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$;

б) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} A = \varnothing \\ B = \varnothing \end{cases}$;

в) $A\backslash B = A \Leftrightarrow B\backslash A = B$;

г) $A \cup B = A\backslash B \Leftrightarrow B = \varnothing$;

д) $A\backslash B = A \cup B \Leftrightarrow A = \varnothing$;

е) $B = A' \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = U \\ A \cap B = \varnothing \end{cases}$.

3.Побудуйте множину на діаграмі Ейлера-Венна

а) $D = A\backslash(B\triangledown C)$; в) $D = (A\backslash C)\triangledown B'$;

б) $D = (A\cup C)\triangledown(B\cup C)$; г) $D = (A\triangledown B)\backslash(C'\backslash B)$.

1.3 Декартовий добуток множин

<u>Визначення.</u> Нехай $A = \{a_1, a_2,...,a_n\}$ і $B = \{b_1, b_2,\ldots,b_m\}$ – задані множини.

Декартовим добутком $A\times B$ множин A і B називається сукупність упорядкованих пар елементів, причому, перший елемент пари належить до множини A, а другий елемент – до множини B.

$$A\times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A, b_j \in B\}.$$

Нехай $A = \{1, 2, -3)$; $B = \{1, 2\}$

$$A\times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (-3, 1), (-3, 2)\}.$$

Аналогічно визначається декартовий добуток множин $X_1, X_2,\ldots,X_k$:

$$X_1\times X_2\times\ldots\times X_k = \{(x_1, x_2,\ldots,x_k) \mid x_1\in X_1, x_2\in X_2,\ldots,x_k\in X_k\}.$$

Якщо Z – множина дійсних чисел (множина точок числової прямої), то $Z\times Z = Z^2$ – множина впорядкованих пар чисел (множина точок декартової площини), а $Z\times Z\times Z = Z^3$ – множина впорядкованих трійок чисел (множина точок декартового простору).

<u>Задача.</u> Задана множина $E = \{0,1\}$ – одновимірний одиничний куб. Визначте і побудуйте множину $E^2 = E\times E$ – двовимірний одиничний куб і множину $E^3 = E\times E\times E$ – тривимірний одиничний куб.

1.4. Еквівалентність множин. Поняття потужності множини

Множини можна порівнювати між собою по числу елементів. Зробити це можна по-різному. По-перше, можна перелічити елементи в кожній множині і порівняти одержані числа. Можна поступити інакше, пробуючи встановити взаємно однозначну відповідність між елементами множин. Щоб перевірити, чи однакове число студентів і стільців в аудиторії, можна посадити студентів на стільці. Якщо кожен студент зайняв стілець і при цьому зайвих стільців не виявилося, тобто між студентами і стільцями встановлена взаємно однозначна відповідність, то це означатиме, що число студентів і число стільців однакове.

Визначення. Дві множини A і B називаються *еквівалентними* (A ~ B), якщо між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Розглянемо нескінченні множини A= {1,2,3,…,n…} і B = {2, 4,8,…,2n,…}. Визначивши відповідність між елементами множин таким чином $1\leftrightarrow2$, $2\leftrightarrow4$, $3\leftrightarrow8$, ..., $n\leftrightarrow2n$, ..., встановимо еквівалентність множин A і B.

Будь-які дві n-елементні множини є еквівалентними. Встановлення взаємно однозначної відповідності між їхніми елементами достатньо просто.

Метод взаємно однозначної відповідності дозволяє порівнювати по числу елементів і нескінченні множини.

Простою нескінченною множиною є множина натуральних чисел. Множина, що еквівалентна множині натуральних чисел, називається зліченною. Прикладами зліченних множин є множина раціональних чисел, множина матриць, множина поліномів, тощо.

Оскільки всяка нескінчена множина містить зліченну множину як підмножину, та зліченна множина є "найменшою" серед нескінчених множин. Чи існують нескінчені множини більш "населені" елементами ніж зліченні множини? Відповідь на це питання дає теорема 1.

Теорема 1. Множина дійсних чисел, укладених між нулем і одиницею, незліченна.

Отже, відрізок [0, 1] дає приклад незліченної нескінченої множини. Наведемо приклади множин, еквівалентних відрізку [0, 1].

1. Множина точок відрізка [a, b] або інтервалу (a, b).

На рис. 7 показано, як можна встановити взаємно однозначну відповідність між точками відрізка [a, b] і відрізка [0, 1].

2. Множина точок декартової площини.

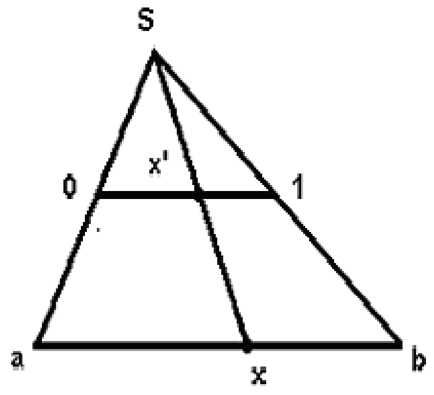


Рис 7

3. Множина точок декартового простору.

4. Множина всіх безперервних функцій одного або декількох змінних.

Визначення. Еквівалентні множини мають однакову *потужність*. Потужність множини – це властивість, що характеризує "наповнення" множини елементами. Потужність кінцевої множини – це число елементів множини.

Потужність множини натуральних чисел позначається символом $\aleph_0$ (алеф-нуль), а потужність множини чисел відрізка [0, 1] називається континуум і позначається символом X.

Чи існують множини, що мають більшу потужність, ніж континуум? На це питання відповідає теорема 2.

Теорема 2.

Нехай A – довільна множина і B(A) – булеан A. Булеан B(A) має потужність більшу, ніж сама множина A.

Отже, встановлено, що "найменшою" нескінченою множиною є злічення множина. "Найбільшої" нескінченої множини за ствердженням теореми 2 не існує. Питання про існування множини проміжної потужності є складною математичною задачею. Такою, зокрема, є континуум-проблема: чи існують незліченні потужності, менші континуум? Виявляється, що ні позитивна, ні негативна відповідь на це питання не суперечить аксіоматиці теорії множин.

2. ВІДНОШЕННЯ

Визначення. Нехай $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ і $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ – задані множини. На множинах A і B визначено *бінарне відношення*, якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність деяку підмножину множини B. Відношення можна задати

- безпосередньою відповідністю;
- за допомогою графа;

- завданням впорядкованих пар (a, b), зв'язаних відношенням. В цьому випадку відношення R задається як підмножина декартового добутку множин A і B $(R \subset A \times B)$.

Задамо на множинах $A = (a_1, a_2, a_3)$ і $B = (b_1, b_2,)$ відношення R:

$$a_1 \rightarrow \{b_1, b_2\}$$
$$a_2 \rightarrow \{b_1\}$$
$$a_3 \rightarrow \{b_2\}$$

і відобразимо його двома способами – за допомогою графа (рис. 8) і множиною $R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_2)\}$ – підмножиною декартового добутку $A \times B$.

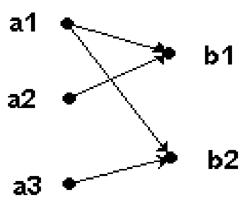


Рис. 8

Якщо R – бінарне відношення і $(x,y) \in R$, то кажуть, що елементи x і y зв'язані відношенням R. Замість запису $(x,y) \in R$ можна писати xRy.

Визначення. Якщо $R \subset A \times A$, то кажуть, що R є бінарне відношення на A.

Нехай R – бінарне відношення на A. Сукупність елементів $x \in A$, таких, що $(x,y) \in R$ називається областю визначення відношення і позначається DomR. Сукупність елементів y таких, що $(x,y) \in R$, називається областю значень відношення і позначається ImR.

Завдання бінарного відношення матрицею. Якщо A – кінцева n-множина, то бінарне відношення R на A може бути задано булевою матрицею $R = \{r_{i\,j}\}$ i,j = =1,2,3,…,n. R – квадратна матриця n-го порядку, елементи r_{ij} якої визначаються рівністю

$$r_{i\,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, y_j) \in R \\ 0, & \text{если } (x_i, y_j) \notin R \end{cases} .$$

Визначення. Відношення R1 і R2 рівні (R1 = R2), якщо множини R1 і R2 співпадають в теоретико-множинному значенні.

Булеві матриці рівних відношень рівні.

2.1. Операції над відношеннями

Визначення відношення як підмножини декартового добутку ($A\times B$ або $A\times A$) дозволяє здійснювати теоретико-множинні операції над відношеннями так само, як і над будь-якими множинами. При цьому множина $A\times B$ ($A\times A$) відіграє роль універсальної множини.

Нехай R1, R2, і R – бінарні відношення на A. Визначимо операції над відношеннями.

<u>Інверсія</u>. Відношення R* називається інверсією відношення R, якщо з умови $(x, y)\in R$ випливає $(y, x)\in R^*$.

Булеву матрицю відношення R* одержимо з матриці R симетрією відносно діагоналі ($r_{i\,j}^{*}= r_{j\,i}$).

<u>Об'єднання відношень</u>. Відношення R називається об'єднанням відношень R1 і R2

$$R = R1\cup R2,$$

якщо $(x, y) \in R$ при виконанні хоча б однієї з умов $(x, y)\in R1$ або $(x, y)\in R2$.

Поясніть правила побудови матриці відношення $R = R1\cup R2$.

<u>Перетин відношень</u>. Відношення R називається перетином відношень R1 і R2

$$R = R1\cap R2,$$

якщо $(x, y)\in R$ при виконанні обох умов $(x, y)\in R1$ і $(x, y)\in R2$.

Поясніть правила побудови матриці відношення $R = R1\cap R2$.

<u>Композиція відношень</u>. Відношення R називається композицією відношень R1 і R2

$$R = R1\circ R2 \quad (R = R1\cdot R2\ ),$$

якщо пара $(x, y)\in R$ за умови, що існує $z\in A$, такий, що $(x, z)\in R1$ і $(z, y)\in R2$.

Наприклад, $A =\{1, 2, 3, 4\}$ і нехай R1 і R2 – взаємно однозначні відношення на A, звані підстановками:

$$R1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{Bmatrix}; \quad R2 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{Bmatrix}.$$

Визначимо композицію відношень R1 і R2 ($R = R1^\circ R2$):

$$(1,3)\in R1, \quad (3,4)\in R2 \quad \Rightarrow (1,4)\in R$$

$$(2,4)\in R1, \quad (4,2)\in R2 \quad \Rightarrow (2,2)\in R$$

$$(3,2)\in R1, \quad (2,3)\in R2 \quad \Rightarrow (3,3)\in R$$

$$(4,1)\in R1, \quad (1,1)\in R2 \quad \Rightarrow (4,1)\in R.$$

Отже, $R = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{Bmatrix}.$

2.2. Види бінарних відношень

По деяких важливих властивостях бінарні відношення діляться на види.

Визначення. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо будь-який $x\in A$, знаходиться у відношенні R із самим собою, тобто xRx або $(x, x)\in R$.

Приклади рефлексивних відношень:

- відношення знайомства, визначене на множині людей;
- відношення подільності, визначене на множині натуральних чисел;
- відношення включення на множині U.

Визначення. Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо кожен $x\in A$ не знаходиться у відношенні R із самим собою, тобто $(x, x)\notin R$.

Прикладами антирефлексивних відношень є: відношення "<" (менше) на множині чисел, відношення перпендикулярності на множині прямих, відношення "бути батьком" на множині людей.

Визначення. Бінарне відношення R, на множині A називається *симетричним*, якщо із умови xRy ($(x, y)\in R$) витікає yRx ($(y, x)\in R$).

Приклади симетричних відношень:

- відношення паралельності на множині прямих;
- відношення рівності на множині чисел;

- відношення "бути братом" на множині людей.

Визначення. Бінарне відношення R на множині A є *антисиметричним*, якщо для будь-яких x, y $\in$ A з умов xRy і yRx виходить x = y.

Прикладами антисиметричних відношень є відношення "$\leq$" (менше або рівно) на множині чисел, відношення включення ($\subset$) на універсальній множині U.

Якщо R – антисиметричне відношення, то переставляти елементи в парі (x, y), що входить до відношення, можна лише у разі коли x = y.

Визначення. Бінарне відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо для будь-яких x, y, z $\in$ A із умов xRy і yRz виходить xRz (з умов (x, y)$\in$ R і (y, z)$\in$ R витікає, що (x, z)$\in$ R).

Приклади транзитивних відношень:

- відношення паралельності на множині прямих;
- відношення рівності на множині чисел;
- відношення спорідненості на множині людей.

Важливим видом бінарного відношення є відношення еквівалентності.

Визначення. Бінарне відношення R на множині A називається відношенням *еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Відношення еквівалентності позначають символами $\sim$, $\approx$ або $\equiv$. Прикладами відношень еквівалентності є відношення рівності на множині чисел, відношення паралельності на множині прямих, відношення подібності на множині трикутників, відношення спорідненості на множині людей. Встановимо важливу властивість відношення еквівалентності.

Визначення. Нехай R – відношення еквівалентності на множині A і x$\in$ A. Класом *еквівалентності*, породженим елементом x, називається множина x/R тих елементів множини A, які знаходяться у відношенні R, з елементом x:

$$x/R = \{y \mid y \in A \text{ і } yRx\}.$$

Якщо R є відношення паралельності, то клас еквівалентності є сукупність паралельних прямих. Якщо R є відношення спорідненості на множині людей, то клас еквівалентності є сукупність родичів або рід.

Визначення. Нехай A – непорожня множина і R – відношення еквівалентності на А. Сукупність всіх класів еквівалентності по відношенню R називається фактор-множиною А по відношенню R (позначається A/R) : $A/R = \bigcup_{x\in A} x/R$.

<u>Визначення</u>. *Розбиттям множини* А називається сімейство $\{A_i\}$ його підмножин таких, що кожний елемент $x\in A$ належить тільки одній множині сімейства.

Інакше, сукупність підмножин $\{A_i\}$ є розбиттям множини А, якщо для будь-яких к та j $(к \neq j)$ $A_к \cap A_j = \varnothing$ і $\bigcup_i A_i = A$

<u>Теорема</u>**.**

Нехай R – відношення еквівалентності на множині А. Фактор-множина A\R є розбиттям множини А.

<u>Доказ</u>. Нехай $a\in A$, $b\in A$, і a/R, b/R – класи еквівалентності, які визначені елементами a і b. Вважатимемо, що $a/R \neq b/R$, оскільки на основі ідемпотентності множини, співпадаючі з a/R, з об'єднання $\bigcup_{x\in A} x/R$ можна видалити. Покажемо, що

1. класи еквівалентності a/R і b/R не мають загальних елементів:

$$a/R \cap b/R = \varnothing;$$

2. об'єднання всіх класів еквівалентності дає множину А:

$$\bigcup_{a\in A} a/R = A .$$

Доведемо другу рівність. Включення $\bigcup_{a\in A} a/R \subset A$ виходить з того, що кожний клас a/R є підмножиною A, а об'єднання підмножин А також є підмножиною А.

Включення $A \subset \bigcup_{a\in A} a/R$ виходить з того, що кожний елемент множини А належить класу еквівалентності, який породжує сам, тому належить об'єднанню цього класу з будь-якими іншими множинами. Справедливість включень $\bigcup_{a\in A} a/R \subset A$ і $A \subset \bigcup_{a\in A} a/R$ означає рівність $\bigcup_{a\in A} a/R = A$.

Доведемо рівність $a/R \cap b/R = \varnothing$. Включення $\varnothing \subset a/R \cap b/R$ виходить з визначення порожньої множини: воно є підмножиною будь-якої множини. Доведемо включення $a/R \cap b/R \subset \varnothing$. Припустимо, що $a/R \cap b/R$ не є порожнім і

$x \in a/R \cap b/R$. Використовуючи симетричність і транзитивність відношення R, одержимо ланцюжок проходжень: $x \in a/R \cap b/R \Rightarrow xRa, xRb \Rightarrow aRx, xRв \Rightarrow aRb$.

Останнє відношення означає, елементи a і b зв'язані відношенням R, вони належать одному класу еквівалентності та їхні класи еквівалентності a/R і b/R співпадають, що суперечить умові. Тому $x \notin a/R \cap b/R$ і $a/R \cap b/R = \varnothing$.

Теорема доведена.

Властивість визначати розбиття множини є найважливішою властивістю відношення еквівалентності. Іншим найважливішим видом відношень є відношення порядку.

Визначення. *Частковим порядком* (або відношенням часткового порядку) на множині A називається бінарне відношення R, що має властивості рефлексії, транзитивності і антисиметрії.

Частковий порядок позначається символом "≤" . Якщо на множині A заданий частковий порядок, то множина A називається частково впорядкованим. Відношення включення ($\subset$), задане на булеані B(A) визначає частковий порядок на A.

Визначення. Якщо будь-які два елементи множини A порівнянні по відношенню R, то кажуть, що R є лінійним відношенням порядку, а множина A – лінійно впорядкована.

Відношення "≤", задане на множині натуральних чисел N, є відношенням лінійного порядку і робить множину N лінійно впорядкованою.

Нехай на множині A заданий лінійний порядок R. Відношення R індукує на декартовому ступені A^n множини A наступне відношення порядку R^n. Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A^n$. Тоді xR^ny, якщо для якнайменшого індексу i з властивістю $x_i \neq y_i$ має місце відношення x_iRy_i.

Такий порядок R^n називається лексикографічним, оскільки використовується для розташування слів в словниках.

Вправи.

У задачах прийняті позначення: N – множина натуральних чисел, Z– множина дійсних чисел.

1. Зобразіть графічно наведені відношення і перевірте, чи мають вони властивості рефлексії, симетричності і транзитивності

а) $R = \{ (x, y) \mid x, y \in Z,\ x+y \le 1 \}$;

б) $R = \{ (x, y) \mid x, y \in Z,\ x^2 = y^2 \}$;

в) $R = \{ (x, y) \mid x, y \in N,\ x < y \}$;

г) $R = \{ (x, y) \mid x, y \in Z,\ x \ne y \}$;

д) $R = \{ (x, y) \mid x, y \in Z,\ x^2 + y^2 = 1 \}$;

е) $R = \{ (x, y) \mid x, y \in Z,\ |x| = |y| \}$.

2. Наведіть приклади бінарних відношень:
   а) транзитивних і симетричних, але не рефлексивних;
   б) рефлексивних і транзитивних, але не антисиметричних;
   в) рефлексивних і транзитивних, але не симетричних;
   г) рефлексивних і симетричних, але не транзитивних.

3. Доведіть, що антирефлексивне транзитивне бінарне відношення є антисиметричним.

4. Знайдіть можливі фактор-множини множини {1, 2, 3}. *Підказка:* визначте всі можливі розбиття А. Кожному з них відповідає відношення еквівалентності.

5. Покажіть, що множина {1, 2, 3, 4} має 15 різних фактор-множин.

6. Доведіть, що тотожне відображення I(A) множини A є відношення порядку.

7. Наведіть приклад симетричного відношення. Визначте матрицю відношення. Які властивості має матриця відношення?

8. Побудуйте матрицю відношення "бути дільником" на множині A = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 24}.

9. Нехай M – множина всіх людей. Відношення R1 ставить у відповідність кожній людині його матір, а R2 – його батька. Знайдіть R1°R2 і R2°R1. Чи співпадають ці відношення?

10. Нехай $R1 = \{(x, y) \mid x, y \in Z, y = 3x\}$ і $R2 = \{(x, y) \mid x, y \in Z, y = x–2\}$. Знайдіть R1°R2 і R2°R1. Чи співпадають ці відношення?

11. Перелічіть в лексикографічному порядку вершини тривимірного куба E^3 ($E = \{0,1\}$).

3. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

3.1. Число елементів декартового добутку множин

Для підрахунку числа можливих відношень $R \subset A \times B$ і для інших цілей потрібно знати число елементів декартового добутку множин. Нехай A і B – множини, числа елементів яких відповідно N(A) і N(B). Знайдемо число елементів декартового добутку $A \times B$.

Нехай $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Зобразимо елементи множини A точками осі Ox, а елементи множини B – точками осі Oy (див. рис. 9). Тоді точка (x_i, y_j) $(i = 1, 2,\ldots, n;\ j = 1, 2,\ldots, m)$ зображає елемент декартового добутку $A \times B$. Дивлячись на малюнок, легко підрахувати число таких точок

$$N(A \times B) = N(A) \cdot N(B) \qquad (3.1)$$

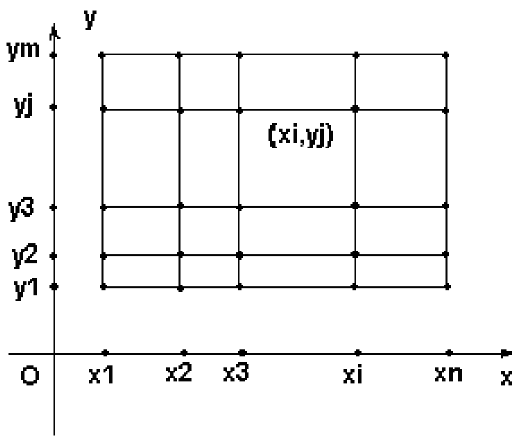


Рис. 9

Для числа елементів декартового добутку r множин справедлива формула, аналогічна (3.1)

$$N(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r) = N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot \ldots \cdot N(A_r), \qquad (3.2)$$

тобто число елементів декартового добутку дорівнює добутку чисел елементів означених множин.

3.2. Впорядковані і невпорядковані з'єднання. Число розміщень

Комбінаторика – розділ математики, в якому вивчаються способи підрахунку числа елементів різних множин. Поява могутніх обчислювальних машин збільшила можливості комбінаторики і розширила сферу її застосування. Комбінаторними методами користуються в теорії ймовірності, статистиці, економіці, теорії ігор і багатьох інших областях науки і техніки.

Основним елементом комбінаторики є з'єднання (вибірка) елементів з даної сукупності. З'єднання можуть бути впорядкованими і неврегульованими. Впорядковані з'єднання називають *розміщеннями*, а невпорядковані – *поєднаннями*.

Два розміщення різні, якщо вони розрізняються або наборами елементів в з'єднаннях, або їх порядком в наборах. Впорядковані з'єднання беруть в круглі дужки.

Два поєднання різні, якщо вони розрізняються наборами елементів. Невпорядковані з'єднання беруть у фігурні дужки.

Складемо з'єднання по 2 елементи з сукупності {a, b, c}.

Поєднання	{a, b}		{a, c}		{b, c}	
Розміщення	(a, b)	(b, a)	(a, c)	(c, a)	(b, c)	(c, b)

Число розміщень. Визначимо той факт, що розміщення по r елементів є елементом декартового добутку r множин. Тому для підрахунку N_r числа розміщень по r (елементів) скористаємося рівністю (3.2), яку надамо у новому вигляді

$$N_r = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r , \tag{3.3}$$

де

n_1 – число елементів множини, з якого вибирається перший елемент з'єднання;

n_2 – число елементів множини, з якого вибирається другий елемент з'єднання;

n_r – число елементів множини, з якого вибирається r елемент з'єднання.

Розміщення, в яких немає однакових символів, називаються розміщеннями без повторень. Число розміщень без повторень по r із n-елементної множини позначається символом A_n^r. Справедлива формула

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(r-1)) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) \qquad (3.4)$$

<u>Задача 1.</u>

Скількома способами 3 пасажири можуть увійти до електропоїзда, що налічує 5 вагонів?

<u>Рішення.</u>

1. Зафіксуємо розподіл пасажирів по вагонах за допомогою з'єднання. Наприклад, з'єднання 1, 1, 4 означає, що перший пасажир увійшов до першого вагону, другий пасажир також вибрав перший вагон, а третій пасажир увійшов до четвертого вагону.

2. Щоб встановити тип з'єднання, поміняємо місцями різні його елементи (другий і третій). Одержимо з'єднання 1, 4, 1, якому відповідає інший розподіл пасажирів по вагонах. Тобто, міняючи місцями елементи одного і того ж з'єднання, одержуємо різні з'єднання і, внаслідок, різні розподіли пасажирів по вагонах.

Укладаємо: розподіл пасажирів по вагонах фіксується за допомогою впорядкованих з'єднань, тобто розміщень.

3. Позначимо число розміщень пасажирів по вагонах через N. Для підрахунку N використовуємо формулу (3.3): $N = N_3 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.

<u>Відповідь</u>. 3 пасажири можуть зайняти місця в електропоїзді 125 способами.

<u>Задача 2</u>. Скількома способами 3 пасажири можуть увійти до електропоїзда, що налічує 5 вагонів, якщо ніякі 2 пасажири не вибирають один і той же вагон?

<u>Рішення.</u>

1. Зафіксуємо, як в попередній задачі, розподіл пасажирів по вагонах у вигляді з'єднання.

Оскільки пасажири вибирають різні вагони, це з'єднання не повинно містити однакових елементів, наприклад, 1, 2, 5.

2. Міняючи місцями елементи з'єднання, переконуємося, як і раніше, що варіант розподілу пасажирів є розміщенням по 3 із 5.

3. Застосовуємо формулу (3.3):

$$N = N_3 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Відповідь. 3 пасажири можуть розміститися в різних вагонах електропоїзда 60 способами.

Число перестановок. Розміщення по n із n елементів називаються перестановками із n елементів. Число перестановок із n елементів позначається символом P_n. З формули (3.4) із заміною r на n одержуємо

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! \qquad (3.5)$$

Задача. Скільки слів з чотирьох букв можна скласти, використовуючи кубики з буквами к, н, у, т?

Рішення. Слово з чотирьох букв в умовах задачі уявляє перестановку із чотирьох елементів. Тому чотириибуквених слів стільки ж, скільки перестановок із чотирьох $N = P_4 = 4! = 24$.

Відповідь. З чотирьох різних букв можна скласти 24 слова.

3.3. Число поєднань

Встановимо зв'язок між числом поєднань і числом розміщень. Розглянемо, наприклад, з'єднання по 3, що складаються із чотирьох елементів a, b, c, d. Щоб перерахувати розміщення, кожному поєднанню віднесемо ті розміщення, які виходять перестановкою його елементів. Представимо одержані розміщення у вигляді таблиці і підрахуємо $A_4^3 = C_4^3 \cdot P_3$. Отже, $C_4^3 = \frac{A_4^3}{P_3}$.

Поєднання	{a,b,c}	{a,b,d}	{a,c,d}	{b,c,d}
Розміщення	(a,b,c)	(a,b,d)	(a,c,d)	(b,c,d)
	(a,b,c)	(a,d,b)	(a,d,c)	(b,d,c)
	(b,a,c)	(b,a,d)	(c,a,d)	(c,b,d)
	(b,c,a)	(b,d,a)	(c,d,a)	(c,d,b)
	(c,a,b)	(d,a,b)	(d,a,c)	(d,b,c)
	(c,b,a)	(d,b,a)	(d,c,a)	(d,c,b)

Аналогічно

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}. \qquad (3.6)$$

Для поєднань можлива інша, факторіальна форма

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad (3.7)$$

Використовуючи формулу (3.7), встановимо важливу властивість поєднань

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r \;;$$

$$C_n^r = C_n^{n-r} \qquad (3.8)$$

Рівність (3.8) використовують в тих випадках, коли $r > \frac{n}{2}$.

Наприклад, $C_{15}^{13} = C_{15}^{15-13} = C_{15}^{2} = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105.$

Задача. У групі 20 студентів. Скількома способами в ній можна вибрати групу чергових з трьох людин?

Рішення.

1. Занумеруємо студентів групи, тоді вибраним черговим відповідатиме з'єднання з 3-х чисел, наприклад, 3, 7, 18.

2. Поміняємо місцями різні елементи з'єднання, одержимо 3,18,7. Оскільки цьому з'єднанню відповідає та ж група чергових, то укладаємо, що з'єднання є поєднанням по 3 із двадцяти.

3. Для підрахунку числа можливих груп застосовуємо формулу (3.6) для числа поєднань

$$N = C_{20}^{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140 \;.$$

3.4. З'єднання з повтореннями

Перестановки з повтореннями. Маємо r груп різних елементів. Вважатимемо, що число елементів кожної групи достатньо велике. Складемо з елементів груп набір із n елементів. Нехай в наборі міститься n_i ($i = 1, 2, ..., r$)

елементів i-тої групи. Складемо всілякі перестановки з елементів набору. Число перестановок з повтореннями по n із r груп визначається рівністю

$$P_{n1,n2,\ldots nr} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!} \quad (n = n_1 + n_2 +\ldots+ n_r). \qquad (3.9)$$

<u>Задача</u>. Скільки слів можна скласти, переставляючи букви слова "математика"?

<u>Рішення</u>. Слово "математика" містить 10 букв, що належать 6 групам з числами елементів $n_1 = 2$; $n_2 = 3$; $n_3 = 2$; $n_4 = 1$; $n_5 = 1$; $n_6 = 1$. Число N різних слів рівне числу перестановок з повтореннями із 6 груп

$$N = P_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 151200.$$

Поєднання з повтореннями. Складемо з елементів r груп поєднання по n елементів. Число $f_{n,r}$ поєднань з повтореннями по n із r груп визначається рівністю

$$f_{n,r} = C_{n+(r-1)}^{n} = C_{n+(r-1)}^{r-1} = \frac{(n+r-1)!}{n!\cdot(r-1)!} \qquad (3.10)$$

<u>Задача</u>. У поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна купити 5 листівок?

<u>Рішення</u>. Набір із 5-ти листівок є поєднанням з повтореннями по 5 із 10 груп (n = 5; r = 10). Число N таких наборів визначаємо по формулі (3.10)

$$N = f_{5,10} = C_{5+9}^{5} = C_{14}^{5} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 2002 \ .$$

3.5. Число елементів об'єднання. Формула включень і виключень

Позначимо N(A) і N(B) – числа елементів множин A і B. Якщо множини A і B не мають загальних елементів (див. рис. 4,а), число елементів об'єднання $A\cup B$ рівно сумі чисел елементів складових множин

$$N(A\cup B) = N(A)+ N(B). \qquad (3.11)$$

Якщо множини A і B мають однакові елементи (див. рис. 4 б), то число елементів об'єднання визначається рівністю

$$N(A\cup B) = N(A)+ N(B) – N(A\cap B) . \qquad (3.12)$$

Для об'єднання трьох множин A, B і C, користуючись рівністю (4.2) і законами 3б і 4б алгебри множин, одержуємо рівність

$N(A\cup B\cup C) = N((A\cup B)\cup C) = N(A\cup B) + N(C) - N((A\cup B)\cap C) = N(A)+$ $+N(B) - N(A\cap B) + N(C) - N((A\cap C)\cup(B\cap C)) = N(A)+ N(B)+ N(C) - N(A\cap B) -$ $- (N(A\cap C) + N(B\cap C) - N(A\cap B\cap C)) = N(A)+ N(B)+ N(C) - N(A\cap B) - N(A\cap C) -$ $- N(B\cap C) + N(A\cap B\cap C)$.

Для об'єднання r множин A1, A2, …, Ar одержуємо рівність

$N(\cup_{i=1}^{r} Ai) = N(A_1)+ N(A_2)+ \ldots + N(A_r) - N(A_1\cap A_2) - N(A_1\cap A_3) - N(A_{r-1}\cap A_r) +$ $+ N(A_1\cap A_2\cap A_3) + N(A_1\cap A_2\cap A_4) + \ldots + N(A_{r-2}\cap A_{r-1}\cap A_r) - N(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) - \ldots +$ $+ (-1)^{r-1}N(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_r)$,

яка називається *формулою включень і виключень*.

Задача. Із ста студентів англійську мову вивчають 28 студентів, французьку – 42, німецьку – 30, англійську і французьку – 10, англійську і німецьку – 8, всі три мови вивчають 3 студенти. Скільки студентів не вивчають жодної з цих мов?

Рішення. Позначимо: U – множина всіх студентів ($N(U) = 100$); A – множина студентів, що вивчають англійську мову; F – множина студентів, що вивчають французьку мову; D – множина студентів, що вивчають німецьку мову; B – множина студентів, що не вивчають названих мов. Тоді $A\cup F\cup D$ – множина студентів, які вивчають хоча б одну мову.

$B = (A\cup F\cup D)' = U \setminus (A\cup F\cup D)$ – множина студентів, які не вивчають ні однієї з названих мов. Число елементів множини B знайдемо, використовуючи формулу включень і виключень

$N(B)= N(U \setminus (A\cup F\cup D)) = N(U) - N(A\cup F\cup D) = N(U) - (N(A)+ N(F)+ N(D)- -$ $N(A\cap F) - N(A\cap D) - N(F\cap D) + N(A\cap F\cap D)) = 100 - (28 + 42 + 30 - 10 - 8 - 5 +3) =$ $100 - 80 = 20$.

Вправи

1. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися з неї?
2. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5?
3. Скільки всього чотиризначних чисел?
4. Скількі чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожну

з цифр використовувати не більш один раз?

5. Скільки п'ятизначних чисел, які діляться на 5?

6. У класі вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад уроків на понеділок?

7. Скільки двозначних чисел, у яких обидві цифри парні?

8. Є 5 видів конвертів без марок і 4 сорти марок однієї гідності. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для посилки листа?

9. Скількома способами на шахівниці можна вказати 2 квадрати?

10. У вазі стоять 10 червоних і 4 рожеві гвоздики. а) Скількома способами можна вибрати букет із 5 квітів ? б) Скількома способами можна вибрати букет із 2 червоних і 3 рожевих гвоздик?

11. 6 ящиків різних матеріалів доставляються на 5 поверхів будівлі. а) Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах? б) В скількох варіантах розподілу на п'ятий поверх буде доставлений будь-який один ящик?

12. 6 ящиків однакових матеріалів доставляються на 5 поверхів будівлі. а) Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах? б) В скількох варіантах на п'ятий поверх буде доставлений один ящик?

13. 2 листоноші повинні рознести 10 листів за десятьма адресами. Скількома способами вони можуть розподілити роботу?

14.Із групи в 15 чоловік повинні бути виділені бригадир і 4 члени бригади. Скількома способами можна це зробити?

15.Ліфт зупиняється на 10 поверхах. Скількома способами 8 пасажирів можуть покинути кабіну ліфта?

16.Скільки різних слів можна одержати, переставляючи букви слів "парабола", "інгредієнт"?

17.Скільки існує трикутників, довжина сторони яких приймає одне із значень: 4, 5, 6, 7 см?

18.Скільки кісток доміно в повному наборі?

19.Скількома способами можна вибрати 6 тістечок із наявних 11- ти сортів ?

20.Скільки цілих ненегативних рішень має рівняння $x_1+x_2+...+x_n = n$?

21. Рота складається з 3 офіцерів, 6 сержантів і 60 рядових. Скількома способами можна виділити загін, що складається з одного офіцера, двох сержантів

і двадцяти рядових?

22. Скількома способами можна вибрати з натуральних чисел від 1 до 30 три числа так, щоб їх сума була парною?

23.У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний кружок, 11–- фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих кружків. а)Скільки учнів відвідують математичний і фізичний кружки? б)Скільки учнів відвідують тільки математичний кружок?

24. У трансконтинентальному літаку знаходиться: 9 хлопчиків, 5 американських дітей, 9 дорослих чоловіків, 7 іноземних хлопчиків, 14 американців, 6 американців чоловічої статі і 7 іноземок жіночої статі. Скільки всього людей було в літаку?

ЛІТЕРАТУРА

1. Ядренко М.Й. Дискретна математика: Навчальний посібник. – ДО.: Експрес, 2003. – 244 с.
2. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – ДО.: Техника, 1975. –767с.
3. Акимов О. Е. Дискретная математика. – М.: Лаборатория Базовых Знаний 2001. – 376 с.
4. В.В. Кузьменко та ін. Основи дискретної математики. Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2004. – 40с.
5. И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. Элементи комбинаторики. – М.: Наука, 1977. – 89 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Швачич Генадій Григорович
Рижанкова Галина Іванівна
Барвінов Віталій Петрович
Коломоєц Микола Олександрович

Відповідальний за випуск Швачич Г.Г.

ДИСКРЕТНИЙ АНАЛІЗ

Розділи "Множини. Операції над множинами", "Відношення", "Елементи комбінаторики"

Навчальний посібник

Тем.план 2007, поз. 160

Підписано до друку 18.04.07 Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 1,7. Умов. друк. арк.. 1,68. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетаУ