МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Г. Г. ШВАЧИЧ, В. С. КОНОВАЛЕНКОВ, Т. М. ЗАБОРОВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ «Подвійні та криволінійні інтеграли»

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 15 від 27.12.2010

Дніпропетровськ НМетАУ 2011

УДК 517.3
Швачич Г.Г., Коноваленков В.С., Заборова Т.М. Вища математика. Розділ «Подвійні та криволінійні інтеграли»: Навч. посібник. - Дніпропетровськ: НМетАУ, 2011. – 36 с.

Містить теоретичні відомості про подвійні та криволінійні інтеграли та велику кількість прикладів; розглянуто застосування цих інтегралів до розв’язання прикладних задач.

Крім того, наведені варіанти завдань для індивідуальної роботи.

Призначений для студентів усіх напрямів.
Іл. 24. Бібліогр.: 7 найм.

Друкується за авторською редакцією

Відповідальний за випуск Г. Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенти: Ю.Н. Головко, канд. фіз.-мат.наук, доц. (НГУ)
Ю.Є. Чернявський, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ЗМІСТ

I. ПОНЯТТЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Подвійний інтеграл є узагальнення визначеного інтеграла на випадок функцій двох змінних. Він знаходить широке використання при розв'язанні прикладних задач у різноманітних галузях.

Нехай у обмеженій, замкнутої області D площини XOY задана неперервна функція $z = f(x,y)$. Поділимо цю область на кінчену кількість елементарних областей D_k $(k=1, 2,...,n)$ за допомогою довільних кривих, оберемо у кожній елементарній області довільну точку A_k (x_k, y_k) та обчислимо значення функції у цій точці $f\ (x_k, y_k)$ (рис.1.1). Площу області D_k позначимо через $\Delta s_k (k = 1,2,...,n)$.

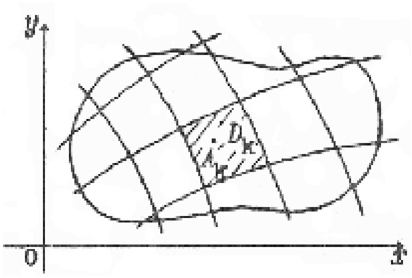


Рис. 1.1

Визначення I.

n - ою інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ у області D називається сума вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k = f(x_1, y_1)\Delta s_1 + f(x_2, y_2)\Delta s_2 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta s_n .$$

Нехай d_k - діаметр k - ої елементарної області, тобто відстань між двома найбільш віддаленими точками цієї області, а a - найбільший з діаметрів усіх елементарних областей.

Визначення 2. ***Подвійним інтегралом від функції f(x,y) по області D називається границя n-ої інтегральної суми при прямуванні до нуля найбільшого із діаметрів***

$$\iint_D f(x,y)ds = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k ,$$

де $f(x,y)$ - підінтегральна функція, D - область інтегрування, ds - елемент площі.

Умови існування цієї границі (подвійного інтеграла) визначаються наступною теоремою.

ТЕОРЕМА **. Якщо функція неперервна у обмеженої, замкнутої області D, границею якої є кусково – гладка крива, то n-а інтегральна сума функції $f(x,y)$ має границю при прямуванні до нуля найбільшого діаметра елементарної області. Ця границя, тобто $\iint\limits_{D} f(x,y)ds$, не залежить від способу розбиття області *D* на елементарні області та від вибору в них проміжних точок A_k .**

Геометричний сенс подвійного інтеграла

Якщо $f(x,y) \geq 0 \forall (x,y) \in D$, то подвійний інтеграл від функції f(x,y) по області D дорівнює об'єму тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y)$, знизу – кінченою замкнутою областю *D* площини XOY, а з боків - циліндричною поверхнею із напрямною - границею області D и твірною, паралельній осі OY (рис. 1.2). Таке тіло називають циліндричним або **циліндроїдом**.

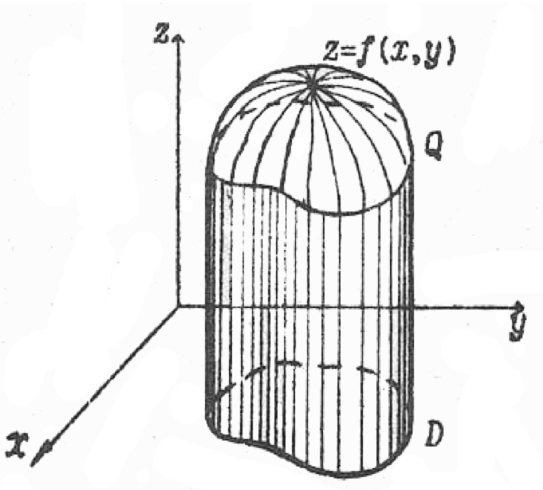


Рис. 1.2

Властивості подвійного інтеграла

Властивості подвійного інтеграла – це узагальнення відповідних властивостей визначного інтеграла. Основні з них – такі:

I. Подвійний інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій $j(x,y), f(x,y)$ по області D дорівнює алгебраїчній сумі подвійних інтегралів по області D

$$\iint\limits_{D} [j(x,y) + f(x,y)]ds = \iint\limits_{D} j(x,y)ds + \iint\limits_{D} f(x,y)ds .$$

2. Постійний множник можна виносити за знак подвійного інтеграла, тобто,

якщо C = const, то $\iint\limits_D Cj\,(x,y)ds \;=\; C\iint\limits_D j\,(x,y)ds$.

3. Якщо область D поділена на дві області D_1, D_2 (без спільних внутрішніх точок) і функція $f(x,y)$ неперервна в усіх точках області D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds .$$

2. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ У ПРЯМОКУТНИХ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області D , то подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds$ не залежить від **с**пособу розбиття області D на елементарні області Dk .

Тобто, область D можна розбити прямокутною сіткою, паралельною осям координат. Тоді елемент площі $ds = dx \cdot dy$ (Рис. 2.1).

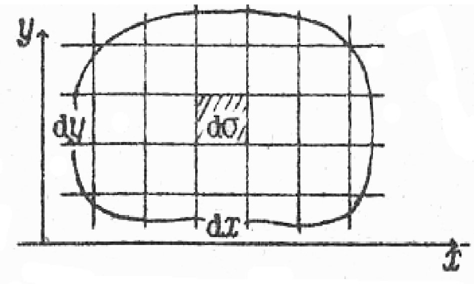


Рис. 2.1

І в цьому випадку будемо мати $\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ **.**

При обчисленні подвійного інтеграла треба почати з аналізу області інтегрування D.

Відрізняють дві основних області інтегрування.

I. Припустимо, что область D обмежена зліва та справа прямими $x = a, x = b (a < b)$, а знизу та зверху неперервними кривими $y = j_1(x), y = j_2(x),$ і нехай $j_1(x) < j_2(x)$. Для будь-якого $a < x < b$ пряма, паралельна осі OY, що проходе через точку x, перетинає границю області D тільки у двох точках: $M_1(x,y)$ («точка входу») и $M_2(x,y)$ ("точка виходу"). Таку область D ми будемо називати правильною у напрямку осі OY.

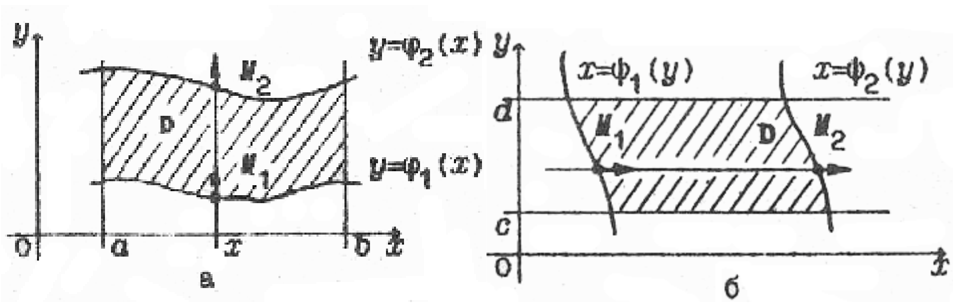


Рис. 2.2

Для такої області подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy.$$

Інтеграл у правій частині формули називається повторним або двократним.

Підкреслимо, що у внутрішньому інтегралі $\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy$ при інтегруванні по y границі інтегрування у загальному випадку є функції змінної x, тобто тієї змінної, по який обчислюється зовнішній інтеграл и котра при обчисленні внутрішнього інтеграла вважається сталою.

При цьому спочатку шукається внутрішній інтеграл

$\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy = F(x,y)\Big|_{j_1(x)}^{j_2(x)} = F(x, j_2(x)) - F(x, j_1(x)) = \overline{f}(x)$, а одержаний результат у вигляді функції від x підставляється у якості підінтегральної функції у зовнішній інтеграл $\int_a^b \overline{f}(x)dx = \overline{F}(x)\Big|_a^b = \overline{F}(b) - \overline{F}(a).$

2.Область інтегрування D обмежена знизу та зверху прямими $y = c, y = d(c < d)$, а зліва та справа - неперервними кривими $x = f_1(x), x = f_2(x),\ f_1(x) < f_2(x)$, причому, кожна з них перетинається горизонтальною прямою тільки в одній точці (рис. 2.2,б.). Область D у цьому випадку називається правильною в напрямку осі OX. Подвійний інтеграл у цьому випадку обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)dx,$$

причому, спочатку обчислюється внутрішній інтеграл $\int\limits_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)dx$, де y вважається постійною величиною.

Зауваження. Може статися, що область D обмежена знизу або зверху (зліва або справа) не одною лінією , а декількома.

Нехай, наприклад, $j_1(x) = \begin{cases} q(x), a \le x \le c \\ p(x), c \le x \le b \end{cases}.$

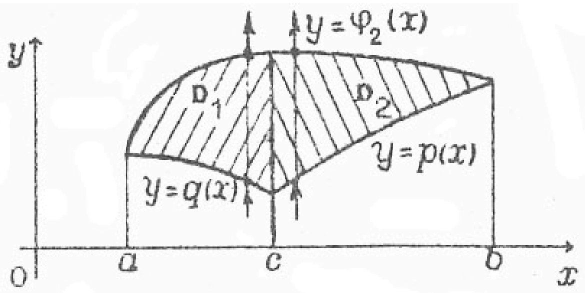


Рис. 2.3

Область D зображена на рис. 2.3. Тоді подвійний інтеграл по області D можна представити у вигляді суми двох інтегралів

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

і через повторні інтеграли наступним чином:

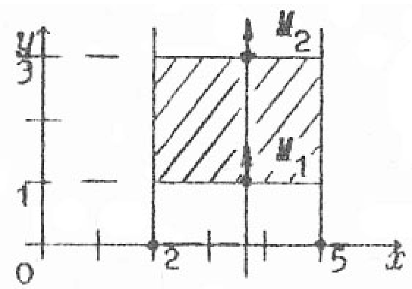
$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{c} dx \int\limits_{q(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy + \int\limits_{c}^{b} dx \int\limits_{p(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy.$$

Приклад І. Обчислити подвійний інтеграл $\iint (5x^2y - 2y^3)dxdy$, де область D – прямокутник: $2 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 3.$

Розв'язок . Область інтегрування *D* показано на рис. 2.4. Вона є правильною як у напрямку осі *OY*, так і у напрямку осі *OX*. Порядок інтегрування у повторному інтегралі можна обрати будь-який. Але зауважимо, що треба звертати увагу й на вигляд підінтегральної функції, тому що у деяких випадках доцільніше починати інтегрування по тій зі змінних, по якій інтеграл береться простіше.

Також бувають ситуації, коли по одній зі змінних інтеграл взяти не можна, а по іншій він легко береться. Тобто треба шукати оптимальний шлях інтегрування. Нехай зовнішній інтеграл обчислюється по змінний *x*, а внутрішній по *y*. Проводимо дві вертикальні лінії, що обмежують область зліва та справа. Область *D* розташована у смузі від $x = 2$ до $x = 5$. Таким чином, у зовнішньому інтегралі по *x* границі інтегрування змінюються від 2 до 5. Зараз визначимо, яким чином змінюється *y*. Для цього проведемо будь-яку вертикальну пряму $x = const$ і починаємо рухатись по ній знизу вверх. При цьому *y* змінюється від прямої $y = 1$ до прямої $y = 3$. Таким чином, інтегрування у внутрішньому інтегралі ведеться від $y = 1$ до $y = 3$:

$$\iint_D (5x^2 y - 2y^3)dxdy = \int_2^5 dx \int_1^3 (5x^2 y - 2y^3)dy.$$



Обчислюємо спочатку внутрішній інтеграл. При обчисленні інтеграла по ***y***, змінна ***x*** вважається сталою:

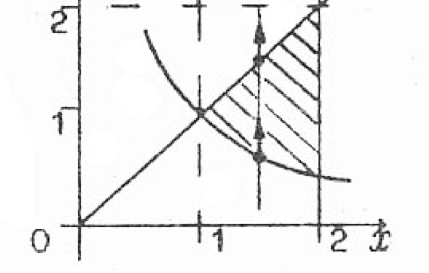
$$\int (5x^2 y - 2y^3)dy = (5x^2 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{2})\Big|_{y=1}^{y=3} = 20x^2 - 40.$$

Рис. 2.4

Інтегруємо одержану функцію по змінній *x*, обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\int_2^5 (20x^2 - 40)dx = (\frac{20x^3}{3} - 40x)\Big|_2^5 = 660.$$

Таким чином, $\iint (5x^2 y - 2y^3)dxdy = 660.$



Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy,$ де D – область, обмежена прямими $x = 2, y = x$ і гіперболою $xy = 1$.

Рис. 2.5

Розв'язок . Побудуємо область інтегрування (рис.2.5). Точки перетину вказаних ліній знаходимо через сумісне розв'язання рівнянь $x=2, y=x$ та $xy=1$.Область D є правильна у напрямку осі OY. Тому через крайню ліву й крайню праву точку області проводимо вертикальні прямі. Їх рівняння будуть, відповідно $x=1, x=2$. Зовнішнє інтегрування буде проводитись по x і границі інтегрування будуть: $x=1, x=2$. Границі інтегрування для внутрішнього інтеграла є ординати точки «входу» и точки «виходу» вертикальної прямої $x=const$.

У даному випадку для точки «входу» $y=\dfrac{1}{x}$, а для точки «виходу» $y=x$.

Таким чином,

$$J=\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 dx\int_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2\left[\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{y=1/x}^{y=x}\right]dx=\int_1^2(x^3-x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{9}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 2ydxdy,$ де область D обмежена параболою $y=\sqrt{x}$ та прямими $y=0$, $x+y=2$ (рис.2.6).

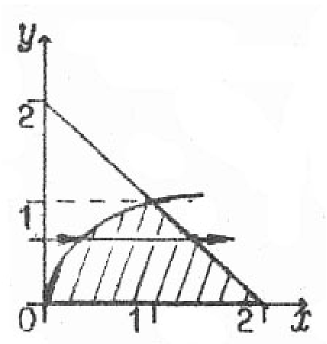


Рис. 2.6

Розв'язок . Область D є правильна як у напрямку осі *OX,* так і у напрямку осі *OУ*. Однак при проведенні зовнішнього інтегрування по x бачимо, що область D зверху обмежена двома лініями $y=\sqrt{x}$ та $x+y=2$. Ось чому область необхідно поділити на дві частини, і , таким чином, будемо мати два повторних інтеграли.

Але цей спосіб не є раціональним. Тому зовнішнє інтегрування будемо проводити по змінній y. Для цього через нижню та верхню точки області проводимо горизонтальні прямі. Їх рівняння відповідно $y=0, y=1$.Змінна y, таким чином, буде мінятися на відрізку $0\le y\le 1$. Границі інтегрування для внутрішнього інтеграла є абсциси точок «входу», «виходу» довільної горизонтальної прямої з рівнянням $y=const$. Для визначення абсцис цих точок рівняння ліній, що обмежують область D зліва та справа, повинні бути розв'язані відносно змінної x: $x = y^2, x = 2 - y$

$$\iint\limits_D 2y\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} 2y\,dx = \int_0^1 \left[2yx\Big|_{x=y^2}^{x=2-y}\right]dy = \int_0^1 2y(2-y-y^2)\,dy =$$

$$= 2\int_0^1 (2y - y^2 - y^3)dy = 2(y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4})\Big|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Приклад 4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+1)dxdy.$

Область D обмежена лініями $y = 4x - x^2, y = \frac{x}{2}, y = 2x - 3$ (рис. 2.7) .

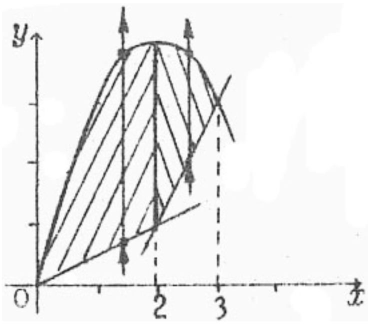


Рис. 2.7

Розв'язок . Область D є правильна відносно обох осей. Однак, якщо зовнішнє інтегрування проводити по змінній y, то область необхідно розбити на три частини (справа область обмежена трьома лініями: $x = 2y, x = \frac{y+3}{2}, x = 2 + \sqrt{y-4}$). Якщо же зовнішнє інтегрування вести по x, то область розбивається на дві частини

$$\iint (x+y)dxdy = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{4x-x^2} (x+1)dy + \int_2^3 dx \int_{2x-3}^{4x-x^2} (x+1)dy =$$

$$= \int_0^2 \left[(x+1)y\Big|_{y=x/2}^{y=4x-x^2}\right]dx + \int_2^3 \left[(x+1)y\Big|_{y=2x-3}^{y=4x-x^2}\right]dx = \int_0^2 (\frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - x^3)dx +$$

$$+ \int_2^3 (x^2 - x^3 + 5x + 3)dx = \frac{61}{4}.$$

Зауваження. Якщо область D не є правильною ні у напрямку осі OX, ні у напрямку осі OY (тобто, існують вертикальні й горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області D , перетинають границю області більш ніж у двох точках), то подвійний інтеграл по цій області ми не можемо представити у вигляді двократного. Якщо удається розбити неправильну область D на конечну кількість правильних або у напрямку осі OX, або у напрямку осі OY областей, то, обчислюючи подвійні інтеграли по кожній з цих областей за допомогою двократних та додаючи їх, одержимо шуканий інтеграл по області D.

Приклад 5. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx .$$

Розв'язок. Встановимо область D, використовуючи дані границі інтегрування. Приймаючи до уваги порядок інтегрування, маємо, що область D знизу обмежена прямою $y=0,$ зверху - прямою $y=1,$ зліва кривою $x=\frac{1}{2}y^2$ (парабола) і справа кривою $x=\sqrt{3-y^2}$ (коло). Побудуємо область D (рис. 2.8).

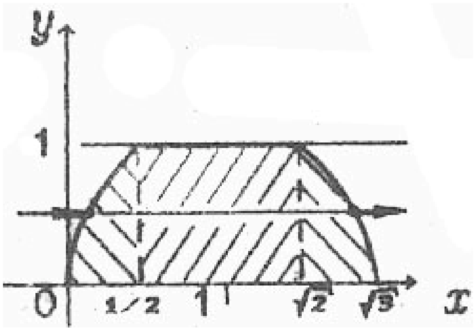


Рис. 2.8

При зміненні порядку інтегрування, тобто при зовнішньому інтегруванні по x, через крайню ліву та крайню праву точки області проводимо вертикальні прямі. Їх рівняння $x=0, x=\sqrt{3}.$ При цьому зауважимо, что верхня границя області складається з ліній : дуги параболи, відрізка прямої й дуги кола. Рівняння цих ліній необхідно розв'язати відносно y:

$y=\sqrt{2x}\,(y>0), y=1, y=\sqrt{3-x^2}\,(y>0).$ Подальше область D розбиваємо на три області (абсциси точок розділу знаходимо, розв'язуючи сумісно рівняння відповідних ліній):

$$D_1\left\{0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \sqrt{2x}\right\} \qquad D_2\left\{\frac{1}{2} \le x \le \sqrt{2}, 0 \le y \le 1\right\}$$

$$D_3\left\{\sqrt{2} \le x \le \sqrt{3}, 0 \le y \le \sqrt{3-x^2}\right\}.$$

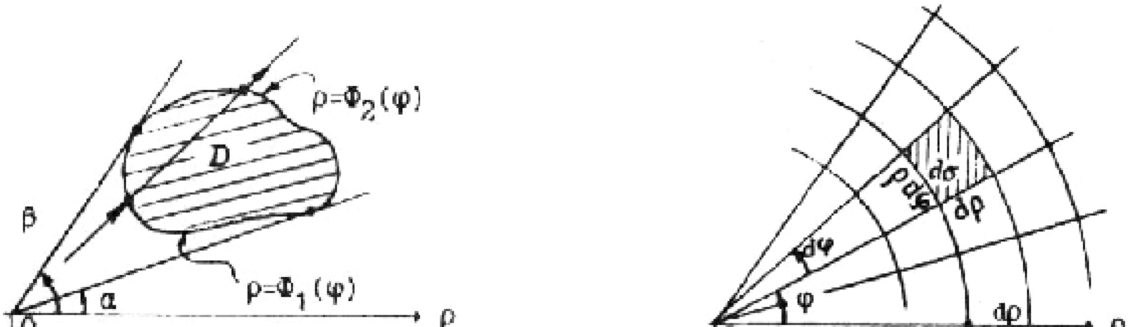
Таким чином, $$\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx = \int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dx +$$

$$+\int_{1/2}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dx.$$

Із наведених вище прикладів можна зробити наступний висновок: ***Порядок інтегрування визначається тим, чи є правильною область інтегрування відносно тієї або іншої осі та кількістю повторних інтегралів, які необхідно обчислювати у тому або іншому випадку вибору порядку інтегрування.***

3. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ У ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Нехай у полярній системі координат (ρ,φ) задана така область D : кожен промінь, що проходить через внутрішню точку області, перетинає границю області не більш ніж у двох точках. Припустимо, що область D обмежена кривими $\rho = \Phi_1(\varphi)$, $\rho = \Phi_2(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, причому, $\Phi_1(\varphi) \le \Phi_2(\varphi)$ і $\alpha < \beta$ (рис. 3.1 а). Таку область знову будемо називати правильною.



а б

Рис. 3.1

У полярних координатах елемент площі дорівнює $ds = rdj \cdot dr$ (рис. 3.1 б).

Подвійний інтеграл від неперервної функції $F(r,j)$ по правильній області D обчислюється через повторний інтеграл за формулою

$$\iint_D F(r,j)\,r\,dr\,dj = \int_a^b dj \int_{\Phi_1(j)}^{\Phi_2(j)} F(r,j)\,r\,dr.$$

Нехай потрібно обчислити подвійний інтеграл від функції f(x,y) по області D, заданої у прямокутних координатах: $\iint_D f(x,y)dxdy.$

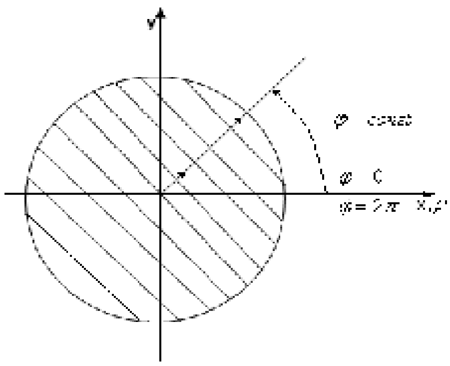
Якщо область D - правильна у полярних координатах (r,j), то обчислення даного інтеграла можна звести до обчислення подвійного інтеграла у полярних координатах. Так як $x = r\cdot\cos j,\ y = r\cdot\sin j,\ f(x,y) = f(r\cos j, r\sin j),$

то, таким чином,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dj \int_{\Phi_1(j)}^{\Phi_2(j)} f(r\cos j, r\sin j)\,r\,dr.$$

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \frac{dxdy}{\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо область D обмежена колом

$x^2 + y^2 = \frac{p}{16}$ (рис. 3.2).



Розв'язок. У даному інтегралі перейдемо до полярної системи координат

$$\iint_D \frac{dxdy}{\cos^2\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_{D^*} \frac{r\cdot dr\,dj}{\cos^2 r}.$$

Рис. 3.2

Далі переходимо до повторного інтеграла . Зовнішній інтеграл обчислюється за змінною j, а внутрішній - за r. Знайдемо границі інтегрування. Промінь, що співпадає із полярною віссю r, починаємо повертати проти часової стрілки. Для точок області кут нахилу j змінюється від $j = 0$ до $j = 2p$. Далі фіксуємо будь-яке проміжне значення кута і рухаємось по променю $(j = const)$. Для точок променя $j = const$ полярна координата r змінюється від $r = 0$ до $r = \frac{p}{4}$ (остання точка будь-якого

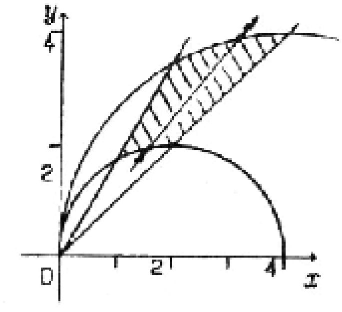


Рис. 3.3

променя розташована на границі області - колі радіуса $R = \frac{p}{4}$). Таким чином , у внутрішньому інтегралі границі інтегрування змінюються від 0 до $\frac{p}{4}$ (у даному прикладі вони визначаються сталими числами).

Спочатку обчислюється внутрішній інтеграл за змінною r , при цьому змінна j розглядається як стала величина.

$$J = \iint_D \frac{r dr dj}{\cos^2 r} = \int_0^{2p} dj \int_0^{p/4} \frac{r dr}{\cos^2 r} = \left\{ \begin{matrix} U = r & \Rightarrow dU = dr \\ dV = \dfrac{dr}{\cos^2 r} & \Rightarrow V = tgr \end{matrix} \right\} = \int_0^{2p} \left\{ \left[rtgr + \ln|\cos r| \right] \Big|_{r=0}^{r=p/4} \right\} dj =$$

$$= \int_0^{2p} \left[\frac{p}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} \right] dj = \left[\frac{p}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cdot j \Big|_{j=0}^{j=2p} = \frac{p^2}{2} + 2p \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$ де область D обмежена колами $x^2 + y^2 = 4x,\ x^2 + y^2 = 8x$ та прямими $y = x$ і $y = 2x$.

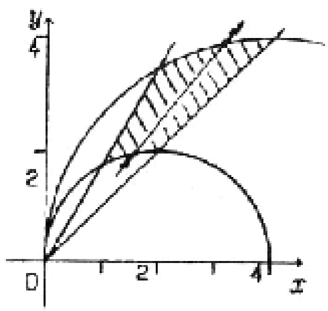


Рис. 3.4

Розв'язок. Побудуємо область інтегрування D (рис. 3.4). Визначимо границі інтегрування. Запишемо рівняння ліній, що оточують область *D*, у полярних координатах: $r^2 \cdot \cos^2 j + r^2 \cdot \sin^2 j = 4r \cdot \cos j$,

$r^2 \cdot \cos^2 j + r^2 \cdot \sin^2 j = 8r \cdot \cos j$ і $r \cdot \sin j = r \cdot \cos j$,

$r \cdot \sin j = 2r \cdot \cos j$.

Таким чином, границя області *D* визначається рівняннями

$r = 4 \cdot \cos j$, $r = 8 \cdot \cos j$,$tg j = 1 \Rightarrow j = \frac{p}{4}$,$tg j = 2 \Rightarrow j = arctg 2$,

а підінтегральна функція має вигляд: $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 j + r^2 \sin^2 j} = r$.

Одержуємо $$\iint \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{p/4}^{arctg2} dr \int_{4\cos j}^{8\cos j} r^2 dr = \int_{p/4}^{arctg2} \left[\frac{r^3}{3} \Big|_{4\cos j}^{8\cos j} \right] dj =$$

$$= \frac{448}{3}\int_{p/4}^{arctg\,2}\cos^3 j\,dj = \frac{448}{3}\int_{p/4}^{arctg\,2}(1-\sin^2 j)\cos j\,dj = \frac{448}{3}\left[\sin j - \frac{\sin^3 j}{3}\right]\Bigg|_{p/4}^{arctg\,2} = \frac{448}{3}\left(\frac{22}{15\sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{2}}{12}\right)$$

4. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФИГУР

Площа S плоскої області D на площині XOY обчислюється за формулами

$$S = \iint_D dxdy \text{ или } S = \iint_D r\,dr\,dj\ .$$

Приклад 7. Знайти площу області D, обмеженої лініями $y^2 = -x+9$, $x + y = 3$.

Розв'язок. Розглянемо область інтегрування D (рис. 4.1).

Точками перетину даних кривих будуть точки (0,3) и (5,-2). Дійсно,

$$\begin{cases} y^2 = -x+9 \\ y = -x+3 \end{cases} \Rightarrow (-x+3)^2 = -x+9 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5 \Rightarrow y_1 = 3, y_2 = -2.$$

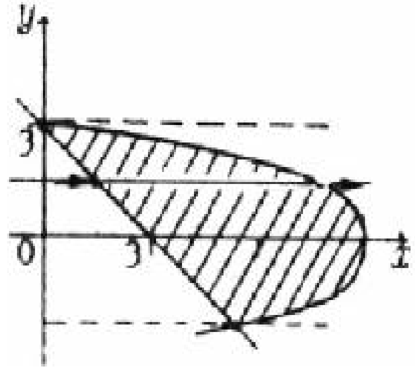


Рис. 4.1

Область D є правильною у напрямку осі ОX і границі інтегрування зовнішнього інтеграла будуть змінюватись від $y = -2$ до $y = 3$. x при цьому буде мінятися «від прямої $x = 3 - y$ » до «параболи $x = 9 - y^2$». Це і є нижня та верхня границі для внутрішнього інтеграла відповідно

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{3} dy \int_{3-y}^{9-y^2} dx = \int_{-2}^{3}\left[x\Big|_{3-y}^{9-y^2}\right]dy = \int_{-2}^{3}\left[9 - y^2 - 3 + y\right]dy = \left(6y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{3} = \frac{125}{6}(кв.од.)$$

Приклад 8. Обчислити площу області, обмеженої прямими $y = 5\text{-}2x$, $y = x+2$, $x = 7y\text{-}10$.

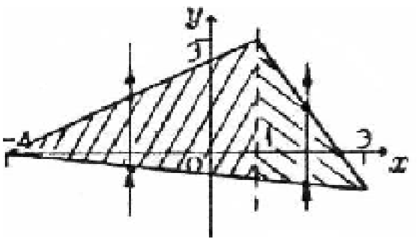


Рис. 4.2

Розв'язок. Область інтегрування - трикутник (рис. 4.2). Його вершинами є точки (1,3),(3,-1), (-4,-2) (шукаються шляхом сумісного розв'язання відповідних пар рівнянь прямих). Область D є правильна у обох напрямках. Її границя задана різними аналітичними виразами при будь-якому виборі порядку інтегрування. Тому розіб'ємо її на дві частини прямою $x=1$ (у точці с абсцисою $x=1$ має місце зміна рівняння лінії, що обмежує область зверху). У цьому випадку

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-4}^{1} dy \int_{\frac{x-10}{7}}^{x+2} dx + \int_{1}^{3} dx \int_{\frac{x-10}{7}}^{5-2x} dy = \int_{-4}^{1} (x + 2 - \frac{x-10}{7})dx + \int_{1}^{3} \left(5 - 2x - \frac{x-10}{7} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \left(3x^2 + 24x\right) \Big|_{-4}^{1} + \frac{1}{7} \cdot (45x - \frac{15x^2}{2}) \Big|_{1}^{3} = \frac{57}{7} \, (кв.од.).$$

Приклад 9. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y=0$.

Розв'язок. Рівняння кіл перетворюємо до канонічного вигляду $(x-1)^2 + y^2 = 1^2$, $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$. Побудуємо область інтегрування D (рис. 4.3).

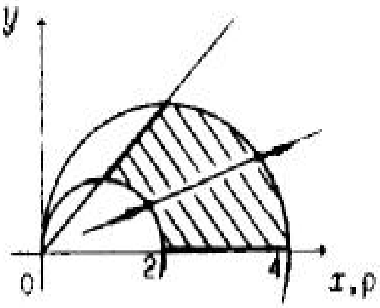


Рис. 4.3

Переходячи до полярних координат, одержуємо рівняння ліній, що оточують область D:

$r = 2\cos j$, $r = 4\cos j$, $j = 0, j = \frac{p}{4}$. Таким чином,

$$S = \iint_D r dr dj = \int_0^{p/4} dj \int_{2\cos j}^{4\cos j} r dr = \int_0^{p/4} \left[\frac{r^2}{2} \Big|_{2\cos j}^{4\cos j} \right] dj = 6 \int_0^{p/4} \cos^2 j \, dj =$$

$$= 3 \int_0^{p/4} (1 + \cos 2j) dj = (3j + \frac{3}{2} \sin 2j) \Big|_0^{p/4} = \frac{3}{2}(1 + \frac{p}{2}) \quad \text{(кв. од.).}$$

Практична рекомендація. ***Перехід до полярної системи координат необхідно проводити у тому випадку, якщо область D представляє собою круг (або частину круга), кругове кільце (або частину кругового кільця) та (або) у підінтегральної функції присутній вираз*** $x^2 + y^2$.

5. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ

Як було показано вище, об'єм V циліндроїда, обмеженого поверхнею

$z = f(x,y), (f(x,y) \geq 0)$, дорівнює подвійному інтегралу від функції $f(x,y)$ по області D: $V = \iint\limits_D f(x,y)ds$, а в прямокутних координатах $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

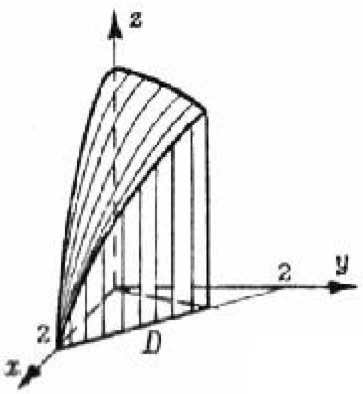
У полярних координатах $V = \iint\limits_D f(r\cos j, r\sin j)rdrdj$.

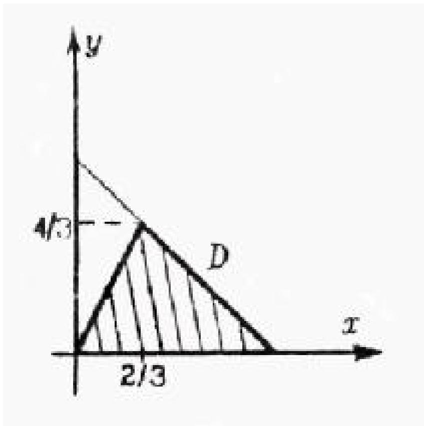
Приклад 10. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$z = 4 - x^2, x + y = 2, y = 2x, z = 0, y = 0.$

Розв'язок. Дане тіло - циліндроїд (рис. 5.1а), обмежений зверху поверхнею $z = 4 - x^2$, тому $V = \iint\limits_D (4 - x^2)dxdy.$

На площині *XOY* тіло вирізує трикутник, обмежений прямими $x+ y=2, y = 2x, y = 0.$ Його вершинами є точки (0,0), (2,0) и (2/3,4/3) (рис. 5.1 б). Область D – правильна у напрямку осі *OX*.





а б

Рис. 5.1

$$V = \iint\limits_D (4 - x^2)dxdy =$$

$$= \int_0^{4/3} dy \int_{y/2}^{2-y} (4 - x^2)dx = \int_0^{4/3} \left[\left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{y/2}^{2-y} \right] dy = \int_0^{4/3} \left[\frac{16}{3} 2y - 2y^2 + \frac{3}{8} y^3 \right] dy =$$

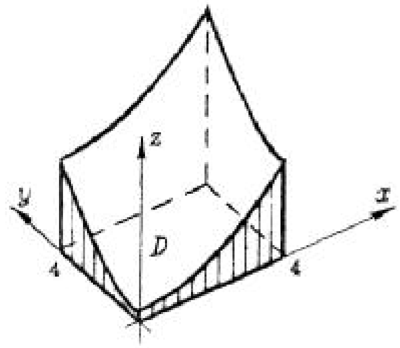
$$= \left(\frac{16}{3} y - y^2 - + \frac{2y^3}{3} + \frac{3y^4}{32} \right) \Bigg|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{328}{81} (куб.од.).$$

Приклад 11. Обчислити об'єм тіла, обмеженого площинами

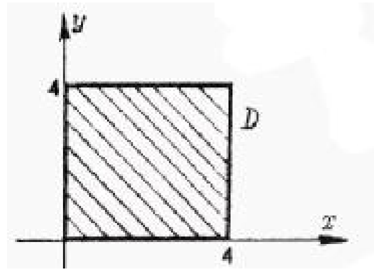
$x = 0, y = 0, x = 4, y = 4$ і параболоїдом $z = x^2 + y^2 + 1$ (рис. 5.2 а).

Розв'язок. Зверху тіло обмежено параболоїдом, тому $V = \iint\limits_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy.$

Область D – квадрат: $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4$ (рис. 5.2 б).



а



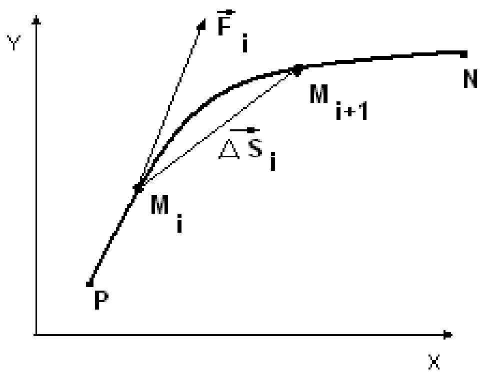
б

Рис. 5.2

$$V = \iint_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy = \int_0^4 dx \int_0^4 (x^2 + y^2 + 1)dy = \int_0^4 \left[\left.(xy^2 + \frac{y^3}{3} + y)\right|_0^4 \right] dx =$$

$$= \int_0^4 \left[4x^2 + \frac{64}{3} + 4 \right] dx = \left.\left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{64}{3}x + 4x \right)\right|_0^4 = \frac{560}{3} \, (кв.од.).$$

6. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ



Нехай т. ***M(x,y)*** переміщується вздовж деякої плоскої кривої ***L*** від т. ***P*** до т. ***N***. До точки ***M*** прикладена сила, що змінюється при русі:

$\vec{F} = \vec{F}(x,y) = P(x,y) \cdot \vec{i} + Q(x,y) \cdot \vec{j}$, де $P(x,y)$,

Рис. 6.1

$Q(x,y)$ - проекції сили $\vec{F}$ на осі координат OX,OY. Розбиваючи дугу ***PN*** на n часток і з'єднуючи точки розділу відрізками прямих, одержуємо вписану ламану лінію. Робота сили $\vec{F}$ на і - ому відрізку ламаної визначається як скалярний добуток векторів (рис.6.1):

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta s}_i = P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i,$$

де $\vec{\Delta s}_i = \{\Delta x_i ; \Delta y_i\}, P(x_i, y_i), Q(x_i, y_i)$ – значення проекцій сили $\vec{F}$ у точці M_i.

Додаючи елементарні роботи ΔA_i, одержуємо роботу сили $\vec{F}$ на переміщенні вздовж ламаної: $A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = \sum_{i=1}^{n} (P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i)$, або

n- у інтегральну суму. Переходячи до границі у останньому виразі при $\Delta\vec{s}_i \to 0$ (при цьому, очевидно, $\Delta x_i, \Delta y_i \to 0$), одержимо роботу сили $\vec{F}$ по кривій від т. ***P*** до т. ***N*** (якщо ця границя існує)

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i).$$

Границя у правій частині називається **криволінійним інтегралом** і позначається:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(P)}^{(N)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i).$$

Основні властивості криволінійного інтеграла

1. $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(P)}^{(N)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy.$

2. Якщо криву ***L*** розбити на частини L_1 и L_2 ,то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{L_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{L_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Ця властивість справедлива для будь-якої кінцевої кількості додатків.

3. При зміненні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл змінює знак

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{-L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Криволінійний інтеграл визначається підінтегральною функцією, формою кривої інтегрування та вказаним напрямком.

Зауваження. Визначення криволінійного інтеграла залишається у силі й у випадку, коли крива ***L*** замкнута, тобто її початкова и кінцева точки співпадають. У цьому випадку використовується позначення $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ і обов'язково вказується напрямок обходу по замкнутій кривій.

7. ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Обчислення криволінійного інтеграла у залежності від способу завдання дуги кривої виконується наступним чином:

1. $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \le t \le b$

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[\, P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) \,\right] dt.$$

2. $L: y = y(x), a \le x \le b$

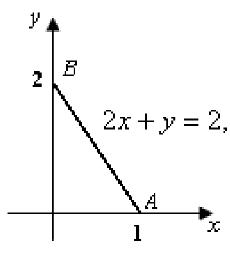
$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[\, P(x,y(x)) + Q(x,y(x)) \,\right] y'(x)dx.$$

3. $L: x = x(y), c \le y \le d$

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_c^d \left[\, P(x(y),y) + Q(x(y),y) \,\right] x'(y)dy.$$

Із наведених формул видно, що обчислення криволінійного інтеграла зводиться до обчислення визначеного інтеграла шляхом заміни змінних.

Приклад 12. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 y dy$, де L - дуга AB кривої: $2x + y = 2$, *A(1,0),B(0,2).*



Розв'язок. Виразимо y із рівняння $y = 2 - 2x,$ знайдемо похідну $y' = -2.$ Приймемо до уваги, що інтегрування виконується від точки ***A*** до точки ***B***.

Рис. 7.1

$$\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 y dy = \int\limits_1^0 \left[x(2-2x) - 1 + x^2(2-2x)(-2) \,\right] dx =$$

$$=\int_1^0 (4x^3-6x^2+2x-1)dx=(x^4-2x^3+x^2-x)\Big|_1^0=-(1-2+1-1)=1.$$

Приклад 13. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{-L} 2xdx-(x+2y)dy$

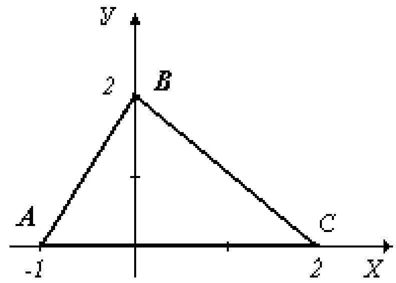


Рис. 7.2

вздовж периметра трикутника ABC:

$A(-1,0), B(0,2), C(2,0)$.

Розв'язок. Запишемо рівняння сторін трикутника, використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

AB: $\dfrac{x-(-1)}{0-(-1)}=\dfrac{y-0}{2-0}\Rightarrow y=2x+2,\quad y'=2.$

BC: $y=-x+2, y'=-1$ CA: $y=0, y'=0.$

$$\oint\limits_{-L} 2xdx-(x+2y)dy=\int\limits_{AB} 2xdx-(x+2y)dy+\int\limits_{BC} 2xdx-(x+2y)dy+$$

$$\int\limits_{CA} 2xdx-(x+2y)dy=\int_{-1}^{0}[2x-(x+2\cdot(2x+2))\cdot 2\ ]dx+$$

$$+\int_0^2[2x-(x+2\cdot(-x+1))\cdot(-1)\ ]dx+\int_2^{-1}[2x-(x+2\cdot 0)\cdot 0\ ]dx=\int_{-1}^{0}[-8x-8\ ]dx+$$

$$+\int_0^2[x+2\ ]dx+\int_2^{-1}2xdx=(-4x^2-8x)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^2+x^2\Big|_2^{-1}=1.$$

8. ФОРМУЛА ГРІНА

При розв'язанні практичних задач виникає необхідність переходу від криволінійного інтеграла до подвійного інтеграла й навпаки. Формула Гріна встановлює зв'язок між цими інтегралами

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_L Pdx+Qdy,$$

де **L**- є границя області **D**.

Формула Гріна залишається справедливою для будь-якої замкненої області *D,* яку можна розбити на кінчену кількість правильних замкнених областей.

Приклад 14. Обчислити $\oint\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy,$ де L- коло $x^2+y^2=R^2$.

Розв'язок. $P(x,y)=x-y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=-1; \quad Q(x,y)=x+y \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=1.$

Використовуємо формулу Гріна і, оскільки область D – коло, переходимо до полярної системи координат:

$$\oint\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy=\iint\limits_D (1-(-1))dxdy=2\iint\limits_D dxdy=2\iint\limits_{D^*} r\,dr\,dj =$$

$$=2\int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^R r\,dr=\int\limits_0^{2p}\left[r^2\Big|_0^R\right]dj=\int\limits_0^{2p} R^2 dj=R^2\int\limits_0^{2p} dj=R^2(j\Big|_0^{2p})=2pR^2.$$

Криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, якщо підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції *U(x,y),* тобто $dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$

Необхідна та достатня умова того, що підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції: $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x,y)\in D$.

У випадку, якщо $dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$

1. $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=U(x_2,y_2)-U(x_1,y_1)$ - узагальнена формула Ньютона-Лейбніца.

2. Криволінійний інтеграл по замкненому контуру дорівнює нулю.

Приклад 15. Обчислити $\int\limits_{(1,2)}^{(3,4)} ydx+xdy$.

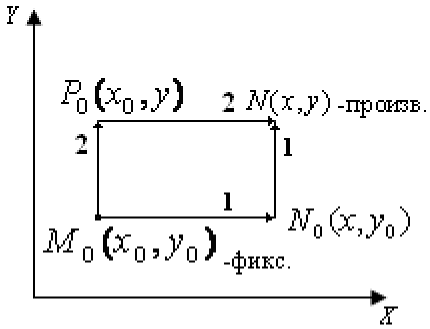
Розв'язок. Оскільки підінтегральний вираз є повний диференціал

$ydx+xdy=d(xy),$ то $\int\limits_{(1,2)}^{(3,4)} ydx+xdy=\int\limits_{(1,2)}^{(3,4)} d(xy)=(xy)\Big|_{(1,2)}^{(3,4)}$ =12-2=10.

Находження функції за її повним диференціалом

Якщо $dU(x,y) = P(x,y)dx + (x,y)dy$, тобто $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, тоді

$$U(x,y) = \int\limits_{M_0N} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$ (при русі по ламаній M_0N_0N - шлях **1)** або



$$U(x,y) = \int\limits_{M_0N} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + C$$

(при русі по ламаній M_0P_0N - шлях **2**) (рис. 8.1).

Якщо дозволяє умова задачі, то у якості точки M_0 **доцільно взяти точку** $O(0,0)$.

Рис. 8.1

Приклад 16. Перевірити, що вираз $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$ є повний диференціал, і знайти функцію.

Розв'язок. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -6y; \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -6y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Таким чином, даний вираз є повним диференціалом деякої функції. У якості M_0 візьмемо $O(0,0)$.

$$U(x,y) = \int\limits_{ON} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C = \int\limits_{0}^{x} P(x,0)dx + \int\limits_{0}^{y} Q(x,y)dy + C =$$

$$= \int\limits_{0}^{x} (2x - 3\cdot 0^2 + 1)dx + \int\limits_{0}^{y} (2 - 6xy)dy = (x^2 + x)\Big|_{0}^{x} + (2y - 6x\frac{y^2}{2})\Big|_{0}^{y} = x^2 + x + 2y - 3xy^2 + C.$$

Таким чином, $U(x,y) = x^2 + x + 2y - 3xy^2 + C$.

9. ВИКОРИСТАННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

1. Обчислення площі плоскої фігури

$$S = \frac{1}{2} \cdot \oint\limits_{L} xdy - ydx.$$

Приклад 17. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом:

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2p$ (рис. 9.1).

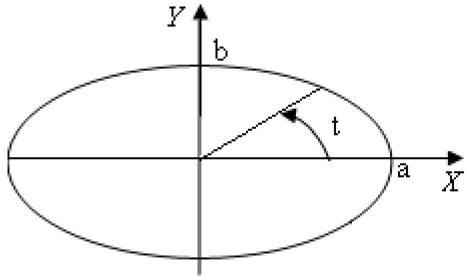


Рис. 9.1

Розв'язок. Приймаючи до уваги симетрію фігури, знайдемо площу її чверті. t – кут, що змінюється у перший чверті від 0 до $p\!\!\diagup_{2}$.

$$S = \frac{1}{2}\cdot\oint\limits_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{p/2}\left(a\cos t\cdot b\cos t - b\sin t\cdot(-a\sin t)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\cdot\int\limits_0^{p/2}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{ab}{2}\cdot\int\limits_0^{p/2}dt = \frac{ab}{2}\cdot\left(t\,\Big|_0^{p/2}\right) = \frac{pab}{4}.$$

Площа всієї фігури будет дорівнювати $S = pab$ кв. од.

2. Механічна робота A змінної сили $\vec{F}\{P(x,y);Q(x,y)\}$

при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії L визначається наступним

чином: $$A = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Приклад 18. Поле утворено силою $\vec{F}\{x-y;x\}$. Побудувати силу $\vec{F}$ у кожній вершині квадрата $x = \pm a, y = \pm a$ і знайти роботу A одиниці маси по контуру квадрата.

Розв'язок.

$$A = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{BC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy +$$

$$+ \int\limits_{CD} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{DA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^{-a}(x-a)dx + \int\limits_a^{-a}(-a)dy +$$

$$+ \int\limits_{-a}^{a}(x+a)dx + \int\limits_{-a}^{a}ady = \left(\frac{x^2}{2} - ax\right)\Big|_a^{-a} - ay\Big|_a^{-a} + \left(\frac{x^2}{2} + ax\right)\Big|_{-a}^{a} + ay\Big|_{-a}^{a} = 8a^2.$$

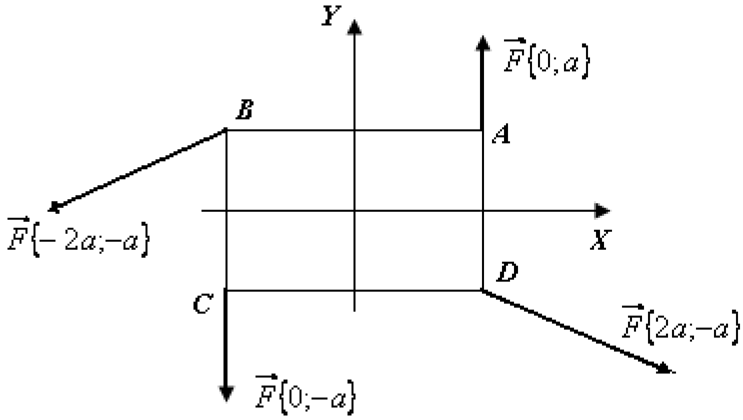


Рис. 9.2

10. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

І. Обчислити подвійний інтеграл:

1. $\iint\limits_D (x^3 + y^3)dxdy$ $\qquad D: y = \frac{1}{2}x, y = x, x = 2.$

2. $\iint\limits_D \frac{y}{x}dxdy$ $\qquad D: y = \sqrt{x}, y = \frac{x}{3}, x = 1.$

3. $\iint\limits_D \frac{x}{y}dxdy$ $\qquad D: y = x, y = \frac{x}{3}, x = 1.$

4. $\iint\limits_D (6xy^2 - 12x^2y)dxdy$ $\qquad D: y = 2, y = 3, x = 0, x = 1.$

5. $\iint\limits_D (y + 4)dxdy$ $\qquad D: (y-1)^2 = x, x = 1.$

6. $\iint\limits_D (y + x^2)dxdy$ $\qquad D: y = 2x, y = \frac{x}{2}, xy = 2 (x \geq 0).$

7. $\iint\limits_D x \cdot \sin(y + x^2)dxdy$ $\qquad D: y = 0, y = \frac{p}{2}, x = 0, x = \sqrt{p}.$

8. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x + y}$ $\qquad D: y = 0, x = 0, x + y = 2.$

9. $\iint\limits_D xydxdy$ $\qquad D: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1.$

10. $\iint\limits_D \frac{\ln x}{1+y^2}dxdy$ $\quad D: 1 \le x \le 2; 0 \le y \le 1.$

11. $\iint\limits_D xy^2 \cdot e^{xy}dxdy$ $\quad D: 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2.$

12. $\iint\limits_D (y-x)dxdy$ $\quad D: y = |x|, y = 1, y = 2.$

13. $\iint\limits_D dxdy$ $\quad D: y = x, y = 3-x, y = 0, y = 1.$

14. $\iint\limits_D (y+x)dxdy$ $\quad D: y = x^2, x = 0, y = 1, y = 2.$

15. $\iint\limits_D \frac{x}{1+y+x^2}dxdy$ $\quad D: 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1.$

16. $\iint\limits_D x^2 y \cdot \cos(yx)dxdy$ $\quad D: 0 \le x \le \frac{p}{2}; 0 \le y \le 4.$

17. $\iint\limits_D \frac{y}{x}dxdy$ $\quad D: y = x, y = 2x, y = 3-x.$

18. $\iint\limits_D xydxdy$ $\quad D: y = x^2, y^2 = x.$

19. $\iint\limits_D \frac{y}{1+x^2}dxdy$ $\quad D: y = 1-x; x^2 + y^2 = 1.$

20. $\iint\limits_D x^2 y^2 dxdy$ $\quad D: xy = 1, x = 2, y = 1, y = 2.$

21. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2 y^2}$ $\quad D: xy = 1, x = 2, y = 1, y = 2.$

22. $\iint\limits_D (x-y^3)dxdy$ $\quad D: \Delta ABC : A(0,0), B(1,1), C(2,0).$

23. $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2}dxdy$ $\quad D: y = \sqrt{x}, y = \frac{x}{4}, x = 4.$

24. $\iint\limits_D (y+x)dxdy$ $\qquad D: y=x^2,\ y=\dfrac{1}{x^2},\ x=2.$

25. $\iint\limits_D 3^{x+y}dxdy$ $\qquad D: y=x,\ y=2x,\ x=1.$

II. Змінити порядок інтегрування:

1. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\sqrt{y-1}}^{2/y} f(x,y)dx$

2. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_y^{4-y} f(x,y)dx$

3. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^{x} f(x,y)dy$

4. $\int\limits_{-1}^4 dx \int\limits_{-x-1}^{1+x} f(x,y)dy$

5. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{y^2}^{4} f(x,y)dx$

6. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4-(x-2)^2}}^{4x-x^2} f(x,y)dy$

7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2-x^2}^{2+x} f(x,y)dy$

8. $\int\limits_0^{p/2} dx \int\limits_0^{\cos x} f(x,y)dy$

9. $\int\limits_{-1}^2 dy \int\limits_{y+1}^{5-y} f(x,y)dx$

10. $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)dy$

11. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{x^2+1} f(x,y)dy$

12. $\int\limits_{-1}^4 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{x+3} f(x,y)dy$

13. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

14. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{\arcsin\frac{y}{2}}^{arctgy} f(x,y)dx$

15. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

16. $\int\limits_1^4 dy \int\limits_y^{\frac{y-16}{3}} f(x,y)dx$

17. $\int\limits_0^5 dx \int\limits_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

18. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3/(x^2+1)} f(x,y)dy$

19. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

20. $\int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{2-y} f(x,y)dx$

21. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-x}^{x+2} f(x,y)dy$

22. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3-1}^{1-x} f(x,y)dy$

23. $\int\limits_{0}^{p} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy$

24. $\int\limits_{-4}^{4} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y-1}}^{4-y} f(x,y)dy$

25. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{9/x}^{10-x} f(x,y)dy$

ІІІ. Обчислити подвійний інтеграл за допомогою переходу до полярної системи координат:

1. $\iint\limits_{D} \ln(x^2+y^2)dxdy,$ D - кільце : $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=e^2.$

2. $\iint (1-\frac{y^2}{x^2})dxdy,$ D - коло: $x^2+y^2 \le p^2.$

3. $\iint\limits_{D} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ D - кільце : $x^2+y^2=p^2,\ x^2+y^2=4p^2.$

4. $\iint\limits_{D} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ D - кільце : $x^2+y^2=\frac{p^2}{4},\ x^2+y^2=p^2.$

5. $\iint\limits_{D} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ D - кільце : $x^2+y^2=\frac{a^2}{4},\ x^2+y^2=a^2.$

6. $\iint\limits_{D} arctg\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ D - кільце : $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=3.$

7. $\iint\limits_{D} e^{x^2+y^2}dxdy,$ D: $x^2+y^2\le 16, (x,y\ge 0).$

8. $\iint\limits_D tg^2(x^2+y^2)dxdy,$ D - кільце: $x^2+y^2=\frac{p^2}{16},\ x^2+y^2=\frac{p^2}{9}.$

9. $\iint\limits_D \frac{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ D: $x^2+y^2\le 1, (x,y\ge 0).$

10. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+1}\cdot dxdy$, D- кільце : $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4.$

11. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+1}},$ D - кільце: $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16.$

12. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$, D: $x^2+y^2\le 4, (x,y\ge 0).$

13. $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ D - кільце: $x^2+y^2=\frac{p^2}{4},\ x^2+y^2=p^2.$

14. $\iint\limits_D 3^{x^2+y^2}dxdy,$ D: $x^2+y^2\le 1, (x,y\ge 0).$

15. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2-4},$ D- кільце: $x^2+y^2=25,\ x^2+y^2=49.$

16. $\iint\limits_D \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ D - кільце: $x^2+y^2=\frac{p^2}{9},\ x^2+y^2=p^2.$

17. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2+9)^{3/2}},$ D: $x^2+y^2\le 16, (x,y\ge 0).$

18. $\iint\limits_D (x^2+y^2)^{7/3}dxdy,$ D - кільце: $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9.$

19. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)}},$ D - кільце: $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4.$

20. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},$ D - кільце: $x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2=4a^2.$

21. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{e^{x^2+y^2}+1}$, D: $x^2+y^2 \le 1, (x, y \ge 0)$.

22. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(1+\cos\sqrt{x^2+y^2})}$, D: $x^2+y^2 \le \frac{p}{4}, (x, y \ge 0)$.

23. $\iint\limits_D \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy$, D - кільце: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=e^2$.

24. $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2+9}\cdot dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $x^2+y^2 \le 16, (x, y \ge 0)$.

25. $\iint\limits_D \sqrt{(4-x^2-y^2)(x^2+y^2)}\cdot dxdy$, D: $x^2+y^2 \le 4, (x, y \ge 0)$.

IV. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями:

1. $2x-y=0,\quad 2x-y-7=0,\quad x-4y+7=0,\quad x-4y+14=0.$
2. $x^2+y^2=9,\quad y=\frac{1}{3}(x-3)^2.$
3. $y=-2,\quad y=x+2,\quad y=2,\quad y^2=x.$
4. $y^2+x=0,\ y=-2,\ y=2-x,\ y=2.$
5. $x^2+y^2=25,\quad y=0,\quad 4x+3y-25=0.$
6. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,\quad y=x,\quad y=0,\quad (x\ge 0, y\ge 0).$
7. $y-x^2=0,\quad y=(x+1)^2,\quad y=2.$
8. $x^2+y^2=4,\ y=2-x,\quad y=1.$
9. $y=1-x^2,\quad y=x-1.$
10. $x^2+y^2=25,\quad 4x-3y+25=0.$
11. $y=1-x^2,\quad y+x^2=0,\quad x=2,\quad x=-2.$
12. $x+y+5=0,\quad x-y-1=0,\quad x+3y+7=0.$
13 $y=1-x,\quad y=x-1,\quad y=x+1,\ y=-x-1.$

14. $x+y-2=0, \quad x+y-8=0, \quad x-2y+4=0, \quad x-2y-2=0.$

15. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1, \quad y=1-\frac{x}{2}.$

16. $y=2^x, \quad y=\frac{x}{2}, \quad x=2.$

17. $x^2+y^2=1, \; y=1-x, \quad y=\frac{1}{2}.$

18. $y=\sin x, \quad y=\frac{1}{2}.$

19. $y=4-x^2, \quad y=x-2.$

20. $y=\sqrt{x+1}, \quad y=0, \quad y=\frac{x^2}{2}-5x+25.$

21. $y^2=x, \quad xy=1, \; x=4, \quad y=0.$

22. $y=x^2, \; y=x^2+3.$

23. Паралелограм: A(1,-1), B(2,0), C(4,1), D(3,0).

24. $y=\ln x, \quad y=1-x^2, \quad y=1.$

25. $xy=1, \; xy=8, \; y^2=x, \; y^2=8x.$

V. Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1. $z=0, \quad z=y^2, \quad 2x+3y=6, \quad x=0.$

2. $z=0, \quad z=x^2, \quad 3x+2y=6, \quad y=0.$

3. $z=0, \quad x=0, \quad y=x, \quad z=1-y\sqrt{y}.$

4. $z=0, \quad z=5x.$

5. $z=0, \; z=x^2+y^2, \quad y=x^2, \; y=1.$

6. $z=0, \quad 4x^2+9y^2=36, \; z=x, \; (x\geq 0).$

7. $z=0, \quad x^2+y^2=16, \quad z=y^2.$

8. $z=0, \quad z=2x^2+3y^2, \quad x+y=1, \quad x=0, \quad y=0.$

9. $z=0, \quad z=\sqrt{y}, \quad y=x, \quad x=1.$

10. $z=0, \quad z=y^2, \quad x=1, \quad y=2x.$

11. $z=0, \quad y=x^2, \quad z=2, \quad y=2.$

12. $z=0, \quad z=x, \quad y=0, \quad y=4, \quad x=\sqrt{25-y^2}.$

13. $z=0, \quad x^2+y^2=1, \quad z=2-x-y.$

14. $z=0, \quad z=y^2, \quad x=0, \quad x+y=2.$

15. $z=0, \quad z=x, \quad y=0, \quad y=3, \quad x=\sqrt{9-y^2}, \quad x=\sqrt{25-y^2}.$

16. $z=0, \quad z=2-x, \quad x=1, \quad x=y^2.$

17. $z=0, \quad z=2-y, \quad y=\dfrac{x^2}{2}.$

18. $z=0, \quad z=\dfrac{y^2}{2}, \quad 2x+3y=12, \quad x=0.$

19. $z=0, \quad z=9-x^2, \quad y=1, \quad y=7.$

20. $z=0, \quad z=2x^2+y^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad x+y=2.$

21. $z=0, \quad z=y^2+1, \quad x=0, \quad y=0, \quad x+y=1.$

22. $z=0, \quad z=x^2, \quad y=0, \quad x+y=2.$

23. $z=0, \quad z=1-x, \quad x=y^2.$

24. $z>0, \quad x^2+y^2=4y, \quad z^2=4-y.$

25. $z=0, \quad z=1+x^2, \quad x^2+y^2=1.$

VI. Обчислити криволінійний інтеграл (1-9**); знайти функцію по її повному диференціалу (**10 - 13**); обчислити криволінійний інтеграл за допомогою формули Гріна (** 14-20**); обчислити площу плоскої фігури за**

допомогою криволінійного інтеграла (21-23); визначити роботу силового поля $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж дуги кривої (24,25):

1. $\int\limits_L (x^2 - y^2)dx,$ L - дуга параболи $y = x^2$ від т. O(0,0) до т. A(2,4).

2. $\int\limits_L (x^2 - y^2)dy,$ L - дуга параболи $y = x^2$ від т. O(0,0) до т. A(2,4).

3. $\int\limits_L (x-y)dx + (x+y)dy,$ L- відрізок прямої, що з'єднує точки A(2,3),B(3,5).

4. $\int\limits_L (x-y)dx + (x+y)dy,$ L- дуга параболи $y = x^2$ ($0 \le x \le 2$).

5. $\int\limits_L (x-y)dx + (x+y)dy,$ L- дуга параболи $x = y^2$ від т.C(0,0) до т.D(4,2).

6. $\int\limits_L (2y - 6x^3y)dx + (2x - 9x^2y^2)dy,$ L - кубічна парабола $y = \frac{1}{4}x^3$ від т. A(0,0) до т. B(2, 2).

7. $\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$ L - коло $x = a\cos t, y = a\sin t (0 \le t \le 2p$).

8. $\int\limits_L (x+y)dx + xydy$ від т. A(2,0) до т. B(0,1) по дузі еліпса $x = 2\cos t, y = \sin t.$

9. $\int\limits_L (2-y)dx + (y-1)dy,$ L - перша арка циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ від т. O(0,0) до т. A(2p ,0).

10. $dU = (3x^2y^2 + 2x)dx + (2x^3y + 3y^2)dy.$

11. $dU = (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy.$

12. $dU = (1 - \sin 2x)dy + (3 + 2y\cos 2x)dy.$

13. $dU = \left[e^{x+y} + \cos(x-y)\ \right]dx + \left[e^{x+y} - \cos(x-y) + 2\ \right]dy.$

14. $\oint\limits_L (x+y)dx + x^2dy,$ L - контур, утворений лініями $y = x^2$ и $y = 1.$

15. $\oint\limits_L (6xy + 5y)dx + (3x^2 + 5x)dy,$ L- $y = 0,$ $x = 3,$ $y = \sqrt{x}.$

16. $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy,$ L- ΔABC: A(a,0), B(a, a),C(0,a).

17. $\oint\limits_L \frac{dx}{y}-\frac{dy}{x},$ L- ΔABC: A(1,1), B(2,1),C(2,2).

18. $\oint\limits_L -x^2ydx+xy^2dy,$ L – коло: $x^2+y^2=a^2$.

19. $\oint\limits_L \frac{y}{x}dx+2\ln xdy,$ L- ΔABC: A(1,0), B(2,0),C(1,2).

20. $\oint\limits_L \frac{1}{x}arctg\frac{y}{x}dx+\frac{2}{y}arctg\frac{x}{y}dy,$ L – коло: $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4$ (y>0),

відрізки прямих $y=x, y=\sqrt{3}x(y>0)$.

21. L: $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ (астроїда). 22. $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, x\ge 1$ (еліптичний сегмент).

23. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}, 0\le t\le 2p$ (кардіоїда).

24. $\vec{F}=y\cdot\vec{i}-x\cdot\vec{j},$ L: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,$ від т. A(2, 0) до т.B(-2, 0).

25. $\vec{F}=-x\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j},$ L: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}, 0\le t\le 2p$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1978. – Т.2.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Главная редакция физико-математической литературы,1985.
3. Щипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа,1985.
4. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике, часть IV .- Харьков: Издательство Харьковского государственного университета,1966.
5. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие. Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1967.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1972.
7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов. – 10-е издание. – М.: Наука,1990.

Навчальне видання

Швачич Геннадій Григорович
Коноваленков Володимир Степанович
Заборова Тамара Михайлівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ «Подвійні та криволінійні інтеграли»

Навчальний посібник

Тем. план 2011, поз. 293

Підписано до друку 13.05.2011. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 2,11. Умов. друк. арк. 2,09. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ