МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к решению задач по дисциплине “Высшая математика” и варианты контрольных заданий (Разделы “Интегральное исчисление”, “Дифференциальные уравнения”)

Часть II

Утверждено
на заседании Ученого совета академии
Протокол № 9 от 30.12.08

Днепропетровск НМетАУ 2009

УДК 517(075.8)
Методические указания к решению задач по дисциплине “Высшая математика” и варианты контрольных заданий (Разделы “Интегральное исчисление”, “Дифференциальные уравнения”). Часть II /Сост.: А. Н. Дук, Е. Г. Ткаченко, Н. В. Целуйко и др. - Днепропетровск: НМетАУ, 2009. – 70 с.

Методические указания содержат варианты задач по разделам “Интегральное исчисление”, “Дифференциальные уравнения” дисциплины “Высшая математика” и варианты контрольных заданий, излагаемые в соответствии со стандартом Министерства образования и науки Украины.

Предназначены для студентов всех экономических специальностей, а также для студентов с проблемами здоровья.

Составители: А. Н. Дук, ст. преподаватель
Е. Г. Ткаченко, ст. преподаватель
Н. В. Целуйко, ст. преподаватель
М. С. Сазонова, доцент
Г. М. Бартенев, ас.
В. В. Толстой, ас.

Ответственный за выпуск Г. Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Подписано к печати 25.11.09. Формат 60x84 1/16. Бумага типогр. Печать плоская. Уч.-изд. л. 4,12. Усл. печ. л. 4,06. Тираж 100 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины
49600, Днепропетровск- 5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Неопределенный интеграл.

3.1.1. Основные формулы интегрирования.

Таблица 3.1

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ x \neq -1;$	8. $\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C;$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C;$	9. $\int ctgx dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C;$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C;$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$	11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C;$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a}\right\rvert + C;$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$	14. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$

В формулах a - постоянная, x - независимая переменная, или любая дифференцируемая функция от независимой переменной. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = C - \frac{1}{2x^2}$; (*по формуле* 1 *таблицы* 3.1);

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C$; (*по формуле* 12 *таблицы* 3.1);

3. $\int 2^x \cdot 6^x dx = \int 12^x dx = \frac{12^x}{\ln 12} + C$; (*по формуле* 3 *таблицы* 3.1);

4. $\int \sqrt{x+5}\, dx = \int\int (x+5)^{\frac{1}{2}} d(x+5) = \frac{(x+5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

Самостоятельно найти интегралы:

Таблица 3.2

1. $\int x^7 dx;$	5. $\int \frac{7dx}{3^{4x}};$	9. $\int \frac{dx}{x^2+16};$
2. $\int \frac{dx}{-4x^2};$	6. $\int \frac{dx}{(x+1)^3};$	10. $\int \frac{dx}{2x^2-4};$
3. $\int (x-4)^5 dx;$	7. $\int \sqrt[6]{x^5}\,dx;$	11. $\int \sin\frac{x}{2} dx;$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}};$	8. $\int \frac{dx}{x-4};$	12. $\int e^{4x} dx.$

3.1.2. Интегрирование посредством замены переменной.

В результате применения метода замены переменной, интеграл заменяется другим интегралом, близким к табличному. Например, чтобы найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, положим $x = t^2$. Дифференцируя обе части принятой замены, находим dx: $dx = 2tdt$. Подставляя значения x, dx в исходный интеграл, получим интеграл с новой переменной t: $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{1+t}$, который является табличным. Решим его относительно переменной t.

$$\int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{1+t-1}{1+t} dt = 2\int \frac{1+t}{1+t} dx - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln|1+t| + C.$$

Вернемся к исходной переменной x, заменяя $t = \sqrt{x}$:

$$2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C.$$

Выбор удачной замены переменной имеет огромное значение, но дать одно общее правило невозможно. Рассмотрим некоторые полезные замены для важнейших типов интегралов.

1. $\int \frac{2xdx}{x^4+3} = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C.$

2. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}} = \left| \begin{matrix} 1+2\cos x = t;\ -2\sin xdx = dt \\ \sin xdx = -\frac{dt}{2} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$

$= -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = C - \sqrt{t} = C - \sqrt{1+2\cos x}.$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+a}} = \left| \begin{matrix} x^2+a = z;\ 2xdx = dz \\ xdx = \frac{dz}{2} \end{matrix} \right| = \int \frac{dz}{2\sqrt[3]{z}} = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{3}}dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}} + C =$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+a)^2} + C.$

4. $\int \frac{\sqrt{1+\ln|x|}}{x}dx = \left| \begin{matrix} 1+\ln|x| = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{t}dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln|x|)^3} + C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left| \begin{matrix} e^x+1 = t^2;\ e^x = t^2-1 \\ e^x dx = 2tdt;\ dx = \frac{2tdt}{t^2-1} \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{t(t^2-1)} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$

$= \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$

Самостоятельно найти интегралы:

Таблица 3.3

1. $\int \frac{x^2 dx}{5-x^6}$; *подстановка* $t = x^3$;	7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$;	13. $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$;
2. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$; *подстановка* $t = 3+4e^x$;	8. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}$;	14. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$.
3. $\int x^3 \sqrt{a-x^2} dx$; *подстановка* $t = \sqrt{a-x^2}$;	9. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin^2 x}}$;	
4. $\int \frac{x^2 - x}{(x-2)^3} dx$; *подстановка* $x-2=t$;	10. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$;	
5. $\int x\sqrt{a-x}dx$; *подстановка* $t^2 = a-x$;	11. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$;	
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; *подстановка* $x = \frac{1}{t}$;	12. $\int \frac{dx}{x\ln\lvert x\rvert}$;	

3.1.3. Интегрирование по частям.

Формула интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu . \tag{3.1}$$

По этой формуле взятие интеграла $\int udv$ сводится к взятию интеграла $\int vdu$. Применение формулы целесообразно, когда последний интеграл будет проще исходного, или ему подобен. Для применения формулы подынтегральное выражение разбивают на произведение множителей u и dv. За dv всегда выбирается выражение, содержащее dx.

1. $\int x\cos xdx = \left| \begin{matrix} x = u;\ dx = du;\ \cos xdx = dv \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C.$

2. $\int \frac{\ln|x|}{x^3}dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln|x|;\ du = \frac{dx}{x};\ \frac{dx}{x^3} = dv \\ v = \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right| = -\frac{\ln|x|}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{dx}{x} = -\frac{\ln|x|}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C =$

$= C - \frac{1+2\ln|x|}{4x^2}.$

3. $\int x\, arctgx dx = \left| \begin{array}{l} u = arctgx;\ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ xdx = dv;\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx -$

$-\frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}arctgx + C =$

$= C - \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}arctgx.$

4. $\int \arcsin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x;\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dx = dv;\ v = x \end{array} \right| = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Последний интеграл рассмотрим отдельно:

$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t;\ -2xdx = dt \\ xdx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$. Учитывая полученный выше результат, имеем: $\int \arcsin dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

5. $\int x^2 e^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2;\ du = 2xdx \\ e^{3x}dx = dv;\ v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right| = \frac{x^2e^{3x}}{3} - \int \frac{2xe^{3x}dx}{3}.$

Рассмотрим отдельно полученный интеграл. Применим повторно интегрирование по частям:

$\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x;\ du = dx \\ e^{3x}dx = dv;\ v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right| = \frac{2xe^{3x}}{9} - \frac{2}{3}\int \frac{e^{3x}}{3}dx = \frac{2xe^{3x}}{9} - \frac{2e^{3x}}{27}.$

С учетом результатов первого интегрирования по частям, получаем ответ:

$$\int x^2e^{3x}dx=\frac{x^2e^{3x}}{3}-\frac{2xe^{3x}}{9}+\frac{2e^{3x}}{27}+C=\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C.$$

6. $$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=e^{-x};\ du=-e^{-x}dx\\ \cos\frac{x}{2}dx=dv;\ v=2\sin\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\int 2\sin\frac{x}{2}e^{-x}dx.$$

К полученному интегралу вновь применяем интегрирование по частям:

$$2\int\sin\frac{x}{2}e^{-x}dx=\left|\begin{matrix}u=e^{-x};\ du=-e^{-x}dx\\ \sin\frac{x}{2}dx=dv;\ v=-2\cos\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2\int 2\cos\frac{x}{2}-e^{-x}dx.$$

Подставим полученный результат в предыдущее решение:

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}-4\int\cos\frac{x}{2}-e^{-x}dx;$$

$$5\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2};\ \int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2}{5}e^{-x}\left(\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\right)+C.$$

Самостоятельно найти интегралы:

Таблица 3.4

1. $\int x\sin xdx;$	4. $\int e^{3x}\sin\frac{5}{2}xdx;$	7. $\int(x^2+1)e^{2x}dx;$	10. $\int\frac{\arcsin xdx}{x^2};$
2. $\int\ln\lvert x^2\rvert dx;$	5. $\int\frac{\ln\lvert x\rvert dx}{(x+1)^2};$	8. $\int x\ln\lvert x-1\rvert dx;$	11. $\int arctg\sqrt{2x-1}\,dx.$
3. $\int arctdxdx;$	6. $\int x^2\ln\lvert x\rvert dx;$	9. $\ln\lvert 1+x^2\rvert dx;$	

3.1.4. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен.

Для отыскания интегралов такого типа следует вначале выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, в результате чего он преобразуется в квадратный двучлен.

1. $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$x^2+4x+8=(x+2)^2+4$. Запишем $d(x+2)$ вместо dx и проинтегрируем.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{2} arctg\,\frac{x+2}{2} + C.$$

2. $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$2x^2-3x+1 = 2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\right] = 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right].$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{(7-8x)dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}} = \left| \begin{matrix} x-\frac{3}{4}=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\left(7-8\left(t+\frac{3}{4}\right)\right)}{t^2-\frac{1}{16}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{7-8t}{t^2-\frac{1}{16}}dt\,.$$

Разложим полученный интеграл на два слагаемых интеграла, соответственно двум слагаемым в числителе:

$$\frac{1}{2}\int \frac{7-8t}{t^2-\frac{1}{16}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{7}{t^2-\frac{1}{16}}dt - 2\int \frac{2t}{t^2-\frac{1}{16}}dt = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right| - 2\ln\left|t^2-\frac{1}{16}\right| + C\,.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим:

$$\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right| - 2\ln\left|t^2-\frac{1}{16}\right| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right| - 2\ln\left|x^2-\frac{3}{2}x+1\right| + C\,.$$

3. $\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx = \int \frac{3x-2}{(x+3)^2}dx = \left| \begin{matrix} x+3=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{3(t-3)-2}{t^2}dt = \int \frac{3t-11}{t^2}dt =$

$$3\int \frac{dt}{t} - 11\int t^{-2}dt = 3\ln|t| + \frac{11}{t} + C = 3\ln|x+3| + \frac{11}{x+3} + C.$$

4. $\int \frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}dx$. Выделяем из подынтегральной неправильной дроби целую часть:

$\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2} = -2x+1+\frac{x-1}{2x-3x^2}$. Интегрируем по отдельности:

$$\int \frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}dx = -2\int xdx + \int dx + \int \frac{x-1}{2x-3x^2}dx\,.$$

Рассмотрим последний интеграл отдельно:

$$\int\frac{x-1}{2x-3x^2}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{(x-1)dx}{x^2-\frac{2}{3}x}=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\right|+C=-\frac{1}{3}\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x}\right|+C.$$

Окончательно получим:

$$\int\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}dx=C-x^2+x+\frac{1}{6}\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|-\frac{1}{2}\ln|x|.$$

4. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-7}}=\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-7}\right|+C.$$

5. $$\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}=\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{3\left[4-(x-1)^2\right]}}=\left|\begin{matrix}t=x-1\\ dt=dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3(t+1)-5}{\sqrt{4-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}}dt.$$

Разложим полученный интеграл на два слагаемых интеграла, соответственно двум слагаемым в числителе:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3t}{\sqrt{4-t^2}}dt-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}.$$

Решим полученные интегралы по отдельности:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3t}{\sqrt{4-t^2}}dt=\left|\begin{matrix}4-t^2=z;\ -2tdt=dz\\ tdt=-\frac{dz}{2}\end{matrix}\right|=\sqrt{3}\int\frac{-dz}{2\sqrt{z}}=-\sqrt{3z}=-\sqrt{3\cdot(4-t^2)};$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{t}{2}.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим:

$$\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}=C-\sqrt{9+6x-3x^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}.$$

$$6.\ \int \sqrt{t^2+b}\,dt = \left| \begin{matrix} u=\sqrt{t^2+b};\ du=\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2+b}} \\ dv=dt;\ v=t \end{matrix} \right| = t\sqrt{t^2+b} - \int \frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+b}} =$$

$$= t\sqrt{t^2+b} - \int \frac{t^2+b-b}{\sqrt{t^2+b}}dt = t\sqrt{t^2+b} - \int \sqrt{t^2+b}\,dt + b\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+b}};$$

$$2\int \sqrt{t^2+b}\,dt = t\sqrt{t^2+b} + b\ln\left|t+\sqrt{t^2+b}\right|;$$

$$\int \sqrt{t^2+b}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{t^2+b} + \frac{b}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+b}\right| + C.$$

Самостоятельно найти интегралы:

Таблица 3.5

1. $\int \frac{dx}{x^2-x-6}$;	4. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}dx$;	7. $\int \sqrt{x^2+4x}\,dx$;	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$;
2. $\int \frac{dx}{4x-1-4x^2}$;	5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$;	8. $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$;	11. $\int \frac{18x^2+13x}{1+6x+9x^2}dx$;
3. $\int \frac{(3x+4)dx}{x^2+5x}$;	6. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2+6x}}$;	9. $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2+3x+4}$;	12. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$

3.1.5. Интегралы от тригонометрических функций.

При взятии интегралов от тригонометрических функций воспользуемся следующими формулами:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$$

$$\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x];\ \sin ax\sin bx = [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x];$$

$$\cos ax\cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$$

$$1.\ \int \sin^2 3xdx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 6xdx = \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

$$2.\ \int \cos^4 xdx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2xdx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2xdx.$$

Рассмотрим отдельно последний интеграл:

$$\int \cos^2 2xdx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4xdx = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x.$$

Подставляя в предыдущее равенство, получим:

$$\int \cos^4 xdx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right) = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3. $\int \sin^5 xdx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin xdx = \left| \begin{matrix} \cos x = t; -\sin xdx = dt \\ \sin xdx = -dt \end{matrix} \right| = -\int (1-t^2)^2 dt =$

$$= -\int (1-2t^2 + t^4)dt = -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

4. $\int \sin^4 x \cos^2 xdx = \int \sin^2 x(\sin x \cos x)^2 dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2xdx.$$

Первый интеграл:

$$\int \sin^2 2xdx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4xdx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}.$$

Второй интеграл:

$$\int \sin^2 2x \cos 2xdx = \left| \begin{matrix} \sin 2x = z;\ 2\cos 2xdx = dz \\ \cos 2xdx = \dfrac{dz}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int z^2 dz = \frac{z^3}{6} = \frac{\sin^3 2x}{6}.$$

Подставляя результаты в исходный интеграл, получим:

$$\int \sin^4 x \cos^2 xdx = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin^3 2x}{6}\right) + C.$$

5. $\int \sin^6 2x \cos^3 2xdx$. Отделяем от меньшей нечетной степени один множитель $\cos^3 2x = \cos^2 2x \cos 2x$ и выполняем замену $\sin 2x = t$:

$$\int \sin^6 2x \cos^3 2xdx = \int \sin^6 2x(1-\sin^2 2x)\cos 2xdx = \left| \begin{matrix} \sin 2x = t;\ 2\cos 2xdx = dt \\ \cos 2xdx = \dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int t^6(1-t^2)\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^6 dt - \frac{1}{2}\int t^8 dt = \frac{t^7}{14} - \frac{t^9}{18} + C = \frac{\sin^7 2x}{14} - \frac{\sin^9 2x}{18} + C.$$

$$6. \int tg^4 x dx = \left| \begin{matrix} tgx = t; \ x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^4 dt}{1+t^2} = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \int t^2 dt - \int dt + \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + arctgt + C = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + C.$$

$$7. \int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int [\sin 8x + \sin(-2x)] dx = \frac{1}{2} \int \sin 8x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$$

Самостоятельно найти интегралы:

Таблица 3.6

1. $\int \sin 5x \sin 6x dx;$	4. $\int ctg^4 z dz;$	7. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx;$	10. $\int \sin at \cos bt dt;$
2. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx;$	5. $\int \cos^2 5x dx;$	8. $\int \sin^3 (3x+1) dx;$	11. $\int (tgz + ctgz)^3 dz;.$
3. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx;$	6. $\int \cos^6 x dx;$	9. $\int \cos \frac{4}{3} x \cos 3x dx;$	12. $\int tg^3 (7x - 11) dx.$

3.1.6. Интегрирование рациональных функций.

Для решения интегралов данного типа необходимо неправильные дроби привести к правильным путем выделения целой части, а знаменатели правильных дробей – разложить на простейшие действительные множители.

1. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} dx$. Разложим знаменатель на простейшие действительные множители: $x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2$.

Схема разложения подынтегральной дроби на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2};$$

$$3x^2 + 8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного равенства:

$x^2 : 3 = A + B;$

$x^1 : 0 = 4A + 2B + C;$

$x^0 : 8 = 4A;$

$A = 2;\ B = 3 - A = 3 - 2 = 1;\ C = 0 - 4A - 2B = -10.$

Подставим найденные значения в схему разложения:

$\dfrac{3x^2 + 8}{x(x+2)^2} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{10}{(x+2)^2}$. Возвращаемся к исходному интегралу:

$$\int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2} \right) dx = 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx$. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2}.$$

Разложим знаменатель на простейшие действительные множители, а затем подынтегральную дробь на элементарные слагаемые дроби:

$x^4 + 3x^2 = x^2(x^2 + 3);$

$\dfrac{1}{x^2(x^2+3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + 3};$

$1 = Ax(x^2 + 3) + B(x^2 + 3) + (Cx + D)x^2;$

$x^3 : 0 = A + C;\ x^2 : 0 = B + D;\ x^1 : 0 = 3A;\ x^0 : 1 = 3B;$

$A = 0;\ B = \dfrac{1}{3};\ C = 0;\ D = -\dfrac{1}{3};$

$\dfrac{1}{x^2(x^2+3)} = \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{1}{3(x^2+3)}.$

Возвращаясь к интегралу, получим:

$$\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx = \int \left(2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)} \right) dx = 2\int x dx + \frac{1}{3}\int x^{-2} dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 + 3} = x^2 - \frac{1}{3x} -$$

$$- \frac{1}{3\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx$.

Разложим подынтегральную правильную дробь на элементарные слагаемые дроби:

$$x^4 + x = x(x^3 + 1) = x(x+1)(x^2 - x + 1);$$

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1};$$

$$x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = A(x^3 + 1) + Bx(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x) =$$

$$= (A + B + C)x^3 + (C + D - B)x^2 + (B + D)x + A;$$

$$x^3 : 1 = A + B + C;\ x^2 : 4 = C + D - B;\ x^1 : -2 = B + D;\ x^0 : 1 = A;$$

$$A = 1;\ B = -2;\ C = 2;\ D = 0;$$

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2 - x + 1}.$$

Возвращаясь к интегралу, получим:

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2 - x + 1} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{x}{x^2 - x + 1} dx =$$

$$= \ln|x| - 2\ln|x+1| + 2\int \frac{x}{x^2 - x + 1} dx.$$

Последний интеграл находим отдельно:

$$2\int \frac{x}{x^2 - x + 1} dx = 2\int \frac{x dx}{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right| = 2\int \frac{t + \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{2t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt + \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \ln\left| t^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} = \ln\left| \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2\left(x - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя в предыдущее равенство, найдем:

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx = \ln|x| - 2\ln|x+1| + \ln\left| \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{(x^3 - 3)dx}{x^4 + 10x^2 + 25}$.

Разложим подынтегральную правильную дробь на элементарные слагаемые дроби:

$$x^4+10x^2+25=(x^2+5)^2;$$

$$\frac{(x^3-3)}{(x^2+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+5)^2};$$

$$(x^3-3)=(Ax+B)(x^2+5)+(Cx+D)=Ax^3+5Ax+Bx^2+5B+Cx+D;$$

$$x^3:1=A;\ x^2:0=B;\ x^1:0=5A+C;\ x^0:-3=D;\ C=0-5A=-5;$$

$$\frac{(x^3-3)}{(x^2+5)^2}=\frac{x}{x^2+5}-\frac{5x+3}{(x^2+5)^2}.$$

Возвращаясь к интегралу, получим:

$$\int\frac{(x^3-3)dx}{x^4+10x^2+25}=\int\frac{xdx}{x^2+5}-\int\frac{5x}{(x^2+5)^2}dx-\int\frac{3}{(x^2+5)^2}dx.$$

Рассмотрим интегралы по отдельности:

$$\int\frac{xdx}{x^2+5}=\left|\begin{matrix}x^2+5;\ 2xdx=dt\\ xdx=\dfrac{dt}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+5\right|;$$

$$\int\frac{xdx}{\left(x^2+5\right)^2}=\left|\begin{matrix}x^2+5;\ 2xdx=dt\\ xdx=\dfrac{dt}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int t^{-2}dt=-\frac{1}{2t}=-\frac{1}{2(x^2+5)};$$

$$3\int\frac{dx}{\left(x^2+5\right)^2}=\left|\begin{matrix}x=\sqrt{5}\,tgz\\ dx=\dfrac{\sqrt{5}dz}{\cos^2 z}\end{matrix}\right|=3\int\frac{\sqrt{5}dz}{\cos^2 z(5tg^2z+5)^2}=\frac{3}{5\sqrt{5}}\int\cos^2 zdz=$$

$$=\frac{3}{10\sqrt{5}}\int(1+\cos 2z)dz=\frac{3}{10\sqrt{5}}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)=\frac{3}{10\sqrt{5}}\left(arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{x\sqrt{5}}{x^2+5}\right)$$

Окончательно имеем:

$$\int\frac{(x^3-3)dx}{x^4+10x^2+25}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+5\right|+\frac{5}{2(x^2+5)}-\frac{3}{10\sqrt{5}}\left(arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{x\sqrt{5}}{x^2+5}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+5\right|+\frac{25-3x}{10(x^2+5)}-\frac{3}{10\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Самостоятельно найти интегралы:

Таблица 3.7

1. $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$;	4. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$;	7. $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$;
2. $\int \frac{xdx}{x^3 - 1}$;	5. $\int \frac{(x+1)dx}{x^4 + 4x^2 + 4}$;	8. $\int \frac{2x^5 - 2x + 1}{1 - x^4} dx$;
3. $\int \frac{(7x-15)dx}{x^3 - 2x^2 + 5x}$;	6. $\int \frac{dx}{x^3 + x}$;	9. $\int \frac{x^4 dx}{x^4 - 2x^2 + 1}$.

3.1.7. Интегрирование иррациональных функций.

$$1.\ \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t}{t^4+t^2} 4t^3 dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt = 4\int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 4\int dt + 4\int \frac{tdt}{t^2+1} - 4\int \frac{dt}{t^2+1} = 4t + 2\ln(t^2+1) - 4arctgt + C.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| - 4arctg\sqrt[4]{x} + C.$$

$$2.\ \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = \left| \begin{matrix} \frac{1+x}{x} = t^2;\ x = \frac{1}{t^2-1} \\ dx = -\frac{2tdt}{(t^2-1)^2} \end{matrix} \right| = -\int (t^2-1)^2 t \frac{2tdt}{(t^2-1)^2} = -2\int t^2 dt = -\frac{2t^3}{3} + C =$$

$$= C - \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}.$$

$$3.\ \int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx = \left| \begin{matrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t} 2\cos tdt = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{ctg^4 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} ctgt = z \\ -\frac{dt}{\sin^2 t} = dz \end{matrix} \right| = -\frac{1}{4}\int z^4 dz = -\frac{z^5}{20} + C = -\frac{ctg^5 t}{20} + C = C - \frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}.$$

$$4.\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}=\left|\begin{array}{l}1+x^3=x^3z^3;\ x^3=\dfrac{1}{z^3-1}\\ x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}};\ dx=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz\end{array}\right|=$$

$$=-\int(z^3-1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{z^3}{z^3-1}\right)^{-\frac{5}{3}}z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz=\int\frac{1-z^3}{z^3}dz=\int z^{-3}dz-\int dz=-\frac{1}{2z^2}-z+C=$$

$$=C-\frac{1+2z^3}{2z^2}=C-\frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}.$$

Самостоятельно найти интегралы:

Таблица 3.8

1. $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$;	4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$;	7. $\int\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$;
2. $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx$;	5. $\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^3}}$;	8. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$;
3. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$;	6. $\int x\sqrt{3-x}\,dx$;	9. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+C}}$.

3.1.8.Интегрирование некоторых трансцендентных функций.

$$1.\ \int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}.$$

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}=\left|\begin{array}{l}tg\,\dfrac{x}{2}=z;\ \sin x=\dfrac{2z}{1+z^2}\\ \cos x=\dfrac{1-z^2}{1+z^2};\ dx=\dfrac{2dz}{1+z^2}\end{array}\right|=\int\frac{2dz}{z^2+4z-1}=2\int\frac{dz}{(z+2)^2-5}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z+2-\sqrt{5}}{z+2+\sqrt{5}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2-\sqrt{5}+tg\,\frac{x}{2}}{2+\sqrt{5}+tg\,\frac{x}{2}}\right|+C.$$

$$2.\ \int \frac{tgxdx}{1-ctg^2x} = \left| \begin{array}{l} tgx = z;\ x = arctgz \\ dx = \dfrac{dz}{1+z^2} \end{array} \right| = \int \frac{z^3dz}{z^4-1} = \left| \begin{array}{l} z^4-1 = t \\ 4z^3dz = dt \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|z^4-1| + C = \frac{1}{4}\ln|tg^4x-1| + C.$$

$$3.\ \int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1} = \left| \begin{array}{l} e^x = z \\ dx = \dfrac{dz}{z} \end{array} \right| = \int \frac{z^3dz}{(z^2+1)z} = \int \frac{z^2dz}{z^2+1} = \int \left(1-\frac{1}{z^2+1}\right)dz = \int dz - \int \frac{dz}{z^2+1} =$$

$$= z - arctgz + C = e^x - arctg\, e^x + C.$$

Самостоятельно найти интегралы:

Таблица 3.9

1. $\int \frac{\cos xdx}{1+\cos x}$;	4. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{1+e^{3x}}dx$;	7. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$;
2. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$;	5. $\int \frac{1+tgx}{\sin 2x}dx$;	8. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$;
3. $\int tg^5 3xdx$;	6. $\int \frac{dx}{1+tgx}$;	9. $\int \frac{e^{2x}dx}{(2+e^x+e^{-x})^2}$.

3.2. Определенный интеграл.

3.2.1. .Основные свойства определенного интеграла.

Свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов меняется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \int_a^b f_3(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

6. Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Вычислить интегралы:

1. $\int_2^3 3x^2dx = 3\int_2^3 x^2dx = x^3\Big|_2^3 = 3^3-2^3 = 19.$

2. $\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = \left(x+4e^{\frac{x}{4}}\right)\Bigg|_0^4 = 4+4e-4 = 4e.$

3. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} = \int_{-1}^7 (x+4)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x+4}\Big|_{-1}^7 = 2\sqrt{11}-2\sqrt{3}.$

4. $\int_0^{\frac{p}{2}} (x+3)\sin x dx = \begin{vmatrix} u=x+3;\ du=dx \\ dv=\sin x dx;\ v=-\cos x \end{vmatrix} = -(x+3)\cos x\Big|_0^{\frac{p}{2}} - \int_0^{\frac{p}{2}} -\cos x dx =$

$= 3+\sin x\Big|_0^{\frac{p}{2}} = 4.$

Самостоятельно найти интегралы:

Таблица 3.10

1. $\int_1^5 \frac{dx}{x-2};$	4. $\int_{-p}^{p} x\sin x\cos x dx;$	7. $\int_0^p \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx;$
2. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4};$	5. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3};$	8. $\int_1^e (1+\ln x)^2 dx.$
3. $\int_{-a}^{a} x\cos\frac{x}{a}dx;$	6. $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}dx;$	

3.2.2. Замена переменной в определенном интеграле.

При выполнении замены в определенном интеграле, кроме перехода к новой переменной, допустим t, необходимо от исходных пределов $x_1 = a;\ x_2 = b$ перейти к новым пределам $t_1 = a;\ t_2 = b$, которые определяются из исходной подстановки $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b F(t)dt$.

Вычислить интегралы:

1. $$\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{1+3x} = t;\ x = \dfrac{t^2-1}{3} \\ dx = \dfrac{2}{3}tdt;\ t_1 = 1;\ t_2 = 4 \end{matrix} \right| = \frac{2}{9}\int\limits_1^4 (t^2-1)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3} - 4 + 1\right) = 4.$$

2. $$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \left| \begin{matrix} e^x = t;\ dx = \dfrac{dt}{t} \\ t_1 = 2;\ t_2 = 3 \end{matrix} \right| = \int\limits_2^3 \frac{dt}{t\left(t - \dfrac{1}{t}\right)} = \int\limits_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 3.$$

3. $$\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{matrix} x = 2\sin t;\ dx = 2\cos tdt \\ t_1 = \dfrac{p}{6};\ t_2 = \dfrac{p}{3} \end{matrix} \right| = \int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} \frac{8\sin^3 t + 1}{4\sin^2 t}dt = 2\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} \sin tdt + \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

$$= \left(-2\cos t - \frac{1}{4}ctgt\right)\Bigg|_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} = -2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1.$$

4. $$\int\limits_0^{2p} \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{matrix} tg\dfrac{x}{2} = z;\ \cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2} \\ dx = \dfrac{2dz}{1+z^2};\ z_1 = 0;\ z_2 = 1 \end{matrix} \right| = 2\int\limits_0^1 \frac{dz}{z^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{z}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{p}{6} = \frac{p}{3\sqrt{3}}.$$

Самостоятельно найти интегралы:

Таблица 3.11

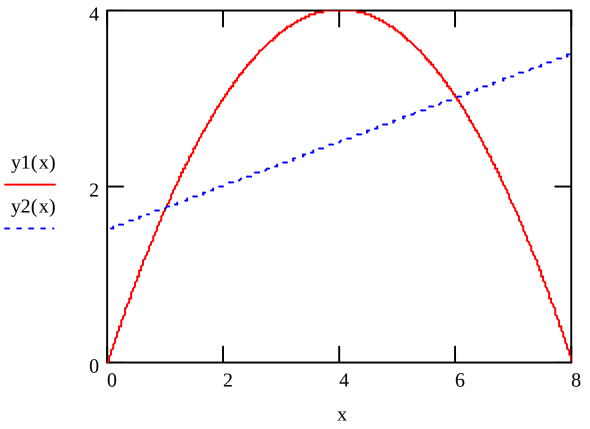
1. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)^4}$; *Подстановка* $x+1=t$;	6. $\int_5^1 \frac{tdt}{\sqrt{\sqrt{5+4t}}}$;
2. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$; *Подстановка* $\sqrt{e^x-1}=t$;	7. $\int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$;
3. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$; *Подстановка* $t=x^2+1$;	8. $\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}}dx$;
4. $\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}$; *Подстановка* $t=1+\ln x$;	9. $\int_0^{\frac{p}{4}} \frac{1+tg^2x}{1+tgx}dx$;
5. $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$; *Подстановка* $x=3\cos t$;	10. $\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx$.

3.2.3. Применение определенного интеграла для нахождения площади плоской фигуры.

Вычислить площадь, ограниченную следующими линиями:

1. Параболой $4y=8x-x^2$ и прямой $4y=x+6$.

Совместно решая оба уравнения, определим точки пересечения линий:
$\begin{cases}4y=8x-x^2\\4y=x+6\end{cases}$. Приравняем правые части $8x-x^2=x+6$; $x^2-7x+6=0$. Решая квадратное уравнение, находим значения x: $x_1=1$; $x_2=6$. По известным значениям x находим y: $y=\frac{x+6}{4}$; $y_1=\frac{7}{4}$; $y_2=3$. Получаем две точки пересечения: $A\left(1;\ \frac{7}{4}\right)$, $B(6;\ 3)$. Построим данные линии:



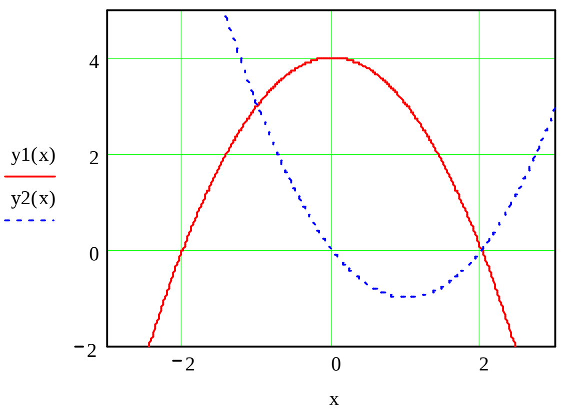
Искомая площадь находится как разность площади параболы и площади прямой:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{4}\int_1^6 (8x - x^2)dx - \frac{1}{4}\int_1^6 (x+6)dx = \frac{1}{4}\left(4x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^6 - \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} - 6x\right)\Bigg|_1^6 =$$

$$= \frac{205}{12} - \frac{95}{8} = \frac{125}{24}.$$

2. Параболами $y = 4 - x^2$; $y = x^2 - 2x$.

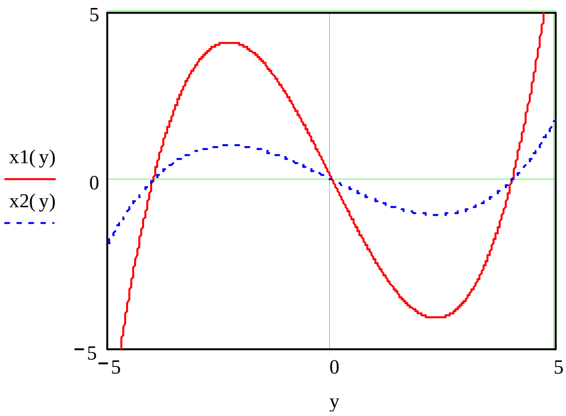
Совместно решая оба уравнения, определим точки пересечения линий: $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$. Приравняем правые части $4 - x^2 = x^2 - 2x$; $x^2 - x - 2 = 0$. Решая квадратное уравнение, находим значения x: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$. По известным значениям x находим $y: y_1 = 3$; $y_2 = 0$. Получаем две точки пересечения: $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 0)$. Построим данные линии:



Искомая площадь находится как разность площадей парабол:

$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2}(4-x^2)dx - \int_{-1}^{2}(x^2-2x)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} - \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} + 1\right) = 9.$$

3. Кубическими параболами $6x = y^3 - 16y$; $24x = y^3 - 16y$.



Приравнивая левые части уравнений, находим значение x: $6x = 24x$; $x = 0$. Соответственно, находим значения y:

$y^3 - 16y = 0$; $y(y^2 - 16) = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = -4$; $y_3 = 4$.

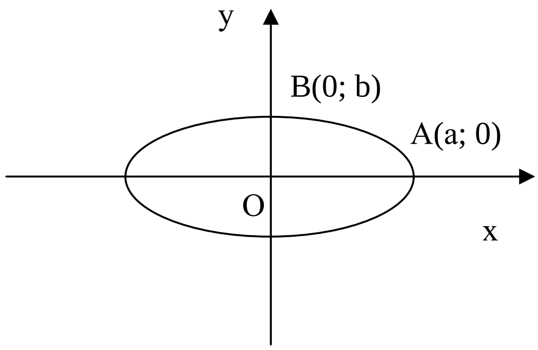
Точки пересечения линий: $O(0;\ 0)$, $A(0;\ -4)$, $B(0;\ 4)$. Искомая площадь состоит из двух одинаковых частей, поэтому найдем половину ее как разность площадей кубических парабол и затем умножим на два.

$$S = 2(S_1 - S_2) = 2\left(\frac{1}{6}\int_{4}^{0}(y^3 - 16y)dy - \frac{1}{24}\int_{4}^{0}(y^3 - 16y)dy\right) = \frac{1}{4}\int_{4}^{0}(y^3 - 16y)dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{y^4}{4} - 8y^2\right)\Bigg|_{4}^{0} = \frac{1}{4}(-64 + 128) = 16.$$

4. Эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

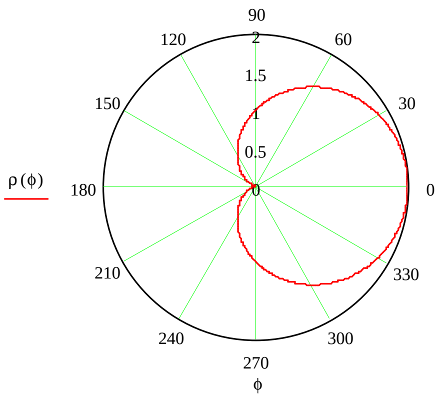
Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса, поэтому делят его на четыре равные части. Найдем площадь части, лежащей в первой четверти и результат умножим на четыре $S = 4\int_{0}^{a} y\,dx$.



Преобразуем интеграл к переменной t, пользуясь исходными параметрическими уравнениями $\left| \begin{matrix} y = b\sin t;\ dx = -a\sin t dt \\ x_1 = 0;\ x_2 = a;\ t_1 = \dfrac{\pi}{2};\ t_2 = 0 \end{matrix} \right|$. Получим:

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -b\sin t \cdot a\sin t\, dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

5. Кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$.



Кардиоида симметрична относительно полярной оси, поэтому площадь ее равна удвоенной площади верхней части, построенной при изменении $0 < \varphi < \pi$. Для линий, заданных в полярных координатах, площадь определяется как:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=$$

$$+a^2\left[\int_0^{\pi}d\varphi+2\int_0^{\pi}\cos\varphi\, d\varphi+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right]=a^2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

Самостоятельно найти площадь, ограниченную следующими линиями:

Таблица 3.12

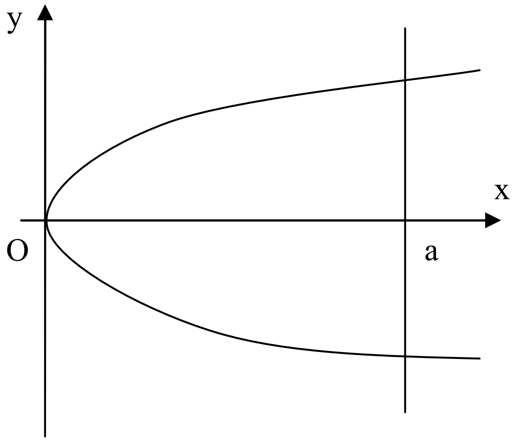
1. Параболой $y=6x-x^2$ и осью Ox.
2. Полукубической параболой $y^2=x^3$ и прямыми $x=0;\ y=4$.
3. Астроидой $x=a\cos^3 t;\ y=a\sin^3 t$.
4. Параболой $y=x^2+4x$ и прямой $x-y+4=0$.
5. Гиперболой $xy=6$ и прямой $y=7-x$.
6. Кубической параболой $y=x^3$ и прямыми $y=x;\ y=2x$.
7. Окружностью $x^2+y^2=4x$ и параболой $y^2=2x$.
8. Лемнискатой $\rho^2=a^2\cos\varphi$.
9. Трехлепестковой розой $\rho=a\cos 3\varphi$.
10. Кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$ и окружностью $\rho=a$.

3.2.4. Применение определенного интеграла для нахождения объема тела вращения.

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1. $y^2=2px;\ x=a$, вокруг оси Ox.

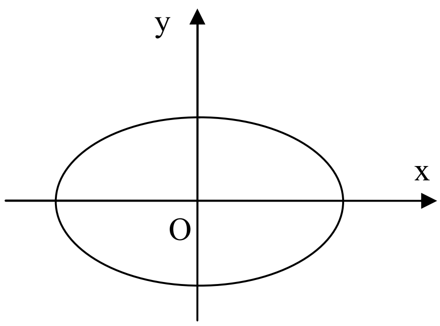
Построим параболу и прямую:



При вращении полученной фигуры образуется сегмент параболоида вращения. Объем этого тела :

$$V = p\int_{x_1}^{x_2} y^2dx = p\int_0^a 2pxdx = ppx^2\Big|_0^a = ppa^2.$$

2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b_2}=1$, вокруг оси Oy.



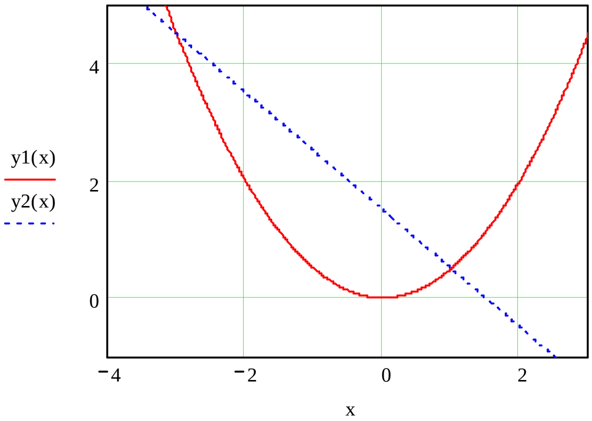
Если у данного эллипса $b<a$, при вращении его вокруг малой оси получаем сжатый эллипсоид вращения, с объемом:

$$V_1 = p\int_{y_1}^{y_2} x^2dy = p\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2pa^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_{-b}^{b} = \frac{4}{3}pa^2b.$$

При вращении эллипса вокруг большой оси получаем удлиненный

эллипсоид вращения, объем которого соответственно $V_2 = \dfrac{4}{3}pab^2$.

3. $2y = x^2$; $2x+2y-3=0$, вокруг оси Ox.



Ограниченная данными линиями фигура, при вращении вокруг оси Ox образует тело, объем которого можно найти как разность объемов тел V_1 и V_2, где V_1 - объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox прямой $2x+2y-3=0$; V_2 - объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox параболы $2y=x^2$. Точки пересечения линий нужны для определения пределов интегрирования. Выразим y из уравнения параболы и подставим у в уравнение прямой. Тогда:

$$y=\frac{x^2}{2};\ 2x+2\cdot\frac{x^2}{2}-3=0;\ x^2+2x-3=0;\ x_1=-3;\ x_2=1.$$

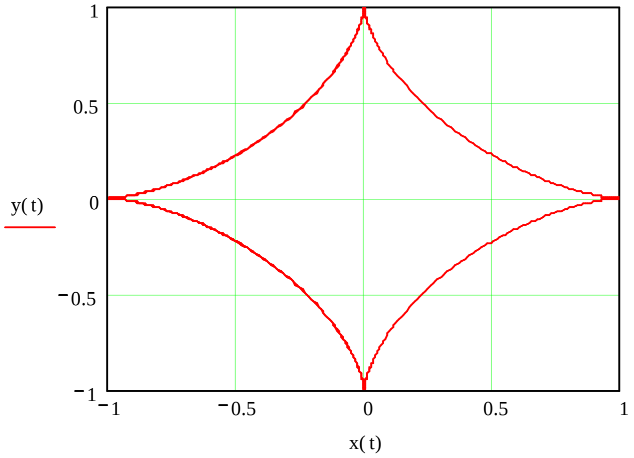
Соответственно, находим y: $y_1=\frac{9}{2}$; $y_2=\frac{1}{2}$. Точки пересечения: $A\left(-3;\ \frac{9}{2}\right)$, $B\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$. Находим V_1 и V_2:

$$V_1=p\int_{x_1}^{x_2}y^2dx=p\int_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2}-x\right)^2dx=p\left.\frac{\left(\frac{3}{2}-x\right)^3}{3}\right|_{-3}^{1}=\frac{91}{3}p\ .$$

$$V_2=p\int_{-3}^{1}\frac{x^4}{4}dx=p\left.\frac{x^5}{20}\right|_{-3}^{1}=\frac{p}{20}(1+243)=\frac{61}{5}p\ .$$

$$V=V_1-V_2=\left(\frac{91}{3}-\frac{61}{5}\right)p=\frac{272}{15}p\ .$$

4. $x=a\cos^3 t;\ y=a\sin^3 t$, вокруг оси Ox.



При построении получаем астроиду. Фигура, ограниченная астроидой, при вращении вокруг оси Ox образует тело, объем которого:

$$V = p\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = p\int_{-a}^{a} y^2 dx = 2p\int_{0}^{a} y^2 dx .$$

Исходя из данных параметрических уравнений астроиды $x = a\cos^3 t;\ y = a\sin^3 t$, преобразуем приведенный выше интеграл к переменной t: $y^2 = a^2 \sin^6 t;\ dx = -3a\cos^2 t \sin t dt;\ x_1 = 0;\ x_2 = a;\ t_1 = \frac{p}{2};\ t_2 = 0$.

Тогда:

$$V = 2p\int_{0}^{a} y^2 dx = -6a^3 p\int_{\frac{p}{2}}^{0} \sin^6 t \cos^2 t \sin t dt = 6a^3 p\int_{0}^{\frac{p}{2}} \left(1-\cos^2 t\right)^3 \cos^2 t \sin t dt =$$

$$= 6a^3 p\int_{0}^{\frac{p}{2}} \left(\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t\right)\sin t dt = = \begin{vmatrix} \cos t = z;\ -\sin t dt = dz \\ z_1 = 1;\ z_2 = 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -6a^3 p\int_{1}^{0} \left(z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8\right)dz = 6a^3 p\left(\frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{32}{105}pa^3 .$$

Самостоятельно найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

Таблица 3.13

1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;\ y = 0;\ y = b$ вокруг оси Oy.
2. $y = \sin x$ (одной волной); $y = 0$ вокруг оси Ox.

3. $y^2 + x - 4 = 0;\ x = 0$ вокруг оси Oy.	
4. $xy = 4;\ y = 0;\ x = 1;\ x = 4$ вокруг оси Ox.	
5. $y^2 = (x+4)^3;\ x = 0$ вокруг оси Oy.	
6. $y = x^2;\ y = 4$ вокруг прямой $x = -2$.	
7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a};\ x = 0;\ y = 0$ вокруг оси Oy.	

3\. 2. 5. Несобственные интегралы.

К ним относят интегралы с бесконечными пределами или от разрывных функций.

1\. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}(e^0 - e^{-3}) = 1.$

2\. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{x^2+1} + \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{a\to-\infty} arctgx\Big|_a^0 + \lim\limits_{b\to\infty} arctgx\Big|_0^b =$
$= arctg(\infty) - arctg(-\infty) = p.$

3\. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x}$. Здесь при $x = 0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв.

$\int\limits_0^1\frac{dx}{x} = \lim\limits_{e\to+0}\int\limits_e^1\frac{dx}{x} = \lim\limits_{e\to+0}(\ln 1 - \ln e) = -\ln(0) = \infty.$

4\. $\int\limits_{-1}^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$.

$$\int\limits_{-1}^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim\limits_{e_1\to-\infty}\int\limits_{-1}^{1-e_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim\limits_{e_2\to\infty}\int\limits_{1+e_2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim\limits_{e_1\to-\infty} 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{-1}^{1-e_1} + \lim\limits_{e_2\to-\infty} 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+e_2}^{2} =$$
$$= 3\lim\limits_{e_1\to-\infty}\left(\sqrt[3]{-e_1} - \sqrt[3]{-2}\right) + 3\lim\limits_{e_2\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{e_2}\right) = 3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

$$5.\ \int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{matrix} x = 2\sin t;\ dx = 2\cos t dt \\ t_1 = 0;\ t_2 = \dfrac{p}{2} \end{matrix} \right| = 8\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin^3 t \cos t}{\cos t} dt = 8\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^3 t dt =$$

$$= 8\int_0^{\frac{p}{2}} (1-\cos^2 t)\sin t dt = 8\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{\frac{p}{2}}^{0} = \frac{16}{3}.$$

Здесь в результате замены переменной, данный несобственный интеграл преобразовался в собственный, который может быть вычислен без предельного перехода.

Самостоятельно вычислить несобственные интегралы:

Таблица 3.14

1. $\int_{-\infty}^{1} e^t dt;$	4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2};$	7. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2};$
2. $\int_0^1 \ln x dx;$	5. $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}};$	8. $\int_{-2}^{2} \frac{xdx}{x^2-1}.$
3. $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx;$	6. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x^2)}}$	

4.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

4.1.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением ***с разделёнными переменными*** называется уравнение вида

$$f(x)dx = j(y)dy. \tag{0.1}$$

Задача 4.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{e^y} = \sqrt{x}dx.$$

Уравнение является уравнением вида (0.1), т.е. дифференциальным уравнением с разделёнными переменными. Метод его решения состоит в интегрировании обеих частей уравнения, т.е. интегрируя обе его части

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int \sqrt{x}dx,$$

т.к. $\int \frac{dy}{e^y} = \int e^{-y}dy = -e^{-y} + c_1 = -\frac{1}{e^y} + c_1$; $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c_2 = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c_2$,

получим общий интеграл дифференциального уравнения в виде:

$$-\frac{1}{e^y} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c.$$

Дифференциальным уравнением ***с разделяющимися переменными*** называется уравнение вида

$$f_1(x) \cdot j_1(y)dx + f_2(x) \cdot j_2(y)dy = 0 \tag{0.2}$$

или вида

$$y' = f(x) \cdot j(y). \tag{0.3}$$

Метод решения состоит в сведении его путём разделения переменных к дифференциальному уравнению с разделёнными переменными (0.1) и его решению.

Задача 4.2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$x\sqrt{1-y^2}dx - y(4+x^2)dy = 0.$$

1. Запишем уравнение в виде $x\sqrt{1-y^2}\,dx = y(4+x^2)dy$.

2. Разделим переменные, т.е. добьёмся того, чтобы при dx и dy не было "чужих" переменных ("чужой" для dx является переменная y, а для dy – x). Для этого разделим обе части уравнения на выражения, содержащие "чужие" переменные, т.е. на $\sqrt{1-y^2}$ и на $(4+x^2)$:

$$\frac{x\sqrt{1-y^2}\,dx}{\sqrt{1-y^2}\,(4+x^2)} = \frac{y(4+x^2)dy}{\sqrt{1-y^2}\,(4+x^2)};$$

$$\frac{xdx}{(4+x^2)} = \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

3. Проинтегрируем обе части уравнения, т.е.

$$\int\frac{xdx}{(4+x^2)} = \int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Т.к. $\int\frac{xdx}{(4+x^2)} = \left|\begin{matrix} t = 4+x^2 \\ dt = 2xdx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{(4+x^2)} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c_1 = \frac{1}{2}\ln|4+x^2| + c_1$, а

$\int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \left|\begin{matrix} t = 1-y^2 \\ dt = -2ydy \end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}\int\frac{-2ydx}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + c_2 = -\sqrt{1-y^2} + c_2$,

то получим общий интеграл уравнения в виде:

$$\frac{1}{2}\ln|4+x^2| + c = -\sqrt{1-y^2}.$$

Задача 4.3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y^2-4}{x}.$$

1. Т.к. $y' = \frac{dy}{dx}$, то перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-4}{x}.$$

2. Умножим обе части уравнения на dx. Получим

$$dy = \frac{y^2-4}{x}dx.$$

3. Разделим переменные. Для этого обе части уравнения разделим на (y^2-4). Получим уравнение

$$\frac{dy}{y^2-4}=\frac{dx}{x}.$$

4. Проинтегрируем обе части уравнения, т.е.

$$\int\frac{dy}{y^2-4}=\int\frac{dx}{x}.$$

Т.к. $\int\frac{dy}{y^2-4}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{4}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{4}}{y+\sqrt{4}}\right|+c_1=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|+c_1$, а $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c_2$, то получим общий интеграл уравнения в виде

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=\ln|x|+c,$$

или в виде

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=\ln|x|+\ln c.$$

Последнее равенство, пользуясь свойствами логарифмов

$$\ln a+\ln b=\ln ab,$$
$$n\cdot\ln a=\ln a^n,$$

можно переписать в виде

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|^{\frac{1}{4}}=\ln(|x|\cdot c).$$

Тогда потенцируя последнее равенство, можно переписать его в виде

$$\left|\frac{y-2}{y+2}\right|^{\frac{1}{4}}=|x|\cdot c,$$

т.е. общий интеграл уравнения имеет вид:

$$\sqrt[4]{\left|\frac{y-2}{y+2}\right|}=|x|\cdot c$$

<u>Задача 4.4.</u> Найти решение задачи Коши

$$yy'+x=0, \qquad y(-2)=4.$$

1. Найдём общий интеграл уравнения. Определим вид уравнения. Приведём его к виду (0.1). Для этого разделим обе части на y, т.е.

$$y' + \frac{x}{y} = 0,$$

и перенесём $\frac{x}{y}$ в правую часть уравнения:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными вида (0.3).

2. Т.к. $y' = \frac{dy}{dx}$, то перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

2. Умножим обе части уравнения на dx. Получим

$$dy = -\frac{x}{y}dx.$$

3. Разделим переменные. Для этого обе части уравнения умножим на y. Получим уравнение

$$ydy = -xdx.$$

4. Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int ydy = -\int xdx.$$

Получим общий интеграл уравнения в виде

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c. \qquad (0.4)$$

5. Теперь найдём частное решение уравнения, т.е. решение задачи Коши, используя дополнительное условие $y(\underbrace{-2}_{x}) = \underbrace{4}_{y}$:

$$\frac{4^2}{2} = -\frac{(-2)^2}{2} + c;$$

$$8 = -2 + c;$$

$$c = 10.$$

Подставляя полученное значение $c = 10$ в общий интеграл (0.4), получим частное решение уравнения, которое является решением задачи Коши:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + 10.$$

ЗАДАНИЕ 4.1

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $\dfrac{dy}{tgx} + ydx = 0$;

2. $y(3x+1)dy + (4-16y^2)dx = 0$;

3. $x\sqrt{4-y^2}dx - (y+1)(16+x^2)dy = 0$

4. $y' = \dfrac{2y}{x}$;

5. $x^2y' + y^2 = 0$;

6. $y' = \sqrt{x}e^y$;

7. $xy' - \dfrac{1}{\sin 5y} = 0$;

8. $y' = 5^{x-y}$.

Найти решение задачи Коши:

1. $y' = y^2, \ \ y(1) = -1$;

2. $x(2y+1)dx + (5-3x^2)dy = 0,$ $y(1) = 0$;

3. $xy' - y = 0, \ y(-2) = 4$;

4. $2\sqrt{x}dy - ydx = 0,$ $y(4) = 1$;

5. $y' = (2y+1)ctgx,$ $y\left(\dfrac{p}{4}\right) = 0{,}5$;

6. $\dfrac{dy}{\ln x} = 2\sqrt{y}dx,$ $y(e) = 1$;

7. $(3y^2-4)dx - \cos^2 xdy = 0,$ $y\left(\dfrac{p}{4}\right) = 0.$

4.1.2. Однородные дифференциальные уравнения

Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{0.5}$$

где $P(x,y), Q(x,y)$ –однородные функции одной и той же степени, или вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (0.6)$$

Однородное дифференциальное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{y}{x} &= t, \\ y' &= t + xt'. \end{aligned}} \qquad (0.7)$$

<u>Задача 4.5.</u> Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Уравнение является однородным, т.к. может быть представлено в виде (0.6). При помощи замены (0.7) получим:

$$t + xt' = e^t + t;$$

$$xt' = e^t;$$

$$t' = \frac{e^t}{x},$$

т.е. дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{e^t}{x}, \ | \cdot dx$$

$$dt = \frac{e^t}{x} dx, \ |: e^t$$

$$\frac{dt}{e^t} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dt}{e^t} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-e^{-t} = \ln|x| + c;$$

$$-\frac{1}{e^t} = \ln|x| + c.$$

С учётом того, что $t=\frac{y}{x}$, общий интеграл дифференциального уравнение будет иметь вид: $-\frac{1}{e^{\frac{y}{x}}}=\ln|x|+c$.

<u>Задача 4.6.</u> Найти решение задачи Коши

$$(x^2-2xy)dy+(y^2-xy)dx=0, \qquad y(1)=1.$$

Уравнение является однородным, т.к. может быть представлено в виде (0.5), где функции $Q(x,y)=(x^2-2xy)$, $P(x,y)=(y^2-xy)$ являются однородными одного и того же второго порядка:

$$P(tx,ty)=((ty)^2-tx\cdot ty)=t^2(y^2-xy)=t^2P(x,y),$$

$$Q(tx,ty)=((tx)^2-2\cdot tx\cdot ty)=t^2(x^2-2xy)=t^2Q(x,y).$$

1. Приведём уравнение к виду (0.5).

Для этого обе части уравнения поделим на dx:

$$(x^2-2xy)\frac{dy}{dx}+(y^2-xy)=0.$$

С учётом того, что $y'=\frac{dy}{dx}$, уравнение перепишем в виде

$$(x^2-2xy)y'+(y^2-xy)=0.$$

Выражая отсюда y', получим уравнение в виде

$$y'=-\frac{y^2-xy}{x^2-2xy},$$

от которого можно перейти к виду (0.5), поделив числитель и знаменатель на x^n, где n – порядок однородных функций $Q(x,y)=(x^2-2xy)$ и $P(x,y)=(y^2-xy)$, т.е. на x^2:

$$y'=-\frac{\frac{y^2}{x^2}-\frac{xy}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2xy}{x^2}},$$

$$y' = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}}{1 - \frac{2y}{x}}.$$

2. При помощи замены (0.7) получим:

$$t + xt' = -\frac{t^2 - t}{1 - 2t}.$$

Покажем, что полученное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Для этого приведём его к виду (0.3)

$$xt' = -\frac{t^2 - t}{1 - 2t} - t^{\frac{(1-2t)}{\square\square\square\square}};$$

$$xt' = \frac{-t^2 + t - t + 2t^2}{1 - 2t};$$

$$xt' = \frac{t^2}{1 - 2t};|: x$$

$$t' = \frac{t^2}{1 - 2t} \cdot \frac{1}{x}.$$

3. Решим полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t^2}{1 - 2t} \cdot \frac{1}{x}, \quad | \cdot dx$$

$$dt = \frac{t^2}{1 - 2t} \cdot \frac{dx}{x}, \quad \left| : \frac{t^2}{1 - 2t} \right.$$

$$dt = \frac{t^2}{1 - 2t} \cdot \frac{dx}{x}, \quad \left| \cdot \frac{1 - 2t}{t^2} \right.$$

$$\frac{1 - 2t}{t^2} dt = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1 - 2t}{t^2} dt = \int \frac{dx}{x}.$$

Т.к.

$$\int \frac{1-2t}{t^2}dt = \int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2t}{t^2}\right)dt = \int\frac{1}{t^2}dt - 2\int\frac{dt}{t} =$$

$$= \int t^{-2}dt - 2\int\frac{dt}{t} = \frac{t^{-1}}{-1} - 2\ln|t| + c_1 = -\frac{1}{t} - 2\ln|t| + c_1,$$

а $\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c_2$, то получим общий интеграл дифференциального уравнения в виде:

$$-\frac{1}{t} - 2\ln|t| = \ln|x| + c,$$

которое с учётом замены $t = \frac{y}{x}$, может быть записано в виде

$$-\frac{x}{y} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + c.$$

4. Теперь найдём частное решение уравнения, т.е. решение задачи Коши, используя дополнительное условие $y(\underbrace{1}_{x}) = \underbrace{1}_{y}$:

$$-\frac{1}{1} - 2\ln\left|\frac{1}{1}\right| = \ln|1| + c,$$

$$-1 - 0 = 0 + c \Rightarrow\ c = -1.$$

Т.е. решение задачи Коши будет иметь вид

$$-\frac{x}{y} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| - 1.$$

ЗАДАНИЕ 4.2

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $y' = \frac{-x+y}{y}$;
2. $y - xy' = y\ln\frac{x}{y}$;
3. $y - 2xy' = x$;
4. $(x+2y)dx + ydy = 0$;
5. $y^2 + x^2y' = xyy'$;
6. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$;
7. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$;
8. $xy' = y\left(3 + \ln\frac{y}{x}\right)$.

Найти решение задачи Коши:

1. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y,\ \ y(1) = 1$;

2. $(2x - 3y)dx + xdy = 0,$
$y(1) = -1$;

3. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y,\ y(1) = -1$;

4. $y' = \dfrac{y + x}{x},\ \ \ y(4) = 1$;

5. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y,\ y(1) = 1$;

6. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2,\ \ y(1) = 4.$

4.1.3. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальным уравнением ***в полных дифференциалах*** называется уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\,, \tag{0.8}$$

если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. При этом необходимо и достаточно выполнение условия

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}}\,. \tag{0.9}$$

<u>Задача 4.7.</u> Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0\,.$$

1. Поверим для уравнения выполнение условия (0.9). Для уравнения

$$\underbrace{(e^x + y + \sin y)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(e^y + x + x\cos y)}_{Q(x,y)}dy = 0\,,$$

в котором

и $Q(x, y) = e^y + x + x\cos y$,

выполняется условие (0.9), т.к. частные производные $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1 + \cos y$ и $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 1 + \cos y$ равны между собой. Т.е. уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Полагаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = e^x + y + \sin y\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = e^y + x + x\cos y\,.$$

3. Найдём

$$u(x,y)=\int(e^x+y+\sin y)dx=e^x+yx+x\sin y+j\,(y).$$

4. Тогда с одной стороны

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+j\,'(y)$. А с другой стороны $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=e^y+x+x\cos y$.

Тогда

$$x+x\cos y+j\,'(y)=e^y+x+x\cos y,$$

т.е.

$$j\,'(y)=e^y;$$

$$\frac{dj}{dy}=e^y;$$

$$dj=e^y dy;$$

$$j\,(y)=e^y+c_1;$$

5. Итак,

$$u(x,y)=e^x+yx+x\sin y+e^y+c_1,$$

тогда общий интеграл $u(x,y)=c_2$ уравнения будет иметь вид:

$e^x+yx+x\sin y+e^y+c_1=c_2$ или

$$e^x+yx+x\sin y+e^y=c, \text{ где } c=c_2-c_1.$$

<u>Задача 4.8.</u> Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0.$$

1. Уравнение

$$\underbrace{(x+y-1)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{(e^y+x)}_{Q(x,y)}dy=0$$

является уравнением в полных дифференциалах, т.к. для него выполняется условие (0.9), т.е. $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

2. Полагаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=x+y-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=e^y+x.$$

3. Найдём

$$u(x,y)=\int(x+y-1)dx=\frac{x^2}{2}+yx-x+j\,(y)\,.$$

4. Тогда с одной стороны

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+j\,'(y)$. А с другой стороны $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=e^y+x$.

Тогда

$$x+j\,'(y)=e^y+x\,,$$

т.е.

$$j\,'(y)=e^y\,;$$

$$j\,(y)=e^y+c_1\,;$$

5. Итак,

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+yx-x+e^y+c_1\,,$$

тогда общий интеграл $u(x,y)=c_2$ уравнения будет иметь вид:

$\dfrac{x^2}{2}+yx-x+e^y+c_1=c_2$ или

$$\frac{x^2}{2}+yx-x+e^y=c,\ \text{где } c=c_2-c_1.$$

ЗАДАНИЕ 4.3

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$;

2. $(y+e^x\sin y)dx+(x+e^x\cos y)dy=0$;

3. $(xy+\sin y)dx+(0.5x^2+x\cos y)dy=0$;

4. $(\sin y+(1-y)\cos x)dx+$
$+((1+x)\cos y-\sin x)dy=0;$

5. $(y+x\ln y)dx+$
$+\left(\dfrac{x^2}{2y}+x+1\right)dy=0;$

6. $(x^2+\sin y)dx+(1+x\cos y)dy=0$;

7. $ye^x dx+(y+e^x)dy=0$.

Найти решение задачи Коши:

1. $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)ydy=0,$
$y(0)=0;$

2. $(2xye^{x^2}+\ln y)dx+(e^{x^2}+\dfrac{x}{y})dy=0,$
$y(0)=1;$

4.1.4. Дифференциальные уравнения, приводимые к уравнениям в полных дифференциалах

В ряде случаев (0.9) может не выполняться, но исходное дифференциальное уравнение может быть приведено к уравнению в полных дифференциалах при помощи интегрирующего множителя

Задача 4.9. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0\,.$$

Решение. Уравнение

$$\underbrace{(x\sin y+y\cos y)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{(x\cos y-y\sin y)}_{Q(x,y)}dy=0$$

не является уравнением в полных дифференциалах, т.к. для него не выполняется условие (0.9), т.к.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=x\cos y+\cos y-y\sin y\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\cos y\,.$$

1. Функцию

$$\boxed{\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}}=\frac{x\cos y-y\sin y}{x\cos y-y\sin y}=1$$

можно рассматривать, как функцию только от x, тогда интегрирующий множитель будет зависеть только от x и находиться следующим образом:

$$\boxed{m(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}dx}}=e^{\int dx}=e^x\,.$$

2. Умножим обе части исходного дифференциального уравнения на интегрирующий множитель

$$\underbrace{e^x(x\sin y+y\cos y)}_{P_1(x,y)}dx+\underbrace{e^x(x\cos y-y\sin y)}_{Q_1(x,y)}dy=0$$

Это уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т.к. для него выполняется условие (0.9), т.е.

$$\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y}=e^x(x\cos y+\cos y-y\sin y)=\frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial x}.$$

Полагаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P_1(x,y)=e^x(x\sin y+y\cos y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q_1(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y).$$

3. Найдём

$$u(x,y)=\int e^x(x\cos y-y\sin y)dy=e^x\left[x\sin y-\left|\begin{matrix}u=y; & dv=\sin ydy\\ du=dy; & v=-\cos y\end{matrix}\right|\right]+j(x)=$$
$$=e^x\left[x\sin y-(-y\cos y+\int\cos ydy)\right]+j(x)=e^x\left[x\sin y+y\cos y-\sin y\right]+j(x).$$

4. Тогда с одной стороны

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y+xe^x\sin y+e^xy\cos y-e^x\sin y+j'(x)=xe^x\sin y+e^xy\cos y+j'(x).$$

А с другой стороны $\frac{\partial u}{\partial x}=P_1(x,y)=e^xx\sin y+e^xy\cos y$.

Тогда

$$xe^x\sin y+e^xy\cos y+j'(x)=e^xx\sin y+e^xy\cos y,$$

т.е.

$$j'(y)=0;$$
$$j(y)=c_1;$$

5. Итак,

$$u(x,y)=e^x\left[x\sin y+y\cos y-\sin y\right]+c_1,$$

тогда общий интеграл $u(x,y)=c_2$ уравнения будет иметь вид:

$e^x\left[x\sin y+y\cos y-\sin y\right]+c_1=c_2$ или

$$e^x\left[x\sin y+y\cos y-\sin y\right]=c,\text{ где } c=c_2-c_1.$$

Задача 4.10. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$ydx-(x+y^2)dy=0.$$

Решение. Уравнение

$$\underbrace{y}_{P(x,y)}\,dx + (\underbrace{-x - y^2}_{Q(x,y)})\,dy = 0$$

не является уравнением в полных дифференциалах, т.к. для него не выполняется условие (0.9), т.к. $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 \neq \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -1$.

1. Функцию

$$\boxed{\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P(x,y)}} = \frac{2}{y}$$

является функцией только от y, тогда интегрирующий множитель будет зависеть только от y и находится следующим образом:

$$\boxed{m(x) = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P(x,y)} dy}} = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2\ln|y|} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}.$$

2. Умножим обе части исходного дифференциального уравнения на интегрирующий множитель

$$\frac{1}{y^2}\, y dx + \frac{1}{y^2}(-x - y^2) dy = 0;$$

$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{P_1(x,y)}\,dx + (\underbrace{-\frac{x}{y^2} - 1}_{Q_1(x,y)})\,dy = 0$$

Это уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т.к. для него выполняется условие (0.9), т.е.

$$\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial x}.$$

Полагаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P_1(x,y) = \frac{1}{y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q_1(x,y) = -\frac{x}{y^2} - 1.$$

3. Найдём

$$u(x,y) = \int \frac{1}{y} dx = \frac{x}{y} + j\,(y).$$

4. Тогда с одной стороны

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + j'(y)$. А с другой стороны $\frac{\partial u}{\partial y} = Q_1(x, y) = -\frac{x}{y^2} - 1$.

Тогда

$$-\frac{x}{y^2} + j'(y) = -\frac{x}{y^2} - 1,$$

т.е.

$$j'(y) = -1;$$

$$j(y) = -x + c_1;$$

5. Итак,

$$u(x, y) = \frac{x}{y} - x + c_1,$$

тогда общий интеграл $u(x, y) = c_2$ уравнения будет иметь вид:

$\frac{x}{y} - x + c_1 = c_2$ или

$$\frac{x}{y} - x = c, \text{ где } c = c_2 - c_1.$$

ЗАДАНИЕ 4.4

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $ydx - xdy + \ln xdx = 0$;

2. $(x^2 \cos x - y)dx + xdy = 0$;

3. $y\sqrt{1 - y^2}dx + +(x\sqrt{1 - y^2} + y)dy = 0$.

4.1.5. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (0.10)$$

4.1.5.1. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

Задача 4.11. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Уравнение является уравнением вида (0.10), т.е. линейным дифференциальным уравнением.

1. Решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение:

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Это уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x};$$

$$dy = -\frac{y}{x}dx;$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|;$$

$$\ln|y| = \ln\frac{|c|}{|x|};$$

$y_{OO} = \dfrac{c}{x}$ – общее решение однородного дифференциального уравнения, где c – произвольная постоянная.

2. Пусть $c = c(x)$. Тогда

$$y_{OH} = \frac{c(x)}{x} \text{ – общее решение неоднородного уравнения.}$$

Найдём его. Подставим

$$y = \frac{c(x)}{x};$$

$$y' = \frac{c'(x)x - c(x)}{x^2}$$

в исходное дифференциальное уравнение. Получим

$$\frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} = \frac{\sin x}{x};$$

$$\frac{c'(x)x}{x^2} = \frac{\sin x}{x};$$

$$c'(x) = \sin x;$$

$$\frac{dc}{dx} = \sin x;$$

$$c(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_1.$$

3. Подставим полученную функцию $c(x)$ в y_{OH}. Получим общее решение неоднородного линейного уравнения в виде:

$$y = \frac{-\cos x + C_1}{x}.$$

<u>Задача 4.12.</u> Решить задачу Коши $y'\cos^2 x - y = tgx,\ y\left(\frac{p}{4}\right) = 0$.

Уравнение является уравнением вида (0.10), т.е. линейным дифференциальным уравнением, если делением на $\cos^2 x$ привести его к виду

$$y' - \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{tgx}{\cos^2 x}.$$

1. Решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение:

$$y' - \frac{y}{\cos^2 x} = 0.$$

Это уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\cos^2 x};$$

$$dy = \frac{ydx}{\cos^2 x};$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$\ln|y| = tgx + \ln|c|.$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = tgx.$$

$y_{OO} = ce^{tgx}$ – общее решение однородного дифференциального уравнения, где c – произвольная постоянная.

2. Пусть $c = c(x)$. Тогда

$y_{OH} = c(x)e^{tgx}$ – общее решение неоднородного уравнения.

Найдём его. Подставим

$$y = c(x)e^{tgx};$$

$$y' = c'(x)e^{tgx} + c(x)e^{tgx}\frac{1}{\cos^2 x}$$

в исходное дифференциальное уравнение. Получим

$$c'(x)e^{tgx} + c(x)e^{tgx}\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{c(x)e^{tgx}}{\cos^2 x} = \frac{tgx}{\cos^2 x}; |: e^{tgx}$$

$$c'(x)e^{tgx} = \frac{tgx}{\cos^2 x}; |: e^{tgx}$$

$$c'(x) = \frac{tgx}{e^{tgx}\cos^2 x}.$$

Решая это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, находим

$$c(x) = \int \frac{tgxdx}{e^{tgx}\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix} \right| = \int \frac{tdt}{e^t} = \left| \begin{matrix} u = t;\ dv = \dfrac{tdt}{e^t}; \\ du = dt;\ v = \displaystyle\int \frac{dt}{e^t} = \int e^{-t}dt = -e^{-t}; \end{matrix} \right| = \tag{0.11}$$
$$= -te^{-t} + \int e^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t} + C_1 = -tgx \cdot e^{-tgx} - e^{-tgx} + C_1.$$

3. Подставим полученную функцию $c(x)$ в y_{OH}. Получим общее решение неоднородного линейного уравнения в виде:

$$y = \left(-tgx \cdot e^{-tgx} - e^{-tgx} + C_1\right)e^{tgx} = -tgx - 1 + C_1e^{tgx}.$$

4. Теперь найдём частное решение уравнения, т.е. решение задачи Коши, используя дополнительное условие $y\left(\underbrace{\frac{p}{4}}_{x}\right) = \underbrace{0}_{y}$:

$$0 = -tg\frac{p}{4} - 1 + C_1 e^{tg\frac{p}{4}};$$
$$0 = -1 - 1 + C_1 e;$$
$$C_1 e = 2;$$
$$C_1 = \frac{2}{e}.$$

Подставляя полученное значение C_1 в общее решение неоднородного дифференциального уравнения, получим частное решение уравнения, которое является решением задачи Коши:

$$y = -tgx - 1 + 2e^{tgx-1}.$$

4.1.5.2. Метод подстановки (метод Бернулли)

<u>Задача 4.13.</u> Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Уравнение является уравнением вида (0.10), т.е. линейным дифференциальным уравнением.

1. Сделаем в исходное уравнение подстановку

$$\boxed{y = u \cdot v}; \tag{0.12}$$

$$\boxed{y' = u'v + uv'}. \tag{0.13}$$

Получим

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Вынесем в левой части v за скобки:

$$v\underbrace{(u' + \frac{u}{x})}_{=0} + uv' = \frac{\sin x}{x}. \tag{0.14}$$

2. Приравняем скобку при v нулю. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u' + \frac{u}{x} = 0;$$
$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x};$$
$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x};$$
$$\ln|u| = -\ln|x|;$$
$$u = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

3. При значении $u = \frac{1}{x}$ выражение в скобках (0.14) обращается в ноль и уравнение будет иметь вид:

$$uv' = \frac{\sin x}{x};$$

$$\frac{1}{x}v' = \frac{\sin x}{x};$$

$$v' = \sin x.$$

Решая это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим, что

$$v = \int \sin x dx + c = -\cos x + c.$$

3. Подставим полученные функции u и v в (0.12). Получим общее решение неоднородного линейного уравнения в виде:

$$y = \frac{1}{x}(-\cos x + c).$$

Задача 4.14. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y' - \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{tgx}{\cos^2 x}.$$

Уравнение является уравнением вида (0.10), т.е. линейным дифференциальным уравнением.

1. Сделаем в исходное уравнение подстановку (0.12), (0.13). Получим

$$u'v + uv' - \frac{uv}{\cos^2 x} = \frac{tgx}{\cos^2 x}.$$

Вынесем в левой части v за скобки:

$$v\underbrace{(u' - \frac{u}{\cos^2 x})}_{=0} + uv' = \frac{tgx}{\cos^2 x}. \qquad (0.15)$$

2. Приравняем скобку при v нулю. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u' - \frac{u}{\cos^2 x} = 0;$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{\cos^2 x};$$
$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{\cos^2 x};$$
$$\ln|u| = tgx;$$
$$u = e^{tgx}.$$

3. При значении $u = e^{tgx}$ выражение в скобках (0.15) обращается в ноль и уравнение будет иметь вид:

$$uv' = \frac{tgx}{\cos^2 x};$$

$$e^{tgx} v' = \frac{tgx}{\cos^2 x};$$

$$v' = \frac{tgx}{e^{tgx} \cos^2 x}.$$

Решая это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим (с учётом нахождения интеграла (0.11)), что

$$v = \int \frac{tgx}{e^{tgx} \cos^2 x} + c = -tgx \cdot e^{-tgx} - e^{-tgx} + c.$$

3. Подставим полученные функции u и v в (0.12). Получим общее решение линейного уравнения в виде:

$$y = e^{tgx}(-tgx \cdot e^{-tgx} - e^{-tgx} + c) = -tgx - 1 + ce^{tgx}.$$

ЗАДАНИЕ 4.5

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3;$

2. $y' - \dfrac{2y}{x} = x + 2;$

3. $y' + y = e^{-x};$

4. $y' + \dfrac{y}{x} = \cos x.$

Найти решение задачи Коши:

1. $y' - \dfrac{y}{x} + x\sin x = 0,$
$y\left(\dfrac{p}{2}\right) = 0;$

2. $y' + 2xy + xe^{-x^2} = 0,$
$y(0) = 0;$

3. $xy' + y = x + 1,$
$y(2) = 2;$

4. $x^2 y' - 2xy = 3,$
$y(1) = 0;$

5. $x^2 y' + 2xy - 1 = 0,$
$y(1) = 0;$

6. $y' + ytgx = \sin x,$
$y(0) = 1.$

4.1.6. Дифференциальные уравнения Бернулли

Дифференциальным уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m,\ m \neq 0,\ m \neq 1. \qquad (0.16)$$

<u>Задача 4.15.</u> Решить дифференциальное уравнение

$$y' - \frac{y}{x} = e^x y^2.$$

Уравнение является уравнением вида (0.16), т.е. дифференциальным уравнением Бернулли.

1. Сделаем в исходное уравнение подстановку (0.12), (0.13). Получим

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = e^x u^2 v^2.$$

Вынесем в левой части v за скобки:

$$v\underbrace{(u' - \frac{u}{x})}_{=0} + uv' = e^x u^2 v^2. \qquad (0.17)$$

2. Приравняем скобку при v нулю. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u' - \frac{u}{x} = 0;$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x};$$
$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x};$$
$$\ln|u| = \ln|x|;$$
$$u = x.$$

3. При значении $u = x$ выражение в скобках (0.15) обращается в ноль и уравнение будет иметь вид:

$$uv' = e^x u^2 v^2;$$

$$xv' = e^x x^2 v^2;$$

$$\frac{dv}{dx} = e^x x v^2;$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int e^x x dx.$$

С учётом того, что $\int e^x x dx = \begin{vmatrix} u = x; \; dv = e^x dx; \\ du = dx; \; v = e^x; \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$,

$$-\frac{1}{v} = xe^x - e^x + c;$$

$$v = -\frac{1}{xe^x - e^x + c}.$$

3. Подставим полученные функции u и v в (0.12). Получим общее решение уравнения Бернулли в виде:

$$y = -\frac{x}{xe^x - e^x + c}.$$

ЗАДАНИЕ 4.6

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $xy' + y = y^2 \ln x$;
2. $y' - xy = x^3 y^2$;
3. $2y' + y = \dfrac{x}{y}$;
4. $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

4.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.2.1. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Это дифференциальное уравнение выглядит так:

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (0.18)$$

Для его решения необходимо составить характеристическое уравнение:

$$ak^2 + bk + c = 0, \tag{0.19}$$

где y'' соответствует k^2, y' – k, y – 1, которое является квадратным уравнением:

$$D = b^2 - 4ac, \tag{0.20}$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \tag{0.21}$$

Тогда в зависимости от корней (0.21) характеристического квадратного уравнения (0.19) частные линейно независимые решения и общее решение однородного дифференциального уравнения (0.18) будет иметь вид:

Корни k_1, k_2		Линейно независимые частные решения y_1, y_2	Общее решение однородного дифференциального уравнения y
1.	действительные, различные ($D > 0$): $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$
2.	действительные, равные ($D = 0$): $k_1 = k_2 = k$	$y_1 = e^{kx}$ $y_2 = xe^{kx}$	$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx} = e^{kx}(c_1 + c_2 x)$
3.	комплексно-сопряжённые ($D < 0$): $k_{1,2} = a \pm bi$	$y_1 = e^{ax}\cos bx$ $y_2 = e^{ax}\sin bx$	$y_1 = c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\cos bx =$ $= e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \cos bx)$

<u>Задача 4.16.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Составим и решим соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 3 = 0,$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4,$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1};$$

$$k_1 = \frac{4-2}{2} = 1;\ k_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$ – действительные, различные.

Тогда $y_1 = e^{1x}$, $y_2 = e^{3x}$ – частные, линейно независимые решения;

$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ – общее решение дифференциального уравнения.

Задача 4.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

1. Составим и решим соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 9 = 0,$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$ – действительные, равные.

Тогда $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = xe^{3x}$ – частные, линейно независимые решения;

$y = e^{3x}(c_1 + c_2 x)$ – общее решение дифференциального уравнения.

2. Найдём решение задачи Коши. Найдём производную:

$$y'(x) = \left(e^{3x}(c_1 + c_2 x)\right)' = 3e^{3x}(c_1 + c_2 x) + c_2 e^{3x}.$$

Тогда т.к.

$$\begin{cases} y(\underset{x}{0}) = \underset{y}{1}; \\ y'(\underset{x}{0}) = \underset{y'}{0}; \end{cases} \text{ то } \begin{cases} 1 = e^{3 \cdot 0}(c_1 + c_2 \cdot 0); \\ 0 = 3e^{3 \cdot 0}(c_1 + c_2 \cdot 0) + c_2 e^{3 \cdot 0}; \end{cases} \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} 1 = c_1; \\ 0 = 3c_1 + c_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1; \\ c_2 = -3c_1 = -3. \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши имеет вид: $y = e^{3x}(1 - 3x)$.

Задача 4.18. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

1. Составим и решим соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16,$$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \text{ – комплексно-сопряжённые;}$$

$$a = -1,\ b = 2.$$

Тогда $y_1 = e^{-x}\cos 2x$, $y_2 = e^{-x}\sin 2x$ – частные, линейно независимые решения; $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ – общее решение дифференциального уравнения.

2. Найдём решение задачи Коши. Найдём производную:

$$\begin{gathered} y'(x) = \left(e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)\right)' = -e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \\ + e^{-x}(-2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x). \end{gathered}.$$

Тогда т.к.

$$\begin{cases} y(\underbrace{0}_{x}) = \underbrace{0}_{y}; \\ y'(\underbrace{0}_{x}) = \underbrace{1}_{y'}; \end{cases} \text{ то } \begin{cases} 0 = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0); \\ 1 = -e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^0(-2c_1 \sin 0 + 2c_2 \cos 0); \end{cases} \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1; \\ 1 = -c_1 + 2c_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0; \\ 2c_2 = 1 + c_1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0; \\ c_2 = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши имеет вид:

$$y = e^{-x}(0\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x.$$

<u>Задача 4.19.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' = 0.$$

Составим и решим соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k = 0,$$

$$k(k - 4) = 0,$$

$$k=0,\ k-4=0,$$

$$k_1=0;\ k_2=4$$ – действительные, различные.

Тогда $y_1=e^{0x}=1,\ y_2=e^{4x}$ – частные, линейно независимые решения; $y=c_1+c_2e^{4x}$ – общее решение дифференциального уравнения.

Задача 4.20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y=0.$$

Составим и решим соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2-4=0,$$

$$k^2=4,$$

$$k_{1,2}=\pm\sqrt{4}=\pm 2,$$

$$k_1=2;\ k_2=-2$$ – действительные, различные.

Тогда $y_1=e^{2x},\ y_2=e^{-2x}$ – частные, линейно независимые решения; $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$ – общее решение дифференциального уравнения.

Задача 4.21. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+4y=0.$$

Составим и решим соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2+4=0,$$

$$k^2=-4,$$

$$k_{1,2}=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i=0\pm 2i,$$

$$a=0,\ b=2.$$

Тогда $y_1=e^{0x}\cos 2x=\cos 2x,\ y_2=e^{0x}\sin 2x=\sin 2x$ – частные, линейно независимые решения; $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ – общее решение дифференциального уравнения.

ЗАДАНИЕ 4.7

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $2y''-y'-y=0$;
2. $y''+8y'+16y=0$;
3. $y''-4y'+13y=0$;
4. $y''-25y'=0$;

5. $y'' - 25y = 0$;

6. $y'' + 25y = 0$;

7. $y'' + y' = 0$;

8. $y'' + y = 0$.

Найти решение задачи Коши

1. $y'' - y' - 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1$;

2. $y'' + 5y' = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 2$;

3. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$;

4. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.

4.2.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Это дифференциальное уравнение выглядит так:

$$ay'' + by' + cy = f(x). \qquad (0.22)$$

4.2.2.1. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) (для любой правой части *f(x)*)

Задача 4.22. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = tgx.$$

1. Решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + y = 0;$$

$$k^2 + 1 = 0,$$

$$k^2 = -1,$$

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm 1i = 0 \pm 1i,$$

$$a = 0,\ b = 1.$$

$y_1 = e^{0x}\cos 1x = \cos x$, $y_2 = e^{0x}\sin 1x = \sin x$ – частные, линейно независимые решения однородного уравнения;

$\boxed{y_{OO} = c_1 y_1 + c_2 y_2} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ – общее решение однородного уравнения.

2. Полагая $c_1 = c_1(x)$ и $c_2 = c_2(x)$, будем искать общее решение неоднородного дифференциального уравнения в виде

$$\boxed{y_{OH} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2} = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x.$$

3. Для определения функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$ решаем систему уравнений

$$\boxed{\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0; \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x); \end{cases}} \text{ т.е. } \begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0; \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = tgx. \end{cases}$$

Решим её по относительно неизвестных $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ tgx & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & tgx \end{vmatrix} = \sin x;$$

$$\boxed{c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}; \ \boxed{c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}} = \sin x.$$

Отсюда

$$\boxed{c_1(x) = \int c_1'(x)dx} = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx =$$
$$= \int \left(-\frac{1}{\cos x} + \cos x \right)dx = \sin x - \ln\left| tg\left(\frac{p}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C_1;$$

$$\boxed{c_2(x) = \int c_2'(x)dx} = \int \sin x dx = -\cos x + C_2.$$

4. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $$y_{OH} = \left(\sin x - \ln\left| tg\left(\frac{p}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C_1 \right)\cos 2x + (-\cos x + C_2)\sin 2x.$$

ЗАДАНИЕ 4.8

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$;

2. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$;

3. $y'' - y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$;

4. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$;

6. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

7. $y'' + 4y = tg 2x$;

8. $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}$;

9. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$;

10. $y'' - 2y' = \dfrac{e^{4x}}{e^{4x} - 1}$;

11. $y'' + 9y = ctg 3x$;

12. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin 2x}$;

13. $y'' - 4y = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x} - 1}$;

14. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

4.2.2.2. Метод неопределённых коэффициентов (для *f(x)* специального вида)

Общее решение y_{OH} уравнения (0.22) с правой частью *f(x)* специального вида

$$f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cdot\cos bx + Q_m(x)\cdot\sin bx\right], \qquad (0.23)$$

(где $P_n(x),\ Q_m(x)$ – многочлены ***n***-ой и ***m***-ой степени соответственно) может быть найдено следующим образом:

$$\boxed{y_{OH} = y_{OO} + \tilde{y}}\,, \qquad (0.24)$$

где y_{OO} – общее решение соответствующего однородного уравнения (0.18), а $\tilde{y}$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (0.22), которое может быть подобрано в виде

$$\tilde{y} = x^r\cdot e^{ax}\cdot\left[P_l(x)\cdot\cos bx + Q_l(x)\cdot\sin bx\right], \qquad (0.25)$$

где $P_l(x),\ Q_l(x)$ – полные многочлены ***l***-ой степени, $l = \max\{n, m\}$, r – количество совпадений числа $a + bi$ с корнями характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения.

<u>Задача 4.23.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 9y = xe^{3x}.$$

Решение: $y_{OH} = y_{OO} + \tilde{y}$.

1. Найдём общее решение y_{OO} соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 9y = 0;$$

$$k^2 - 9 = 0,$$

$$k^2 = 9,$$

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3,$$

$$k_1 = 3;\ k_2 = -3.$$

$$y_1 = e^{3x},\ y_2 = e^{-3x};$$

$$y_{OO} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

2. В исходном уравнении $f(x)=xe^{3x}$. Сравнивая вид $f(x)$ с (0.23), можем переписать $f(x)$ в виде $f(x)=e^{3x}\left[x\cos(0x)+0\sin(0x)\right]$, т.е. $a=3,\ b=0$. Составим число $a+bi=3\left\langle\begin{matrix}=k_1=3\\ \neq k_2=-3\end{matrix}\right.\Rightarrow r=1$. Степени многочленов в $f(x)$: $n=1,\ m=0,$ тогда $l=\max(1,0)=1$. Следовательно, частное решение $\tilde{y}$ неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{y}=x^1e^{3x}(Ax+B)=e^{3x}(Ax^2+Bx).$$

Тогда

$$\tilde{y}'=3e^{3x}(Ax^2+Bx)+e^{3x}(2Ax+B);$$
$$\tilde{y}''=9e^{3x}(Ax^2+Bx)+3e^{3x}(2Ax+B)+3e^{3x}(2Ax+B)+e^{3x}2A.$$

Подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное дифференциальное уравнение $\tilde{y}''-9\tilde{y}=xe^{3x}$, получим:

$$9e^{3x}(Ax^2+Bx)+3e^{3x}(2Ax+B)+3e^{3x}(2Ax+B)+e^{3x}2A-9e^{3x}(Ax^2+Bx)=xe^{3x},\ |:e^{3x}$$

$$9Ax^2+9Bx+6Ax+3B+6Ax+3B+2A-9Ax^2-9Bx=x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в разных частях этого равенства, получим:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\!\!\begin{cases}9A-9A=0;\\ 9B+6A+6A-9B=1;\\ 3B+3B+2A=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12A=1;\\ 6B+2A=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{12};\\ B=-\dfrac{A}{3}=-\dfrac{1}{36}.\end{cases}$$

Итак, частное решение неоднородного дифференциального уравнения выглядит так:

$$\tilde{y}=e^{3x}(\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{36}x).$$

Тогда окончательно

$$y_{OH}=y_{OO}+\tilde{y}=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+e^{3x}(\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{36}x).$$

<u>Задача 4.24.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-2y'-8y=x^2+1.$$

Решение: $y_{OH}=y_{OO}+\tilde{y}$.

1. Найдём общее решение y_{OO} соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 2y' - 8y = 0;$$

$$k^2 - 2k - 8 = 0,$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36,$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} \ ;$$

$$k_1 = -2,\ k_2 = 4;$$

$$y_1 = e^{-2x},\ y_2 = e^{4x};$$

$$y_{OO} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}.$$

2. В исходном уравнении $f(x) = x^2 + 1$. Сравнивая вид $f(x)$ с (0.23), можем переписать $f(x)$ в виде $f(x) = e^{0x}\left[(x^2+1)\cos(0x) + 0\sin(0x)\right]$, т.е. $a = 0,\ b = 0$. Составим число $a + bi = 0\left\langle \begin{matrix} \ne k_1 = -2 \\ \ne k_2 = 4 \end{matrix} \right. \Rightarrow r = 0$. Степени многочленов в $f(x)$: $n = 2,\ m = 0,$ тогда $l = \max(2,0)$ =2. Следовательно, частное решение $\tilde{y}$ неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{y} = x^0 e^{0x}(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \tilde{y}' = 2Ax + B; \\ \tilde{y}'' = 2A. \end{gathered}$$

Подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное дифференциальное уравнение $\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' - 8\tilde{y} = x^2 + 1$, получим:

$$2A - 2\left[2Ax + B\right] - 8 \cdot \left[Ax^2 + Bx + C\right] = x^2 + 1,$$

$$2A - 4Ax - 2B - 8Ax^2 - 8Bx - 8C = x^2 + 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в разных частях этого равенства, получим:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} -8A=1; \\ -4A-8B=0; \\ 2A-2B-8C=1; \end{array}\right. ;\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-\dfrac{1}{8}; \\ B=-\dfrac{A}{2}; \\ 2\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)-2\cdot\dfrac{1}{16}-8C=1; \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-\dfrac{1}{8}; \\ B=\dfrac{1}{16}; \\ C=-\dfrac{11}{64}. \end{array}\right.$$

Итак, частное решение неоднородного дифференциального уравнения выглядит так:

$$\tilde{y}=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x-\frac{11}{64}.$$

Тогда окончательно

$$y_{OH}=y_{OO}+\tilde{y}=c_1e^{-2x}+c_2e^{4x}-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x-\frac{11}{64}.$$

<u>Задача 4.25.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+6y'+9y=e^{-3x}.$$

Решение: $y_{OH}=y_{OO}+\tilde{y}$.

1. Найдём общее решение y_{OO} соответствующего однородного уравнения:

$$y''+6y'+9y=0;$$

$$k^2+6k+9=0,$$

$$D=6^2-4\cdot1\cdot6=36-36=0,$$

$$k_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{0}}{2\cdot1}=\frac{-6\pm0}{2}=-3\ ;$$

$$y_1=e^{-3x},\ y_2=xe^{-3x};$$

$$y_{OO}=e^{-3x}(c_1+c_2x).$$

2. В исходном уравнении $f(x)=e^{-3x}$. Сравнивая вид $f(x)$ с (0.23), можем переписать $f(x)$ в виде $f(x)=e^{-3x}\left[1\cos(0x)+0\sin(0x)\right]$, т.е. $a=-3,\ b=0$. Составим число $a+bi=-3\left\langle\begin{array}{l}=k_1=-3\\=k_2=-3\end{array}\right.\Rightarrow r=2$. Степени многочленов в $f(x)$: $n=0,\ m=0,$ тогда $l=\max(0,0)=0$. Следовательно, частное решение $\tilde{y}$ неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{y} = x^2 e^{-3x} A = Ax^2 e^{-3x}.$$

Тогда

$$\tilde{y}' = 2Axe^{-3x} - 3Ax^2 e^{-3x};$$
$$\tilde{y}'' = 2Ae^{-3x} - 6Axe^{-3x} - 6Axe^{-3x} + 9Ax^2 e^{-3x} = 2Ae^{-3x} - 12Axe^{-3x} + 9Ax^2 e^{-3x}.$$

Подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное дифференциальное уравнение

$\tilde{y}'' + 6\tilde{y}' + 9\tilde{y} = e^{-3x}$, получим:

$$2Ae^{-3x} - 12Axe^{-3x} + 9Ax^2 e^{-3x} + 6\left[2Axe^{-3x} - 3Ax^2 e^{-3x}\right] + 9Ax^2 e^{-3x} = e^{-3x}, \ |: e^{-3x}$$

$$2A - 12Ax + 9Ax^2 + 12Ax - 18Ax^2 + 9Ax^2 = 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в разных частях этого равенства, получим:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array} \begin{cases} 9A - 18A + 9Ax^2 = 0; \\ -12A + 12A = 0; \\ 2A = 1; \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Итак, частное решение неоднородного дифференциального уравнения выглядит так:

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} x^2 e^{-3x}.$$

Тогда окончательно

$$y_{OH} = y_{OO} + \tilde{y} = e^{-3x}(c_1 + c_2 x) + \frac{1}{2} x^2 e^{-3x}.$$

<u>Задача 4.26.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 25y = 2\sin 5x.$$

Решение: $y_{OH} = y_{OO} + \tilde{y}$.

1. Найдём общее решение y_{OO} соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 25y = 0;$$

$$k^2 + 25 = 0,$$

$$k^2 = -25,$$

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i = 0 \pm 5i \ ; \ a = 0; \ b = 5;$$

$$y_1 = e^{0x} \cos 5x = \cos 5x, \ y_2 = e^{0x} \sin 5x = \sin 5x;$$

$$y_{OO} = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x.$$

2. В исходном уравнении $f(x) = 2\sin 5x$. Сравнивая вид $f(x)$ с (0.23), можем переписать $f(x)$ в виде $f(x) = e^{0x}\left[0 \cdot \cos(5x) + 2 \cdot \sin(5x)\right]$, т.е. $a = 0,\ b = 5$. Составим число $a + bi = 5i \left\langle \begin{matrix} = k_1 = 5i \\ \neq k_2 = -5i \end{matrix} \right. \Rightarrow r = 1$. Степени многочленов в $f(x)$: $n = 0,\ m = 0,$ тогда $l = \max(0,0)$ =0. Следовательно, частное решение $\tilde{y}$ неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{y} = x(A\cos 5x + B\sin 5x).$$

Тогда

$$\begin{gathered} \tilde{y}' = A\cos 5x + B\sin 5x + x(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x); \\ \tilde{y}'' = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x - 5A\sin 5x + 5B\cos 5x + x(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x) = \\ = -10A\sin 5x + 10B\cos 5x + x(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x). \end{gathered}$$

Подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное дифференциальное уравнение

$\tilde{y}'' + 25\tilde{y} = 2\sin 5x$, получим:

$$\begin{gathered} -10A\sin 5x + 10B\cos 5x + x(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x) + \\ +25x(A\cos 5x + B\sin 5x) = 2\sin 5x. \end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых выражениях $\sin 5x$, $\cos 5x$, $x\sin 5x$, $x\cos 5x$ в разных частях этого равенства, получим:

$$\begin{array}{l|} \sin 5x \\ \cos 5x \\ x\sin 5x \\ x\cos 5x \end{array} \left\{ \begin{array}{c} -10A = 2; \\ 10B = 0; \\ -25B + 25B = 0; \\ -25A + 25A = 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A = -\dfrac{1}{5}; \\ B = 0. \end{array} \right.$$

Итак, частное решение неоднородного дифференциального уравнения выглядит так:

$$\tilde{y} = -\frac{1}{5} x\cos 5x.$$

Тогда окончательно

$$y_{OH} = y_{OO} + \tilde{y} = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x - \frac{1}{5} x\cos 5x.$$

<u>Задача 4.27.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 8y = 61e^{2x} \sin x.$$

Решение: $y_{OH} = y_{OO} + \tilde{y}$.

1. Найдём общее решение y_{OO} соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 4y' + 8y = 0;$$

$$k^2 - 4k + 8 = 0,$$

$$D = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 8 = 16 - 32 = -16,$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i\ ;\ a = 2,\ b = 2;$$

$$y_1 = e^{2x}\cos 2x,\ y_2 = e^{2x}\sin 2x;$$

$$y_{OO} = e^{2x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x).$$

2. В исходном уравнении $f(x) = 61e^{2x}\sin x$. Сравнивая вид $f(x)$ с (0.23), можем переписать $f(x)$ в виде $f(x) = e^{2x}\left[61\cdot\cos x + 0\cdot\sin x\right]$, т.е. $a = 2,\ b = 1$. Составим число $a + bi = 2 + i \left\langle \begin{matrix} \neq k_1 = 2 + 2i \\ \neq k_2 = 2 - 2i \end{matrix} \right. \Rightarrow r = 0$. Степени многочленов в $f(x)$: $n = 0,\ m = 0,$ тогда $l = \max(0,0)$ =0. Следовательно, частное решение $\tilde{y}$ неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{y} = x^0 e^{2x}(A\cos x + B\sin x) = e^{2x}(A\cos x + B\sin x).$$

Тогда

$$\begin{gathered}\tilde{y}' = 2e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + e^{2x}(-A\sin x + B\cos 2x) = \\ = (2B - A)e^{2x}\sin x + (2A + B)e^{2x}\cos x; \\ \tilde{y}'' = 2(2B - A)e^{2x}\sin x + (2B - A)e^{2x}\cos x + 2(2A + B)e^{2x}\cos x - \\ -(2A + B)e^{2x}\sin x = e^{2x}\sin x(3B - 4A) + e^{2x}\cos x(4B + 3A).\end{gathered}$$

Подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное дифференциальное уравнение

$\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + 8\tilde{y} = 61e^{2x}\sin x$, получим:

$$\begin{gathered}e^{2x}\sin x(3B - 4A) + e^{2x}\cos x(4B + 3A) - 4\left[(2B - A)e^{2x}\sin x + (2A + B)e^{2x}\cos x\right] + \\ +8e^{2x}(A\cos x + B\sin x) = 61e^{2x}\sin x,\ |:e^{2x}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\sin x(3B - 4A) + \cos x(4B + 3A) - 4\left[(2B - A)\sin x + (2A + B)\cos x\right] + \\ +8(A\cos x + B\sin x) = 61\sin x,\end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых выражениях $\sin 2x$, $\cos 2x$, получим:

$$\begin{array}{l|l} \sin x & \left\{\begin{array}{l} 3B-4A+4A-8B+8B=61; \\ 4B+3A-8A-4B+8A=0; \end{array}\right. \\ \cos x & \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B=\dfrac{61}{3}; \\ A=0. \end{array}\right.$$

Итак, частное решение неоднородного дифференциального уравнения выглядит так:

$$\tilde{y}=\frac{61}{3}e^{2x}\sin x\,.$$

Тогда окончательно

$$y_{OH}=y_{OO}+\tilde{y}=c_1\cos 5x+c_2\sin 5x+\frac{61}{3}e^{2x}\sin x$$