МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к решению задач по дисциплине “Высшая математика”
и варианты контрольных заданий
Раздел: “Теория вероятностей”

Часть III

Утверждено
на заседании Ученого совета
академии
Протокол № 9 от 30.12.08

Днепропетровск НМетАУ 2009

УДК 517(075.8)
Методические указания к решению задач по дисциплине “Высшая математика” и варианты контрольных заданий (Раздел “Теория вероятностей”). Часть III /Сост.: А. Н. Дук, Е. Г. Ткаченко, Н. В. Целуйко и др. - Днепропетровск: НМетАУ, 2009. – 40 с.

Методические указания содержат варианты задач по разделам “Теория вероятностей” дисциплины “Высшая математика” и варианты контрольных заданий, излагаемые в соответствии со стандартом Министерства образования и науки Украины.

Предназначены для студентов всех экономических специальностей, а также для студентов с проблемами здоровья.

Составители: А. Н. Дук, ст. преподаватель
Е. Г. Ткаченко, ст. преподаватель
Н. В. Целуйко, ст. преподаватель
М. С. Сазонова, доцент
Г. М. Бартенев, ас.
В. В. Толстой, ас.

Ответственный за выпуск Г. Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Подписано к печати 25.11.09. Формат 60х84 1/16. Бумага типогр. Печать плоская. Уч.-изд. л. 2,35. Усл. печ. л. 2,32. Тираж 100 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины
49600, Днепропетровск- 5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. Перестановки.

Задача 1. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, чтобы каждая цифра входила бы в изображение числа только один раз?

Решение. 1) 123 3) 231 5) 321

2) 132 4) 213 6) 312,

то есть число перестановок из 3-х неповторяющихся элементов равно $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Задача 2. Сколькими способами можно переставить буквы в слове *АЛСУ*?

Решение.

1) АЛСУ	7) ЛАСУ	13) САЛУ	19) УАЛС
2) АЛУС	8) ЛАУС	14) САУЛ	20) УАСЛ
3) АСЛУ	9) ЛСАУ	15) СУАЛ	21) УЛСА
4) АСУЛ	10) ЛСУА	16) СУЛА	22) УЛАС
5) АУЛС	11) ЛУАС	17) СЛАУ	23) УСЛА
6) АУСЛ	12) ЛУСА	18) СЛУА	24) УСАЛ.

Легко заметить, что имеется 4 группы перестановок, в каждой из которых зафиксирована первая буква, а остальные 3 меняются позициями. В каждой группе по 6 перестановок, а общее их количество равно

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Задача 3. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4?

Решение. Очевидно, что из пяти различных элементов можно составить 5! перестановок. Но здесь речь идёт о числах. Если на первом месте будет стоять цифра 0, то данное число нельзя рассматривать как пятизначное (например, 02431). Следовательно, из числа всех чисел, составленных из пяти цифр, следует исключить те, что начинаются с 0. А их будет 4!. Ответ задачи таков: $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 120 - 24 = 96$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сколькими способами можно разместить 9 студентов для работы на 9 компьютерах?

(362900).

2. Ребёнок играет с шестью карточками разрезной азбуки, на которых написаны буквы: А, К, В, М, С, О. Сколькими способами он может их расположить в произвольном порядке и так, чтобы получилось слово МОСКВА?

(720 и 1).

3. Найти сумму цифр во всех пятизначных числах, записанных при помощи цифр 1,4,6,7,8.

(3120).

2. Перестановки с повторениями.

Задача 1. Сколькими способами можно переставить буквы в слове *МУМУ*?

Решение. 1) МУМУ 4) УММУ

2) МУУМ 5) ММУУ

3) УМУМ 6) УУММ.

В слове 4 буквы, и каждая повторяется по 2 раза :

«М», число повторов $n_1 = 2$; «У», число повторов $n_2 = 2$. Из формулы для перестановок с повторениями получаем $P_4(2,2) = 4!/(2!\cdot 2!) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4/(1\cdot 2\cdot 1\cdot 2) = 6$.

Задача 2. На книжной полке находятся 8 книг, причём две из них зелёного цвета, а остальные синего. Сколько существует способов расположить их на полке?

Решение. Всего книг $n = 8$, зелёных $n_1 = 2$, синих $n_2 = 6$. Расположить их можно

$$P_8(2,6) = \frac{8!}{2!.6!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.}{1.2.1.2.3.4.5.6} = 28 \text{ числом способов.}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «МАТЕМАТИКА»? (151200)

2. Сколько существует способов разместить 5 мужчин и 5 женщин на 10 стульях? (252)

3. Размещения.

Задача 1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4 так, чтобы цифры не повторялись?

Решение.

1) 12	4) 23	7) 34	10) 41
2) 13	5) 24	8) 31	11) 42
3) 14	6) 21	9) 32	12) 43

Таким образом, число размещений из 4 различных элементов, взятых по 2 равно

$A_4^2 = 4! / (4-2)! = 4! / 2! = 12.$

Задача 2. Сколькими способами можно сшить флаг, состоящий из 3 горизонтальных полос различного цвета, если имеется материал 10 различных цветов?

Решение. Очевидно, что для флага имеет большое значение место расположения полосы определённого цвета. Поэтому число таких способов будет равно

$A_{10}^3 = 10! / (10 – 3)! = 10! / 7! = 8·9·10 = 720.$

Задача 3. На каждой из десяти карточек записана одна цифра 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Выбирают четыре карточки и из цифр, записанных на них, составляют четырёхзначное число. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить таким образом?

Решение. Всего из 10 цифр можно составить $A_{10}^4 = 10! / (10-4)! = 5040$ четырёхзначных чисел. Однако среди них будут и такие, что начинаются с цифры 0 (например, 0236). Такие числа не могут считаться четырёхзначными. Количество таких чисел будет равно

$A_9^3 = 9! / (9-3)! = 504$. Искомое же число четырёхзначных чисел

$A_{10}^4 – A_9^3 = 5040 – 504 = 4536.$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, 8, 9, при условии, что в числе цифры не повторяются? (60)

2. На день рождения приглашено 10 человек. Пришло 6 человек. Сколькими способами можно рассадить гостей на 10 стульях?

(151200)

3. Сколько трёхзначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 при условии, что в числе цифры не повторяются?

(20)

4. Размещения с повторениями.

Задача 1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 ?

Решение.	1) 11	4) 22	7) 33
	2) 12	5) 23	8) 32
	3) 13	6) 21	9) 31

Число двузначных чисел равно числу сочетаний с повторениями $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Задача 2. Сколько существует всего натуральных пятизначных чисел?

Решение. Все числа составлены из десяти цифр: 0, 1, 2,… 9. Число возможных размещений из 10 элементов, взятых по 5 с повторениями равно $\overline{A}_{10}^5 = 10^5 = 100000$. Среди этих чисел будут такие, которые начинаются с цифры 0 и которые должны быть исключены из этих 100000, так как не являются пятизначными. Таких чисел будет $\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$. Искомое же число всех пятизначных чисел 100000 – 10000 = 90000. Это числа, начиная с 10000 и заканчивая 99999.

Задача 3. Число букв на каждом диске секретного замка равно 6, число дисков равно 5. Сколько попыток может сделать человек, подбирая код наудачу?

Решение. Предположим, что имеется всего 1 диск с шестью символами: A, B, C, D, E, F.

Очевидно, что в этом случае попыток может быть всего 6. Теперь представим, что дисков два, и каждый имеет по 6 символов:

A	D	C	D	E	F
A	B	C	D	E	F

В этом случае количество возможных комбинаций будет равно 6·6 = 36. В случае же 5 дисков получим $\overline{A}_6^5 = 6^5 = 7776$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сколькими способами можно набрать семизначный номер телефона, если:

а) ни одна цифра не повторяется?

(A_{10}^{7})

б) цифры могут повторяться?

($\overline{A}_{10}^{7}$)

2. Сколько существует натуральных пятизначных чисел, которые состоят только из нечетных цифр?

(5^5)

5. Сочетания

Задача 1. Найти все сочетания из пяти элементов, взятых по три.

Решение. Возьмём слово ВИТАС. Здесь все буквы разные и не повторяются. Составляем возможные сочетания:

1) ВИТ	7) ИТА
2) ВИА	8) ИТС
3) ВИС	9) ИАС
4) ВТА	10) ТАС
5) ВТС	
6) ВАС	

Число сочетаний из 5 элементов по 3 равно $C_5^3 = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2} = 10.$

Задача 2. В пограничном отряде 25 человек. Сколькими способами можно сформировать дозор из 4-х человек?

Решение. $C_{24}^4 = \frac{24!}{4!.(20-4)!} = \frac{24!}{2!.20!} = \frac{21.22.23.24}{1.2} = 12144$

Задача 3. Сколько диагоналей имеет правильный 15-угольник?

Решение. Наш многоугольник имеет 15 вершин и столько же сторон. Диагональ соединяет две вершины. Возможных сочетаний из 15 по 2 будет $C_{15}^2 = \frac{15!}{2!.13!} = 105.$ Однако не все эти прямые будут диагоналями. Среди них есть и стороны. Искомое же число диагоналей правильного 15-угольника будет 105 – 15 = 90.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Студенты на одном из курсов изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на один день, чтобы при этом было 4 разных предмета? (210)

2. Некто хочет гарантировано угадать 5 номеров в лотерее «5 из 36». Сколько билетов при этом ему следовало бы купить? (376992)

3. Сколькими способами можно выбрать два брачных объявления из 10 понравившихся? (45)

6. Сочетания с повторениями.

Задача 1. В кондитерском магазине продаются пирожные двух сортов. Сколькими способами можно купить 4 пирожных?

Решение. Пусть это будут пирожные вида А и вида В. Рассмотрим все возможные комбинации покупки 4-х :

1) АААА
2) АААВ
3) ААВВ
4) АВВВ
5) ВВВВ

По формуле сочетаний с повторениями получаем: $\overline{C}_2^4 = C_{2+4-1}^4 = C_5^4 = \dfrac{5!}{4!.1!} = 5.$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сколькими способами можно распределить 5 ящиков лимонада между тремя магазинами? (21)

2. Сколькими способами можно покрасить 6 досок в 4 цвета? (84)

3. В кондитерском магазине продаются пирожные четырёх сортов. Сколькими способами можно купить семь пирожных? (120)

7. Правило суммы и правило произведения.

Задача 1. На вершину горы ведут 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с неё, если:
а) подниматься и спускаться он будет по одной и той же дороге?
б) подниматься и спускаться он будет по разным дорогам?

Решение. а) Для того, чтобы подняться на гору, у туриста есть выбор из семи дорог. Однако после подъёма выбор сузится до одной. Следовательно, по правилу произведения, число способов подняться и спуститься будет равно $7 \cdot 1 = 7$.
б) Аналогично предыдущему случаю, для подъёма есть выбор из семи дорог. Однако после подъёма выбор будет состоять уже из шести, так как назад он не может идти по уже использованной дороге. Значит, общее число вариантов будет равно $7 \cdot 6 = 42$.

Задача 2. Сколько различных хоккейных команд можно составить из 9-ти нападающих, 5-ти защитников и 3-х вратарей?

Решение. Хоккейная команда состоит из 3-х нападающих, 2-х защитников и 1-го вратаря. Кандидатов же на роль нападающих имеется 9. Трёх человек из 9-ти можно выбрать $C_9^3 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$ числом способов. Двух защитников из 5-ти можем выбрать $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ числом способов. Одного же вратаря из трёх претендентов можем выбрать тремя способами. Согласно правилу произведения число хоккейных команд, которые можно сформировать, будет равно $84 \cdot 10 \cdot 3 = 2520$.

Задача 3. Из группы, состоящей из 7-ми мужчин и 4-х женщин, необходимо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было бы не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В группе из 6-ти человек должно быть не менее двух женщин. Иными словами либо 2, либо 3, либо 4. Рассмотрим каждый вариант.
Вариант А: 2 женщины + 4 мужчины. Двух женщин из четырёх можно выбрать C_4^2 числом способов, а четырёх мужчин из семи C_7^4 числом способов.

Согласно правилу произведения, группу по варианту А можем выбрать $C_4^2 \cdot C_7^4 = 210$ числом способов.

Вариант В: 3 женщины + 3 мужчины. Женщин выбираем C_4^3, а мужчин C_7^3 числом способов. Согласно правилу произведения, группу по варианту В можем выбрать $C_4^3 \cdot C_7^3 = 140$ числом способов.

Вариант С: 4 женщины + 2 мужчины. Женщин выбираем C_4^4, а мужчин C_7^2 числом способов. Согласно правилу произведения, группу по варианту С можем выбрать $C_4^4 \cdot C_7^2 = 21$ числом способов.

При выборе нужной группы из шести человек, мы можем остановиться на варианте либо А, либо В, либо С. Согласно правилу суммы, число способов выбора данной группы будет равно 210 + 140 + 21 =371.

Задача 4. Сколько существует натуральных пятизначных чисел, которые читаются одинаково слева направо и справа налево?

Решение. Такое число имеет вид АВСВА. Для первой цифры А мы можем выбрать 1,2,...9, то есть все цифры, кроме 0, иначе число не будет пятизначным. После выбора первой цифры вторую В можно выбрать 0, 1, ...9, то есть 10-ю способами. Третью С можно выбрать также 10-ю способами. По правилу произведения общее число вариантов равно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сколькими способами можно составить дозор из трёх солдат и одного офицера, если имеется 8 солдат и 3 офицера.

(246480)

2. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать 2 так, чтобы их можно было бы приложитьдруг к другу?

(294)

3. У хозяина имеются 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько существует комбинаций для выбора нескольких птиц так, чтобы среди выбранных были и куры, и утки, и гуси?

(315)

4. Сколько существует натуральных чисел, которые состоят из нечётных цифр?

(5^5)

8. Непосредственный подсчёт способов отбора.

Задача 1. Бросаются две игральные кости. Сколько существует вариантов, чтобы сумма выпавших очков на обеих была бы равна 7?

Решение. Составим таблицу всех возможных комбинаций при бросании двух костей, чтобы на обеих в сумме было 7.

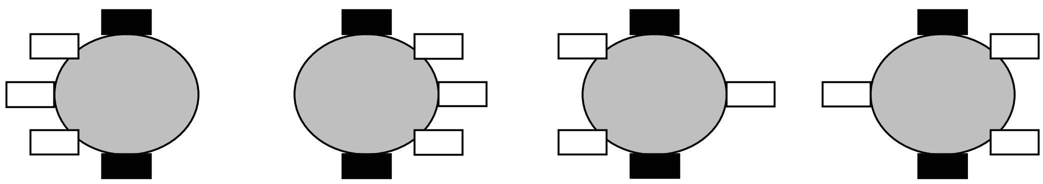
1-я : очки   1, 2, 3, 4, 5, 6

2-я : очки   6, 5, 4, 3, 2, 1

Очевидно, что других комбинаций быть не может. Значит, общее их число равно 6.

Задача 2. Сколькими способами можно разместить за круглым столом троих вновь прибывших гостей, если за столом уже сидят двое?

Решение. Обозначим уже сидящих гостей чёрными прямоугольниками, а вновь прибывших светлыми. Очевидно, что существует только 4 варианта подобного размещения.



Вариант 1   Вариант 2   Вариант 3   Вариант 4

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сколькими способами можно рассадить 6 человек на шести стульях так, чтобы два определённых человека оказались рядом?

(5)

2. Бросают 2 игральные кости. В каком числе случаев окажется, что произведение выпавших очков будет равно 6?

(4)

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Непосредственный подсчёт вероятности.

Задача 1. Участники жеребьёвки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Определить вероятность того, что номер первого наугад извлечённого жетона не будет содержать цифру 5?

Решение. Событие А: на номере первого извлечённого жетона нет цифры 5.

Очевидно, что общее количество элементарных исходов равно числу жетонов, то есть n = 100. Число же исходов, при котором событие А наступит, равно количеству жетонов без пятёрки. Такими будут все жетоны, кроме 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 65, 75, 85, 95. Их ровно 19. Следовательно, число исходов, благоприятствующих появлению события, А равно m = 100 – 19 = 81. Искомая же вероятность определится по формуле $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{81}{100} = 0.81$ (или 81%).

Задача 2. Монета брошена два раза. Какова вероятность того, что при этом хотя бы один раз появится герб (орёл)?

Решение. Событие А: появление при двух подбрасываниях хотя бы одного «орла».

Обозначим стороны монеты: «орёл» - О, «решка» - Р. При двух подбрасываниях монеты возможны следующие комбинации: ОО, ОР, РО, РР. Это и есть число элементарных исходов n = 4. Число исходов, благоприятствующих появлению событию А, равно m = 3. Искомая вероятность находится по формуле $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4} = 0.75$.

Задача 3. В урне находятся 6 белых и 4 чёрных шара. Вынули одновременно 2 шара. Какова вероятность того, что:

a) оба шара белые?

b) оба шара чёрные?

c) чёрный и белый?

Решение.

Событие А: вынутые шары белые.

Общее число испытаний, то есть возможность извлечения по два шара, определяется как число сочетаний из 10 элементов по 2, то есть $n = C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!\cdot 8!} = 45.$

Число же случаев, благоприятствующих появлению события А, определится как число сочетаний по 2 из 6 белых шаров. $m = C_6^2 = \dfrac{6!}{2!\cdot 4!} = 15.$ Искомая вероятность находится по формуле $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Событие В: вынутые шары чёрные.

Как и в предыдущем случае, общее число исходов равно $C_{10}^2 = 45$. Число же благоприятствующих событию В исходов определим как число сочетаний по 2 из 4 чёрных, то есть $m = C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6.$ Искомая вероятность появления двух чёрных шаров будет равна $p(B) = \frac{m}{n} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

Событие С: появление белого и чёрного шаров.

Как и прежде, $n = C_{10}^2 = 45$. Число исходов, при которых наступит событие С, будет равно: $m = C_6^1 \cdot C_4^1 = 6\cdot 4 = 24$, так как 1 белый шар из 6-ти можно выбрать шестью способами, а после 1 чёрный из 4-х – четырьмя. По правилу произведения 1 белый и 1 чёрный шары можно выбрать 24-мя способами. Искомая вероятность равна $p(C) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.

Задача 4. Набирая номер телефона, человек забыл три последние цифры абонента. Помня только, что они различны, он набрал номер наудачу. Какова вероятность того, что набран ы нужные цифры?

Решение. Событие А: набраны нужные три цифры.

Общее число элементарных исходов, то есть число всевозможных комбинаций трёх разных цифр 012, 102, 201, 120, 012, 021, 123, … и т.д. определится как число размещений из трёх элементов на множестве цифр 0, 1, …9: $n = A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720$. Очевидно, что событие А наступит только тогда, три цифры будут угаданы и расположатся на своих местах, а это может быть только в одном единственном случае. Значит, m =1. Искомая вероятность события равна $p(A) = \frac{1}{720}$.

Задача 5. Восемь разных книг наудачу расставленны на полке. Определить вероятность того, что 2 определённые книги окажутся рядом?

Решение. Событие А: две определённые книги оказались рядом на полке.

Очевидно, мы имеем дело с множеством книг, в которое входят элементы 2-х типов: те, которые должны оказаться рядом (их 2) и другие (их 6). Значит, общее число возможных вариантов расстановки книг можно вычислить по формуле перестановок с повторениями: $n = P_8(2,4) = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = 28.$ Число m благоприятных случаев можно подсчитать напосредственно. Обозначим те книги, что нас интересуют, значком Х, а прочие значком О. Получим таблицу:

1. ХХОООООО
2. ОХХООООО
3. ООХХОООО
4. ОООХХООО
5. ООООХХОО
6. ОООООХХО
7. ООООООХХ

Имеем всего 7 вариантов. Искомая вероятность равна $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

Задачи для самостоятельного решения.

1. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 чёрных и 5 красных. Найти вероятность того, что из урны будет вынут:

a) белый шар (1/4),

b) чёрный шар (1/3),

c) красный шар (5/12).

2. В лотерее участвуют 1000 билетов, среди которых ровно половина выигрышных. Некто купил 2 билета. Какова вероятность того, что оба выигрышные? (499/1998)

3. Бросают 2 кубика. Найти вероятность того, что:

a) число очков на обоих кубиках одинаково (1/5) ,

b) сумма очков на обоих кубиках чётна (0,5),

c) хотя бы на одном кубике есть шестёрка (11/36),

d) произведение выпавших очков равно 6 (1/9).

4. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобрали 7 человек. Какова вероятность того, что среди отобранных окажутся 2 женщины? (0,5)

5. Наугад выбирается пятизначное число. Найти вероятность того, что

a) число окажется кратным пяти (0,2),

b) число состоит из разных цифр (0,3).

6. Из полного набора 28 костей домино извлечена наудачу одна. Определить вероятность того, что вторую извлечённую кость можно будет приставить к первой, если:

a) первая кость дубль;

(2/9)

b) если первая кость не дубль.

(4/9)

2. <u>Геометрическая вероятность.</u>

Задача 1. На плоскости начерчены две концентрические окружности радиусов 5 см и 10 см. Какова вероятность того, что материальная точка, брошенная в большой круг, попадёт в кольцо, образованное этими окружностями.

Решение. Событие A: точка, брошенная наудачу, попала в кольцо. Очевидно, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от её расположения. Поэтому искомая вероятность определится как отношение площади кольца (g) к площади большого круга (G) : $p(A) = g/G$. Найдём эти площади. Площадь $G = \pi R^2$, площадь $g = \pi R^2 - \pi r^2$. Искомая вероятность будет равна

$$p(A)=\frac{pR^2-pr^2}{pR^2}=1-\frac{r^2}{R^2}=1-\frac{25}{100}=\frac{3}{4}=0.75.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что она попадёт внутрь вписанного в круг квадрата ($1/\pi$).

3. <u>Сложение вероятностей несовместных событий.</u>

Задача 1. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет 10 очков, составляет 10%, 9 очков – 30%, 8 и меньше очков – 60%. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

Решение. Не менее 9 очков – это либо 10, либо 9 очков. Введём следующие обозначения:

событие А: стрелок при одном выстреле выбил не менее 9 очков;

событие В: стрелок при одном выстреле выбил 10 очков;

событие С: стрелок при одном выстреле выбил 19 очков.

Для появления события А достаточно наступление событий либо В, либо С. Очевидно, что эти 2 события несовместны, поэтому А = В + С. По теореме о сложении вероятностей несовместных событий имеем: $p(A) = p(B+C) = p(B) + p(C)$. Вероятности этих событий заданы и равны соответственно 0,1 (10%) и 0,3 (30%). Искомая вероятность равна

$p(A)$ =0,1+0,3 = 0,4.

Задачу можно решить также с помощью теорема о вероятности противоположного события. Пусто событие А: стрелок при одном выстреле выбил не менее 9 очков. Противоположным ему назовём событие Ā: стрелок при одном выстреле выбил менее 9 очков. Это значит, что он выбил 8, 7, … 0 очков. Вероятность этого события задана и составляет 0,6 (60%). По теореме о вероятности противоположного события $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Задача 2. В ящике находятся 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна из них будет окрашенной?

Решение.

Способ 1.

Разберём, что значит «хотя бы одна из трёх». Очевидно, что окрашенной может оказаться только одна из трёх деталей, либо две из трёх, либо все три. Введём следующие обозначения:

событие А: хотя бы одна из трёх взятых деталей окрашена;

событие В: одна деталь из взятых окрашена, две не окрашены;

событие С: две из взятых окрашены, одна нет;

событие D: все три взятые детали окрашены.

Событие А произойдёт, если наступит какое-либо из событий В, или С, или D, которые являются несовместными. Поэтому событие А может быть представлено в виде суммы:

А = В + С + D. По теореме сложения получаем: $p(A) = p(B+C+D) = p(B) + p(C) + p(D)$. Найдём вероятности каждого события.

В: 1 окрашена + 2 не окрашены; $p(B) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = 0.5;$

С: 2 окрашены + 1 не окрашена; $p(C) = \dfrac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3} = 0.3:$

D: 3 окрашены; $p(D) = \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3} = 0.03.$

Искомая вероятность равна $p(A) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}03 = 0{,}83$.

Способ 2. Событие А: хотя бы одна из трёх взятых деталей окрашена. Противоположным по отношению к данному событию будет событие $\bar{A}$: ни одна из трёх взятых деталей не окрашена. Вероятность этого события буде равна $p(\bar{A}) = \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = 0.17.$ По теореме о вероятности двух противоположных событий получим $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$.

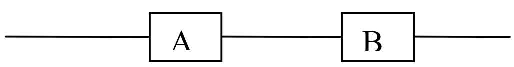
Задачи для самостоятельного решения.

1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрываются 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша (любого) для купившего один билет? (2%)

2. В партии из 10 деталей находятся 8 стандартных. Определить вероятность того, что из двух извлечённых наугад деталей хотя бы одна будет стандартной? (44/45)

4. <u>Умножение вероятностей независимых событий.</u>

Задача 1. Вероятность безотказной работы элемента А равна $p_1 = 0{,}9$, элемента В – $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятность безотказной работы цепи.



Решение. Событие А: работа элемента А; событие В: работа элемента В; событие С: работа всей цепи.

Поскольку оба элемента работают независимо друг от друга, события А и В независимы. Вся цепь будет работать только в том случае, если будут работать оба элемента: С = А*В. По теореме об умножении вероятностей независимых событий находим вероятность безотказной работы всей цепи: $p(C) = p(A*B) = p(A)\cdot p(B) = p_1\cdot p_2 = 0{,}9\cdot 0{,}8 = 0{,}72$.

Задача 2. В мешке смешаны нити, среди которых 30% белые, остальные красные. Наугад берут 2 нити. Найти вероятность того, что:

a) обе нити будут одного цвета;

b) обе нити будут разных цветов.

Решение.

a) Событие А: обе нити одного цвета. Это может произойти, если обе будут либо белые, либо красные. Рассмотрим ещё 2 события:

В – нить белая, вероятность его равна 0,3;

С – нить красная, вероятность его равна 1 – 0,3 = 0,7.

Событие А наступит, если наступят события В*В или С*С, то есть А = В*В + С*С. События В и С независимы, а события В*В и С*С несовместны. Находим искомую вероятность:

$p(A) = p(B*B + C*C) = p(B*B) + p(C*C) = p(B)\cdot p(B) + p(C)\cdot p(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}58$.

b) Событие D: обе нити разных цветов. В этом случае возможны такие варианты: 1-я нить белая, вторая красная либо 1-я красная, вторая белая. Событие D = B*C + C*B. Поскольку события А*В и В*А несовместны, вероятность того, что нити будут разных цветов равна:

$p(D) = p(B*C + C*B) = p(B*C) + p(C*B) = p(B)\cdot p(C) + p(B)\cdot p(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0.42$.

Задача 3. Студент разыскивает нужную ему формулу в трёх справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором или третьем справочниках равны соответственно 60%, 70% и 80%. Какова вероятность того, что формула содержится:

a) во всех трёх справочниках?

b) только в одном справочнике?

c) в двух каких-либо справочниках?

Решение.

a) Событие A: формула содержится во всех трёх справочниках.

Событие A_1: формула находится в первом справочнике, вероятность его равна 0,6;

Событие A_2: формула находится во втором справочнике, вероятность его равна 0,7;

Событие A_3: формула находится в третьем справочнике, вероятность его равна 0,8.

Очевидно, что последние три события независимы, а событие A наступит лишь тогда, когда будет иметь место совмещения всех трёх. Значит $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Искомая вероятность определится по теореме умножения $p(A) = p(A_1A_2A_3) = p(A_1)\cdot p(A_2) \cdot p(A_3) = 0{,}6\cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}366$.

b) Событие B: формула содержится только в одном справочнике. Здесь возможны такие варианты событий:

B_1: формула находится только в 1-м справочнике, во 2-м и 3-м её нет. Используя обозначения пункта a) можем записать $B_1 = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$. Здесь $\bar{A}_2$ и $\bar{A}_3$ противоположны событиям A_2 и A_3;

B_2: формула находится только во 2-м справочнике, в 1-м и 3-м её нет. $B_2 = \bar{A}_1\cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$;

B_3: формула находится только в 3-м справочнике, во 2-м и 1-м её нет. $B_3 = \bar{A}_1\cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$.

События B_1, B_2 и B_3 независимы, поэтому событие B состоит в наступлении либо B_1, либо B_2, либо B_3. Значит, $B = B_1 + B_2 + B_3$. В свою очередь, данные события несовместны, поэтому для нахождения искомой вероятности используем теорему сложения:

$$p(B) = p(B_1 + B_2 + B_3) = p(B_1) + p(B_2) + p(B_3) = p(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) =$$
$$= p(A_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(A_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(A_3) =$$
$$= 0{,}6\cdot (1 - 0{,}7)\cdot (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}6)\cdot 0{,}7\cdot(1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}6)\cdot(1 - 0{,}7)\cdot 0{,}8 = 0{,}036 + 0{,}056 + 0{,}095 = 0{,}188.$$

c) Событие C: формула содержится в двух справочниках. Рассмотрим все варианты возможных событий.

C_1 : формула находится в 1-м и 2-м справочниках и не содержится в 3-м: $C_1 = A_1 A_2 \bar{A}_3$;

C_2 : формула находится во 2-м и 3-м справочниках и не содержится в 1-м: $C_2 = \bar{A}_1 A_2 A_3$;

C_3 : формула находится в 1-м и 3-м справочниках и не содержится во 2-м : $C_1 = A_1 \bar{A}_2 A_3$;

Найдём вероятности каждого из этих событий.

$p(C_1) = p(A_1 A_2 \bar{A}_3) = p(A_1)\, p(A_2)\, p(\bar{A}_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}084$;

$p(C_2) = p(\bar{A}_1 A_2 A_3) = p(\bar{A}_1)\, p(A_2)\, p(A_3) = (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}224$;

$p(C_3) = p(A_1 \bar{A}_2 A_3) = p(A_1)\, p(\bar{A}_2)\, p(\bar{A}_3) = 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 = 0{,}144$;

Поскольку события C_1, C_2, и C_3 несовместны, искомая вероятность находится по теореме сложения $p(C) = p(C_1 + C_2 + C_3) = p(C_1) + p(C_2) + p(C_3) = 0{,}084 + 0{,}224 + 0{,}144 = 0{,}452$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Брошена монета и игральная кость. Определить вероятность того, что появятся герб и шестёрка. (1/12).

2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле для первого составляет 70%, для второго – 80%. Какова вероятность того, что при одном залпе в мишень попадёт только один стрелок? (38%)

3. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы одинаковы и равны 0,9, а на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо:

a) ответить на все вопросы (0,648);

b) ответить по крайней мере на 2 вопроса билета (0,954).

5. Вероятность хотя бы одного события.

Задача 1. Чему равна вероятность того, что при бросании трёх игральных костей шесть очков появится хотя бы на одной из костей?

Решение. Событие А: шесть очков появилось хотя бы на одной их трёх игральных костей. Выясним, что значит «хотя бы на одной». Очевидно, что шестёрка может появиться на 1-й и не появиться на 2-й и 3-й костях, либо появиться на 2-й и не появиться на 1-й и 3-й, либо появиться на 3-й и не появиться на 1-й и 2-й, либо появиться на 1-й и 2-й и не появиться на 3-й, либо появиться на 1-й и 3-й и не появиться на 2-й, либо появиться на 3-й и 1-й и не появиться на 2-й, либо появиться на всех трёх. Алгебра данного события достаточно громоздка. А если будут брошены 4 или даже 5 костей? Поэтому данную вероятность проще найти по формуле вероятности для хотя бы одного события.

Вероятность выпадения шести очков для всех костей одна и та же и равна p = 1/6. Вероятность противоположного события (не появления шестёрки) равна q = 1 – 1/6 = 5/6. Вероятность же появления хотя бы одной шестёрки на трёх игральных костях равна $p(A) = 1 - q^3 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Задача 2. Мотор прекращает работу при выходе из строя хотя бы одной системы: питания, газораспределения или зажигания. Вероятность выхода из строя системы питания равна 3%, системы газораспределения – 1%, системы зажигания – 10%. Найти вероятность остановки мотора.

Решение. Событие А: остановка мотора.

Введём обозначения: вероятность выхода из строя системы питания p_1 = 0,03, а вероятность противоположного события $q_1 = 1 - p_1$ = 0,97;

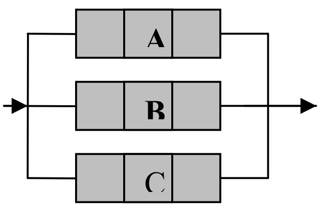
вероятность выхода из строя системы газоснабжения p_2 = 0,01, а вероятность противоположного события $q_2 = 1 - p_2$ = 0,99;

вероятность выхода из строя системы зажигания p_3 = 0,1, а вероятность противоположного события $q_3 = 1 - p_3$ = 0.9.

Искомая вероятность находится по формуле $p(A) = 1 - q_1\, q_2\, q_3 = 1 - 0.97 \cdot 0.99 \cdot 0.9 = 0.13573 \approx 0.14$.

Задача 3. Требуется определить надёжность работы системы из трёх звеньев с параллельным резервированием, если вероятности безотказной работы каждого элемента соответственно равны 90%, 80% и 95%.

Решение. Событие S: безотказная работа схемы.



Очевидно, что для работы схемы вполне достаточно, чтобы работало хотя бы одно звено: либо А, либо В, либо С, либо А и В, и т.д. Обозначим вероятности безотказной работы звеньев: $p(A) = p_1 = 0{,}9$; $p(B) = p_2 = 0{,}8$; $p(C) = p_3 = 0{,}95$. Вероятности противоположных событий, то есть вероятности отказа звеньев обозначим: $q_1 = 1 - p_1 = 0.1$; $q_2 = 1 - p_2 = 0.2$;
$q_3 = 1 - p_3 = 0.05$.
Искомая вероятность $p(S) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.05 = 0.999$.

Задача 4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,4. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 90% было бы хотя бы одно попадание по цели?

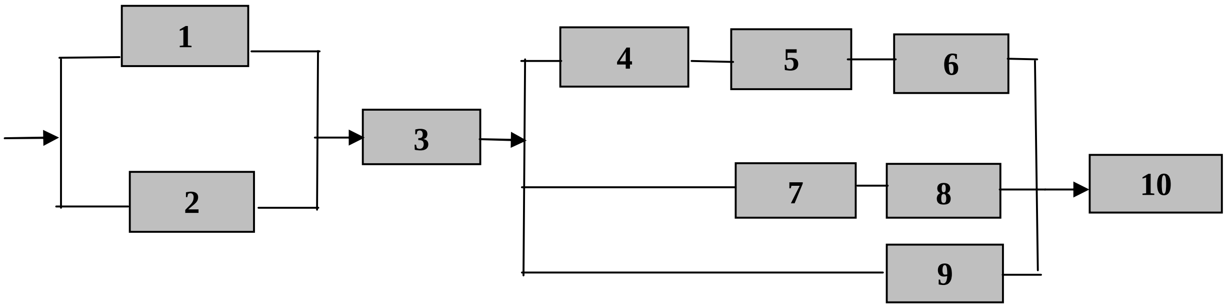
Решение. Событие А: хотя бы одно попадание при n выстрелах. Поскольку количество выстрелов неизвестно, обозначим его через n. Тогда вероятность хотя бы одного попадания равна $p(A) = 1 - q^n = 1 - (0{,}6)^n$. Здесь $q = 1 - p = 0.6$. И полученная вероятность должна быть не менее 90%, то есть получаем показательное неравенство:
$1-(0{,}6)^n \geq 0{,}9$. После преобразований получим: $(0{,}6)^n \leq 0{,}1$. Логарифмируя последнее неравенство по основанию 10, получаем $n \geq \dfrac{\lg 0.1}{\lg 0.6}$, или $n \geq 4{,}5$. Поскольку число выстрелов может быть только целым, выбираем ближайшее к 4,5 целое. Им будет число 5. Значит, для попадания по цели с вероятностью не менее 90% нужно сделать не менее 5 выстрелов.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Проверяют качество изделий. Для каждого из них вероятность того, что оно будет изделием 1 сорта равна 30%. Найти вероятность того, что из трёх наугад проверенных изделий изделием 1 сорта будет:
a) только одно изделие (0,441);
b) хотя бы одно изделие (0,343).

2. В пункте продажи железнодорожных билетов работают 4 кассы. Вероятности того, что в кассах нет очереди, соответственно, равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,1. Какова вероятность того, что подошедший пассажир сможет купить билет без очереди? (0,6976).

3. Найти вероятность безотказной работы схемы, если заданы вероятности безотказной работы каждого элемента: 1-го элемента p_1, 2-го – p_2 и т.д.



Ответ. $(1 - q_1 q_2) p_3 [1 - (1 - p_4 p_5 p_6)(1 - p_7 p_8) q_9] p_{10}$.

6. Умножение вероятностей зависимых событий. Условная вероятность.

Задача 1. В ящике находятся 10 деталей, среди которых 6 окрашены. Наудачу извлекаются 4 детали. Какова вероятность того, что все извлечённые окажутся окрашенными?

Решение. Событие А: четыре извлечённые детали окрашены. Очевидно, что событие А будет иметь место, если первая деталь окажется окрашенной, затем вторая, третья и четвёртая. Поэтому введём ещё события:

A_1: 1-я деталь окрашена;

A_2: 2-я деталь окрашена;

A_3: 3-я деталь окрашена;

A_4: 4-я деталь окрашена.

Событие $A = A_1 * A_2 * A_3 * A_4$. Все события выполняются последовательно, и появление следующего зависит от того, произошло или нет предыдущее. Вероятность того, что первая деталь будет окрашена, равна $p(A_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

При вычислении вероятности события A_2 необходимо учесть, что общее число деталей уменьшилось и равно 9, а число окрашенных – 5, то есть событие A_2 зависит от A_1. Условная вероятность $p(A_2 / A_1) = \frac{5}{9}$. Аналогично, событие A_3 невозможно без событий A_1 и A_2, и его условная вероятность равна $p(A_3 / A_1 A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. И, наконец, условная вероятность $p(A_4 / A_1 A_2 A_3) = \frac{3}{7}$. Искомая вероятность по теореме умножения зависимых событий равна:

$$p(A_1 A_2 A_3 A_4) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot p(A_3 / A_1 A_2) \cdot p(A_4 / A_1 A_2 A_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{14}.$$

Задача 2. Вероятность для студента первого курса перейти на второй составляет 90%, а вероятность окончить учебное заведение 80%. С какой вероятностью можно утверждать, что студент 2-го курса успешно окончит учёбу?

Решение. Рассмотрим события:

А: студент 2-го курса окончил учебное заведение;

В: студент 1-го курса перешёл на 2-й курс;

С: студент 1-го курса окончил учебное заведение.

Очевидно, что С = В*А, то есть сначала нужно перейти на 2-й курс, а затем уже окончить ВУЗ. С другой стороны, событие А зависимо от события В. По теореме о вероятности зависимых событий получим: $p(C) = p(A/B) \cdot p(B)$. Отсюда находим $p(A/B) = \frac{p(C)}{p(B)} = \frac{0.8}{0.9} \approx 0.89$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Из полной колоды (52 карты) наугад вынимают последовательно три карты. Найти вероятность того, что появятся “тройка”, “семёрка” и туз любой масти.

(8/16575)

2. Студент выучил 25 вопросов из 30. Какова вероятность того, что он ответит на 2 поставленных вопроса?

(20/29)

7. Сложение вероятностей совместных событий.

Задача 1. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятность отказа первого составляет 5%, второго – 8%. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно отказа хотя бы одного элемента.

Решение. Событие А: отказ 1-го элемента, $p(\text{A}) = 0{,}05$;

событие В: отказ 2-го элемента, $p(B) = 0{,}08$;

событие С: отказ хотя бы одного из элементов (или 1-го, или 2-го, или обоих).

Очевидно, что элементы работают независимо друг от друга. Поэтому события А и В совместны. Событие С = А + В. По теореме о вероятности совместных событий получаем :

$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A*B) = 0{,}05 + 0{,}08 - 0{,}05 \cdot 0{,}08 = 0{,}126.$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания по мишени 1-м стрелком составляет 70%, вторым - %. Найти вероятность, что хотя бы один из них попал по мишени. (88%).

8. Формула полной вероятности

Задача 1. Химические анализы на содержание примесей в целевом продукте делают два лаборанта. Вероятность ошибки для первого лаборанта составляет 1%, для второго – 2%. Первый лаборант выполнил 25 анализов, второй – 15. Найти вероятность того, что будет допущена ошибка.

Решение. Событие, которое нас интересует, это ошибка в анализе продукта. Назовём его событием А. Анализы же выполняют два лаборанта, и эти события назовём гипотезами:

H_1- анализ выполнил 1-й лаборант;

H_2- анализ выполнил 2-й лаборант.

Найдём вероятности этих гипотез. Всего было выполнено 25 + 15 = 40 анализов. Вероятность 1-й гипотезы $p(H_1) = 25/40 = 5/8$; вероятность 2-й гипотезы $p(H_2) = 15/40 = 3/8$. Проверим правильность постановки гипотез. Поскольку гипотезы есть события, которые образуют полную группу, сумма их вероятностей должна быть равна 1:

$p(H_1) + p(H_2) = \frac{5}{8} + \frac{3}{5} = 1.$ Следовательно, гипотезы поставлены верно.

Рассмотрим теперь событие А в условиях каждой гипотезы и наёдем его вероятность.

A/H_1: 1-й лаборант допустил ошибку, $p(A/H_1) = 0,01$;

A/H_2: 2-й лаборант допустил ошибку, $p(A/H_2) = 0,02$.

По формуле полной вероятности найдём вероятность того, что при анализе будет допущена ошибка:

$$p(A) = p(H_1)\cdot p(A/H_1) + p(H_2)\cdot p(A/H_2) = \frac{5}{8}\cdot 0,01 + \frac{3}{8}\cdot 0,02 \approx 0,014.$$

Задача 2. В ящике находятся три детали, среди которых могут быть стандартные и нестандартные. Рабочий бросил в него одну стандартную деталь, а через некоторое время наугад извлёк одну. Какова вероятность того, что была извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных и нестандартных деталей, первоначально бывших в ящике?

Решение. Событие А: из ящика извлечена стандартная деталь.
Сделаем различные предположения о том, что было в ящике до того, как туда была брошена стандартная деталь. Это и будут наши гипотезы.
H_1: в ящике были 1 стандартная + 2 нестандартных;
H_2: в ящике были 2 стандартные + 1 нестандартная;
H_3: в ящике были 3 стандартные + 0 нестандартных;
H_4: в ящике были 0 стандартных + 3 нестандартных.
По условию все эти гипотезы равновероятны, поэтому вероятность каждой из них равна ¼. После того, как в ящик была добавлена 1 стандартная деталь, произошли изменения в условиях каждой гипотезы. Вычислим вероятность события А по каждой из гипотез.
A/H_1 – извлечена стандартная деталь из ящика, где стало 2 стандартных + 2 нестандартных детали; $p(A/H_1) = 2/4 = ½$;
A/H_2 – извлечена стандартная деталь из ящика, где стало 3 стандартных + 1 нестандартная деталь; $p(A/H_2) =3/4$;
A/H_3 – извлечена стандартная деталь из ящика, где стало 4 стандартных + 0 нестандартных детали; $p(A/H_3) = 4/4 = 1$;
A/H_4 – извлечена стандартная деталь из ящика, где стало 1 стандартная + 3 нестандартных детали; $p(A/H_4) = 1/4$;
По формуле полной вероятности найдём вероятность того, что из ящика появится стандартная деталь:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{4} p(H_i)\cdot p(A/H_i) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\cdot 1 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{8} = 0.625.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. В тире имеется 5 винтовок, из которых три с оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом для данного стрелка составляет 95%, без оптического прицела – 80%. Найти вероятность попадания в цель, если стрелок делает один выстрел из наудачу взятой винтовки. (89%)

2. Студент выучил 20 билетов из 30-ти. Что для него лучше: идти отвечать первым, вторым или третьим? (неважно, в каждом случае вероятность сдачи примерно 67%).
3. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена одна. Какова вероятность того, что вторую извлечённую кость можно будет приставить к первой? (7/18).

9. Теорема гипотез (формулы Байеса)

Задача 1. В специализированную больницу поступают, в среднем, 50% больных с заболеванием «К», 30% с заболеванием «Л» и 20% с заболеванием «М». Вероятность полного излечения от болезней «К», «Л» и «М», соответственно, равны 70, 80 и 90%. Больной, поступивший в больницу, выписан здоровым. Каким заболеванием он вероятнее всего страдал?

Решение. Событие А: больной, поступивший в больницу, выписан здоровым;
гипотеза H_1: больной страдал заболеванием «К»; $p(H_1) = 0,5$;
гипотеза H_2: больной страдал заболеванием «Л»; $p(H_2) = 0,3$;
гипотеза H_3: больной страдал заболеванием «М». $p(H_3) = 0,2$.
Очевидно, что $p(H_1) + p(H_2) + p(H_3) = 0,5+0,3+0,2 = 1$.
A/H_1 – излечение заболевания «К», вероятность этого $p(A/H_1) = 0,7$;
A/H_2 – излечение заболевания «Л», вероятность этого $p(A/H_2) = 0,8$;
A/H_3 – излечение заболевания «М», вероятность этого $p(A/H_3) = 0,9$.
Чтобы выяснить, каким заболеванием вероятнее всего страдал выписанный больной, переоценим вероятность каждого заболевания по формулам Байеса:

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1)\cdot p(A/H_1)}{p(H_1)\cdot p(A/H_1) + p(H_2)\cdot p(A/H_2) + p(H_3)\cdot p(A/H_3)} =$$
$$= \frac{0.7\cdot 0.5}{0.7\cdot 0.5 + 0.3\cdot 0.8 + 0.2\cdot 0.9} = \frac{35}{77} = \frac{5}{11};$$

$$p(H_2/A) = \frac{p(H_2)\cdot p(A/H_2)}{p(H_1)\cdot p(A/H_1) + p(H_2)\cdot p(A/H_2) + p(B_3)\cdot p(A/H_3)} =$$
$$= \frac{0.8\cdot 0.3}{0.7\cdot 0.5 + 0.3\cdot 0.8 + 0.2\cdot 0.9} = \frac{24}{77};$$

$$p(H_3/A) = \frac{p(H_3)\cdot p(A/H_3)}{p(H_1)\cdot p(A/H_1) + p(H_2)\cdot p(A/H_2) + p(H_3)\cdot p(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0.9\cdot 0.2}{0.7\cdot 0.5 + 0.3\cdot 0.8 + 0.2\cdot 0.9} = \frac{18}{77};$$

Нетрудно видеть, что события H_1/A, H_2/A и H_3/A образуют полную группу событий, поэтому $p(H_1/A) + p(H_2/A) + p(H_3/A) = \frac{35}{77} + \frac{24}{77} + \frac{18}{77} = 1.$

Очевидно, что вероятность того, что больной до выписки страдал заболеванием К, является наибольшей из трёх полученных. Вероятнее всего, что больной был болен болезнью К.

Задача 2. Три стрелка произвели залп, причём мишень поразили только две пули. Найти вероятность того, что мишень поразил, в том числе, и третий стрелок, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим соответственно равны 60%, 50% и 40%.

Решение. В этой и подобных задачах очень важно правильно сформулировать интересующее событие и гипотезы. Казалось бы, нас интересует, попал ли третий стрелок или нет. Однако в условии задачи говорится о двух пробоинах в мишени. Это и есть то событие, относительно которого можно поставить гипотезы.

Событие А: мишень поражена двумя пулями.

Событие A_1; 1-й стрелок попал, $p(A_1) = 0{,}6$;

Событие A_2; 2-й стрелок попал, $p(A_2) = 0{,}5$;

Событие A_3; 3-й стрелок попал, $p(A_3) = 0{,}4$;

Гипотеза H_1: 3-й стрелок промахнулся; вероятность этой гипотезы дана и равна $p(H_1)=0{,}4$;

гипотеза H_2: 3-й стрелок попал также; $p(H_2)= 1- 0{,}4= 0{,}6$.

Очевидно, что $p(H_1) + p(H_2) = 1$.

Рассмотрим, какие варианты могут возникнуть в условиях каждой из гипотез.

Событие A/H_1: в мишени 2 пробоины и третий стрелок промахнулся. Единственно возможный вариант – 1-й и 2-й попали, $A/H_1 = A_1*A_2*\bar{A}_3$. Вероятность этого события равна

$p(A/H_1) = 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6 = 0{,}18$.

Событие A/H_2: в мишени 2 пробоины и третий стрелок попал в том числе. Здесь возможны такие допущения: 1-й и 3-й попали либо 2-й и 3-й. Алгебра события такова:

$$A/H_2 = A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_1A_3.$$

Вероятность этого события $p(A/H_2) = 0{,}6\cdot(1\text{-}0{,}5)\cdot 0{,}4 + (1\text{-}0{,}6)\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4 = 0{,}12+0{,}08 = 0{,}2$.

По формуле Байеса оценим вероятность 2-й гипотезы в новых условиях, то есть с двумя пробоинами:

$$p(H_2 / A) = \frac{p(H_2)\cdot p(A/H_2)}{p(H_1)\cdot p(A/H_1) + p(H_2)\cdot p(A/H_2)} = \frac{0.4\cdot 0.2}{0.6\cdot 0.18 + 0.4\cdot 0.2} \approx 0.43.$$

Это и есть вероятность того, что в мишень попал, в том числе, и третий стрелок.

Задача 3. В первой коробке находятся 6 белых и 4 чёрных шара, во второй – 3 белых и 2 чёрных. Из второй коробки наугад в первую перекладывают два шара. Затем тщательно перемешивают шары и из первой коробки наугад извлекают один шар. Он оказался чёрным. Какова вероятность того, что из 2-й коробки в первую были переложены 2 белых шара?

Решение. Событие, которое уже произошло – это появление чёрного шара после перекладывания. Это и будет событие А.

При перекладывании 2 шаров могут быть только три варианта: либо 2 белых шара, либо чёрный и белый, либо 2 чёрных. Это и будут рабочие гипотезы.

Гипотеза H_1: из второй в первую коробку переложены 2 белых шара. Вероятность этой гипотезы $p(H_1) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$;

Гипотеза H_2: из второй в первую коробку переложены 1 белый и 1 чёрный шар. Вероятность этой гипотезы $p(H_2) = \frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$;

Гипотеза H_1: из второй в первую коробку переложены 2 чёрных шара. Вероятность этой гипотезы $p(H_3) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$;

Проверим соотношение $p(H_1) + p(H_2) + p(H_3) = 3/10 + 3/5 + 1/10 = 1$. Гипотезы поставлены верно.

Рассмотрим теперь те изменения, которые произошли после перекладывания шаров и найдём вероятность появления чёрного шара в условиях каждой гипотезы.

Событие A/H_1: теперь в 1-й коробке 8 белых и 4 чёрных шара. Вероятность появления чёрного шара при этом равна $p(A/H_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$;

Событие A/H_2: теперь в 1-й коробке 7 белых и 5 чёрных шара. Вероятность появления чёрного шара при этом равна $p(A/H_2) = \frac{5}{12}$;

Событие A/H_2: теперь в 1-й коробке 6 белых и 6 чёрных шара. Вероятность появления чёрного шара при этом равна $p(A/H_3) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$;

По формуле Байеса находим интересующую нас вероятность:

$$p(H_1/A) = \frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Для участия в студенческих отборочных соревнованиях из числа студентов 1-го курса выделено 4 студента, 2-го курса – 6, 3-го – 5. Вероятности того, что студенты 1-го, 2-го и 3-го курса попадут в сборную учебного заведения, соответственно, равны 90%, 70% и 80%. Наудачу выбранный студент попал в сборную. На каком курсе он вероятнее всего учится? (на втором, 21/59)

2. В пирамиде установлены 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что некоторый стрелок поразит мишень при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 95%; из обычной винтовки – 80%. Стрелок поразил цель из наугад взятой винтовки. Из какой винтовки он, вероятнее всего, стрелял? (из обычной, с вероятностью 24/43).

3. В урне лежит шар неизвестного цвета (чёрный или белый с равной вероятностью). В неё опускают один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу достают один шар. Он оказался белый. Какова вероятность того, что оставшийся в урне шар тоже белого цвета? (2/3)

ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ С ДВУМЯ ИСХОДАМИ

1. Формула Бернулли

Задача 1. Вратарь парирует, в среднем, 30 из 100 одиннадцатиметровых штрафных ударов. С какой вероятностью он возьмет 2 из 4-х ударов?

Решение. По условию задачи производится $n = 4$ независимых испытания при одинаковых условиях. Рассматриваем только одно событие А: вратарь взял 11-метровый удар, вероятность которого $p(A) = p = 30/100 = 0,3$. Противоположное ему событие Ā: вратарь пропустил удар, вероятность его $p(\bar{A}) = 1 - p = q = 0,7$.

По формуле Бернулли находим вероятность того, что вратарь возьмёт 2 из 4-х штрафных ударов: $p_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot (0.3)^2 \cdot (0.7)^2 \approx 0.264.$

Задача 2. В семье пятеро детей. Какова вероятность того, что среди этих пяти детей будет:

а) два мальчика;

б) не более двух мальчиков;

в) более двух мальчиков?

По статистике на каждые 100 новорождённых приходится 51 мальчик.

Решение.

Событие А: рождение в семье двух мальчиков; вероятность рождения мальчика $p = 0,51$. По условию задачи $n = 5$ (количество независимых испытаний); $k = 2$ (количество событий); $q = 1 - p = 1 - 0,51 = 0,49$ – вероятность противоположного события. Тогда вероятность рождения двух мальчиков в семье с пятью детьми равна

$$p(A) = p_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot (0,51)^2 \cdot (0,49)^3 \approx 0,306.$$

Событие В: рождение в семье не более двух мальчиков. Это условие эквивалентно такому: родился либо 1, либо 2 мальчика. Следовательно, событие В будет являться суммой двух событий $B = B_1 + B_2$. Здесь B_1: рождение одного мальчика, B_2: рождение двух мальчиков в семье. Искомая вероятность определяется по формуле Бернулли как сумма вероятностей двух несовместных событий:

$$p(B) = p(B_1 + B_2) = p(B_1) + p(B_2) = C_5^1 \cdot p \cdot q^4 + C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot 0{,}51 \cdot (0{,}49)^4 +$$

$$+ \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot (0{,}51)^2 \cdot (0{,}49)^3 \approx 0{,}454.$$

Событие С: рождение более двух мальчиков. Это событие предполагает рождение двух, трёх, четырёх или пяти мальчиков. Также, как и в предыдущей задаче, событие $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Поэтому искомая вероятность также вычисляется по формуле Бернулли как сумма вероятностей четырёх несовместных событий.

$$p(C) = p(C_1) + p(C_2) + p(C_3) + p(C_4) = p_5(2) + p_5(3) + p_5(4) + p_5(5) = C_5^2 p^2 q^3 + C_5^3 p^3 q^2 +$$
$$+ C_5^4 p^4 q + C_5^5 p^5 q^0 = 10 \cdot 0{,}2601 \cdot 0{,}1176 + 10 \cdot 0{,}133 \cdot 0{,}24 + 5 \cdot 0{,}068 \cdot 0{,}49 + 0{,}035 \approx 0{,}515.$$

Задача 3. По статистике 25% мужчин носят обувь 41-го размера. Какова вероятность того, что из шести покупателей-мужчин, по крайней мере, двум необходима обувь 41-го размера?

Решение. Событие А: по крайней мере двум из шести покупателей потребовалась обувь 41-го размера. Иными словами, двум, трём, четырём, пяти или шести мужчинам нужна обувь данного размера. Задачу можно решить, применив теорему сложения вероятностей, а затем формулу Бернулли. Однако, задача решается проще, если сначала искать вероятность противоположного события.

Событие $\bar{A}$: менее, чем двум покупателям потребуется обувь 41-го размера. То есть или только одному (событие A_1), или ни одному (событие A_0). Тогда $A = A_1 + A_0$. По формуле Бернулли $p(\overline{A}) = p(A_1) + p(A_0) = p_6(1) + p_6(0) = C_6^1 p q^5 + C_6^0 p^0 q^6$. При $p = 0{,}25$; $q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$ искомая вероятность будет равна 0,534.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Монету бросают шесть раз. Определить вероятность, что герб появится:

а) менее двух раз (7/64);

б) не менее двух раз (57/64).

2. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми автомашин. На базе их 10. Вероятность невыхода каждой машины на линию составляет 10%. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день. (0,9298).

3. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 1/7. Какова вероятность того, что лицо, имеющее 6 билетов:

а) выиграет по двум билетам; (0,1652)

б) выиграет по трём билетам; (0,0367)

в) не выиграет по двум билетам? (0,0046)

2. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Задача 1. Вероятность рождения мальчика составляет 51%. Какова вероятность того, что среди 100 новорождённых окажется ровно 50 мальчиков?

Решение. Из условия задачи n = 100, k = 50, p = 0,51, q = 1 – 0.51 = 0.49. Поскольку число испытаний в задаче достаточно велико, то для решения используем локальную терему Лапласа.

Значение аргумента $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 100 \cdot 0{,}51}{\sqrt{100 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49}} = -0{,}2$. По таблицам находим значение дифференциальной функции Лапласа φ(-0,2) = 0,391. Искомая же вероятность будет равна

$$p_{100}(50) = \frac{1}{\sqrt{npq}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49}} \cdot 0{,}391 = 0{,}0782.$$

Задача 2. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдёт 130, если всхожесть этих семян составляет 75%.

Решение. Так как требуется найти вероятность того, что семена не взойдут, в формуле через p должна обозначаться вероятность невсхожести, а через q вероятность всхожести. Таким образом, имеем: n = 500, k = 130, p = 0,25 , q = 0,75.

Значение аргумента $x = \frac{130 - 500 \cdot 0{,}25}{\sqrt{500 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = 0{,}5164$. Значение φ(0,5164) = 0,3494.

Искомая вероятность будет равна:

$$p_{500}(130) = \frac{1}{\sqrt{500 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} \cdot 0{,}3494 = 0{,}1033 \cdot 0{,}3494 = 0{,}036.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти вероятность того, что при 600 выстрелах мишень будет поражена 250 раз, если вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 40%. (0,0235)

2. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 200 новорождённых окажется 95 девочек. (0,054)

3. Вероятность отказа каждого прибора при испытании составляет 20%. Что вероятнее: отказ четырёх приборов при испытании 20-ти или отказ шести приборов при испытании 30-то, если приборы испытывают независимо друг от друга? (четырёх из 20)

3. Формула Пуассона

Задача 1. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных.

Решение. Здесь n = 1000, p = 0,004, m = 5, $\lambda = np$ = 1000 · 0,004 = 4. Все эти числа удовлетворяют требованиям теоремы. Поэтому для нахождения вероятности используем формулу Пуассона: $p_{1000}(5) = \frac{l^m}{m!}e^{-l} = \frac{4^5}{5!}e^{-5} \approx 0{,}1563$. Значения функции Пуассона табулированы, и их можно найти для двух параметров λ и m. Однако, если нет таблиц, то можно прибегнуть к непосредственному вычислению, полагая число $e \approx 2{,}72$.

Задача 2. Молокозавод отправил в магазин 1000 пакетов молока. Вероятность повреждения одного пакета при транспортировке составляет 0,0004. Вычислить вероятность того, что число повреждённых при транспортировке пакетов не превысит трёх.

Решение. Событие А: число повреждённых пакетов не превысит 3-х. Другими словами, это число может быть 3 ,2, 1 или 0. Событие $A = A_3 + A_2 + A_1 + A_0$. Найдём вероятность каждого из этих событий, полагая m = 3; 2; 1 или 0; p = 0,0004; λ = 1000 · 0,0004 = 4.

$$p(A_3) = p_{1000}(3) = \frac{4^3}{3!}e^{-4} = 0{,}1954; \qquad p(A_2) = p_{1000}(2) = \frac{4^2}{2!}e^{-4} = 0{,}1465;$$

$$p(A_1) = p_{1000}(1) = \frac{4^1}{1!}e^{-4} = 0{,}0733; \qquad p(A_0) = p_{1000}(0) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} = 0{,}0183.$$

Поскольку события A_3, A_2, A_1 и A_0 являются несовместными, вероятность события А найдем как сумму этих событий

$$p(A) = p(A_3) + p(A_2) + p(A_1) + p(A_0) = 0.1954 + 0,1465 + 0,0733 + 0,0183 = 0,4335.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Среди семян ржи имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 5000 семян можно обнаружить 5 семян сорняков? (0,000055)

2. Вероятность получения дефектных оптических деталей при их полировке равна 0,003. За смену полируют 1000 деталей. Найти вероятность того, что будет:

а) ровно 2 дефектные; (0,224)

б) не менее двух дефектных; (0,8008)

в) не более двух дефектных; (0,6224)

г) хотя бы одна дефектная. (0,9502).

4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Задача 1. Вероятность отклонения температуры от номинальной в реакторе при каждом замере составляет 20%. Произведено 400 замеров. Найти вероятность того, что

а) в 50 замерах будет отклонение от номинальной температуры;

б) отклонение температуры будет не менее, чем в 50 замерах и не более, чем в 80.

Решение.

а) Событие А: появление отклонения от номинальной температуры. Вероятность этого события $p(A) = p = 0,2$; вероятность противоположного события $q = 1 - 0.2 = 0,8$. С помощью локальной формулы Муавра –Лапласа найдем искомую вероятность:

$$p_{400}(50) = \frac{1}{\sqrt{npq}} f\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} f\left(\frac{50 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = 0,125 \cdot 0,0004 \approx 0,00005$$

б) Для решения этой задачи используем интегральную теорему Муавра-Лапласа, поскольку нас интересует вероятность появления события в интервале от 50 до 80 раз. Используем формулу $p_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$. Здесь

$m_1 = 50, \quad m_2 = 80,$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -3{,}75; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0.$$

Тогда $p_{400}(50 \le m \le 80) = \Phi(0) - \Phi(-3{,}75) = 0 - (-0{,}4998) = 0{,}4998.$

Задача 2. Электростанция обслуживает сеть с 6000 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время испытания равна 80%. Найти вероятность того, что одновременно будет включено не менее 4750 лампочек.

Решение. Событие А: одновременно включено не менее 4750 лампочек, иными словами от 4750 и до 6000 лампочек. Применяем интегральную теорему Лапласа.

$$x_1 = \frac{4750 - 6000 \cdot 0{,}8}{\sqrt{6000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -\frac{50}{31} \approx -1{,}6129; \quad x_2 = \frac{6000 - 6000 \cdot 0{,}8}{\sqrt{6000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{1200}{31} = 38{,}7097.$$

$$p_{6000}(4750 \le m \le 6000) = \Phi(38{,}71) - \Phi(-1{,}61) = 0{,}5 - (-0{,}4463) = 0{,}9463.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти вероятность того, что из 1000 новорождённых окажется от 455 до 545 мальчиков, если вероятность рождения мальчиков равна 0,515? (0,9711)

2. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 41-го размера, равна 20%. Найти вероятность того, что из 750 покупателей не более 120 потребуют обувь этого размера. ($p(0 \le m \le 120) = 0{,}003$)

5. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испыианиях

Задача 1. Известно, что 30% женщин носит обувь 36-го размера. Найти вероятность того, что из 2000 покупательниц женской обуви отклонение доли нуждающихся в обуви этого размера не превысит по абсолютной величине 2%.

Решение. Используем формулу $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le e\right) \approx 2\Phi\left(e\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$

В нашем случае $n = 2000$, $p = 0{,}3$; $q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$; $\varepsilon = 0{,}02$. Число m –это количество покупательниц, которым нужна обув 36-го раз мера. Оно нам не известно. Однако формула позволяет найти искомую вероятность, не используя данную величину.

$$P\left(\left|\frac{m}{2000}-0{,}3\right|\le 0{,}02\right)\approx 2\Phi\left(0{,}02\cdot\sqrt{\frac{2000}{0{,}3\cdot 0{,}7}}\right)\approx 2\Phi(1{,}952)\approx 0{,}949$$

Таким образом, вероятность того, что среди 2000 покупательниц доля нуждающихся в обуви 36-го размера заключена в границах от 0,28 до 0,32 (0,3±0,02 или 30% ± 2%) составляет 0,949 (или примерно 95%).

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Задача 1. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Каков закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных?

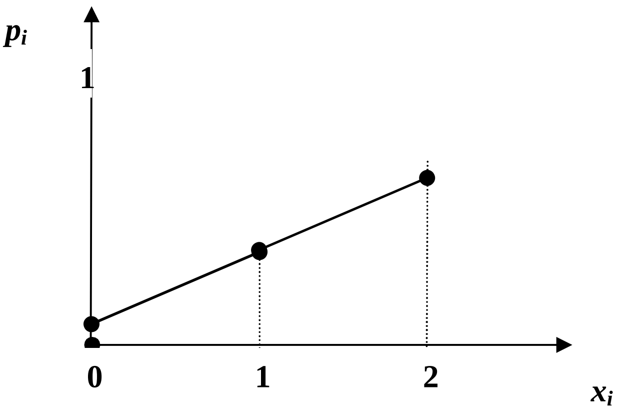
Решение. Обозначим через X случайную величину, принимающую значения, равные количеству стандартных деталей. среди отобранных двух. Очевидно, что среди отобранных двух может быть 2, 1 или вообще не быть стандартных. Значит, X = {0, 1, 2}. Найдём вероятности соответствующих значений $p(X = x_i)$

1. Не отобрали ни одной стандартной: .
2. Отобрали одну стандартную: $p_2 = p(X = x_2) = p(X = 1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$.
3. Отобрали две стандартные : $p_3 = p(X = x_3) = p(X = 2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}$.

Проверим условие $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = 1.$. Исходя из полученных данных, строим закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных:

x_i	0	1	2
p_i	1/45 ≈0,02	16/45 ≈0,36	28/45 ≈0,62

Построим многоугольник распределения. В прямоугольной системе координат будем по оси абсцисс откладывать возможные значения x_i , а по оси ординат соответствующие вероятности p_i . Построим точки (0; 0,02), (1; 0,36), (2, 0,62). Соединив эти точки отрезками прямых, получим искомый многоугольник распределения.



Найдём числовые характеристики этой случайной величины.

Математическое ожидание:

$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = 0 \cdot \frac{1}{45} + 1 \cdot \frac{16}{45} + 2 \cdot \frac{28}{45} = \frac{72}{45} \approx 1.6$

Дисперсия: $D(x) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n - m_x^2 = 0^2 \cdot \left(\frac{1}{45}\right)^2 + 1^2 \cdot \frac{16}{45} + 2^2 \cdot \frac{28}{45} = \frac{118}{45} \approx 2.62$.

Среднее квадратическое отклонение: $s\,(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{2.62} \approx 1.62$

Задача 2. Вероятность сдачи экзамена на «отлично» для каждого из шести студентов составляет 40%. Составить закон распределения количества пятёрок, полученных студентами на экзамене.

Решение. Обозначим через X случайную величину количества отличных оценок, полученных студентами на экзамене. Она может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (всего n = 7 значений). По условию p = 0,4, а $q = 1\text{-}p$ = 0,4. Случайная величина X распределена по биномиальному закону: $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Определим вероятности, с которыми X принимает значения:

$P(X = 0) = P_6(0) = C_6^0 p^0 q^6 = \frac{6!}{6! \cdot 0!} \cdot (0.4)^0 \cdot (0.6)^6 \approx 0.047;$

$P(X = 1) = P_6(1) = C_6^1 p^1 q^5 = \frac{6!}{5! \cdot 1!} \cdot (0.4)^1 \cdot (0.6)^5 \approx 0.187;$

$P(X = 2) = P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot (0.4)^2 \cdot (0.6)^4 \approx 0.031;$

$P(X = 3) = P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot (0.4)^3 \cdot (0.6)^3 \approx 0.276;$

$P(X = 4) = P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot (0.4)^4 \cdot (0.6)^2 \approx 0.138;$

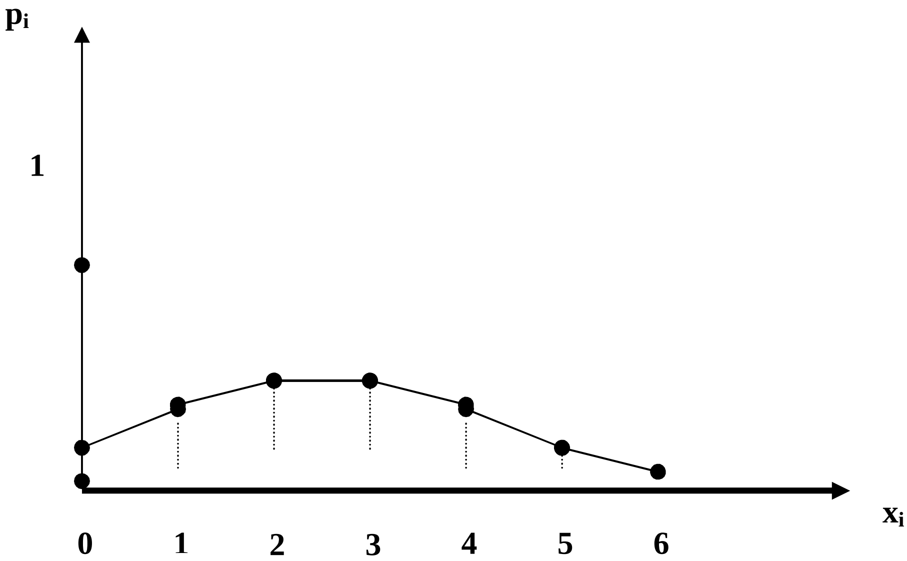
$P(X = 5) = P_6(5) = C_6^5 p^5 q^1 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot (0.4)^5 \cdot (0.6)^1 \approx 0.037;$

$P(X = 6) = P_6(6) = C_6^6 p^6 q^0 = \frac{6!}{0! \cdot 6!} \cdot (0.4)^6 \cdot (0.6)^0 \approx 0.004.$

Закон распределения данной случайной величины задаём таблицей:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0.047	0.187	0.311	0.276	0.138	0.037	0.004

Проверим условие: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0.047 + 0.187 + 0.311 + 0.276 + 0.138 + 0.037 + 0.004 = 1$



Математическое ожидание случайной величины, распределённой по биномиальному закону, равно $M(x) = np = 7 \cdot 0{,}4 = 2.8$.

Дисперсия $D(x) = npq = 7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 1.68$.

Среднее квадратическое отклонение $s(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{1.68} \approx 1.3$

Задача 3. Магазин получил 1000 стеклянных бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке окажется разбитой бутылка, равна 0,003. Какова вероятность того, что магазин получит:

a) ровно 2 разбитых бутылки?

b) более двух ?

c) хотя бы одну?

Решение. Обозначим через n = 1000 общее число полученных бутылок, p = 0,003 - вероятность того, что бутылка будет разбита.

Так как число n велико, вероятность p_мала и рассматриваемые события (разбитые и неразбитые бутылки) независимы, используем распределение Пуссона:

$$p_n(k) = \frac{l^k \cdot e^{-l}}{k!}$$

где $\lambda = np$ – среднее число появлений события в n испытаниях. В нашем случае $\lambda = 1000 \cdot 0,003 = 3$.

a) Вероятность того, что будет разбито ровно 2 бутылки равна:

$$p_{100}(2) = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = \frac{9 \cdot 0.04979}{2} \approx 0.224.$$

b) Вероятность того, что будет разбито более 2-х бутылок, определяется по теореме сумы вероятностей двух противоположных события, то есть

$$p_{1000}(3) + p_{1000}(4) + ... + p_{1000}(1000) = 1 - [p_{1000}(0) + p_{1000}(1) + p_{1000}(2)] =$$
$$= 1 - (0.1992 + 0.224 = 0.5768$$

c) Вероятность того, что будет разбита хотя бы одна бутылка, вычисляется аналогичо решению b): $p_{100}(1) = 1 - p_{1000}(0) = 1 - 0.04979 = 0.95021$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка составляет 50%, для второго- 40%. Составить закон числа попаданий по мишени. Построить многоугольник распределения случайной величины и найти её числовые характеристики.

2. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 4 детали. Составить закон распределения числа нестандартных деталей среди четырёх отобранных. Построить многоугольник распределения случайной величины и найти её числовые характеристики.

3. Станок-автомат штампует детали. Вероятность изготовления бракованной детали равна 1%. Какова вероятность того, что среди 200 изготовленных деталей окажется ровно 4 бракованных? (Ответ 0,09)