МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М. ЗАБОРОВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЗА ФАХОВИМ СПРЯМУВАННЯМ

Частина 1

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як конспект лекцій

Дніпропетровськ НМетАУ 2008

УДК 517. 2

Заборова Т.М. Вища математика за фаховим спрямуванням. Частина 1: Конспект лекцій. - Дніпропетровськ: НМетАУ, 2008. – 43 с.

Містить матеріал з лінійної та векторної алгебри, елементів аналітичної геометрії, а також елементів диференціального числення. Теоретичні питання ілюстровані прикладами та рисунками. Буде корисним для студентів при освоєнні курсу вищої математики та підготовці до виконання модульних контрольних робіт.

Призначений для студентів спеціальності 6.020105 – документознавство та інформаційна діяльність.

Іл. 1. Бібліогр.: 6 найм.

Відповідальний за випуск Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенти: К.Ф. Ковальчук, д-р екон. наук, проф. (НМетАУ)
Ю. М. Головко, канд. фіз.-мат. наук, доц. (НГУ)

© Національна металургійна академія України, 2008

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. Матриці та визначники.

Теорію матриць справедливо вважають арифметикою вищої математики. На жаль, ми обмежені програмою, тому не маємо можливості її детального вивчення. Підкреслимо лише, що вона має широке застосування при вивченні багатьох розділів математики, прикладних та інженерних наук. Введемо поняття матриці.

Таблицю чисел (взагалі кажучи комплексних), записану у формі

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix},$$

будемо називати квадратною матрицею.

Це тільки один із можливих видів матриць. Існують прямокутні, одиничні, нульові матриці і т. і. Числа a_{ij} називаються елементами матриці, де i– це номер рядка, а j - номер стовпця, на перехресті яких стоїть даний елемент.

Найпростіше співвідношення між матрицями – це їх рівність. Дві матриці вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли усі їх відповідні елементи рівні. Прийнято позначати матриці також у скороченому вигляді

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor, \quad B = \lfloor b_{ij} \rfloor.$$

Сума двох матриць визначається формулою

$$A + B = \lfloor a_{ij} + b_{ij} \rfloor.$$

Добуток матриці A на скаляр c визначається співвідношенням

$$cA = Ac = \lfloor ca_{ij} \rfloor.$$

Множення матриць буде розглянуто пізніше.

Будь-який квадратній матриці можна поставити у відповідність деяке число, яке називається визначником (або детермінантом). Визначники бувають другого, третього та інших порядків. Порядок визначника співпадає із кількістю його рядків (або стовпців), а обчислюються вони за певними правилами. При $N=2$ маємо визначник другого порядку, який прийнято позначати і знаходити так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При $N=3$ одержимо визначник третього порядку, який можна обчислювати декількома способами. Найпростішими є правило трикутників і правило Саррюса. За правилом трикутників маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

За правилом Саррюса маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Тобто, дописавши справа від визначника перший й другий його стовпці, перемножуємо елементи, що містяться на головній діагоналі та елементи, що розташовані паралельно цієї діагоналі, а потім перемножуємо елементи, що містяться на побічній діагоналі і елементи, розташовані паралельно цієї діагоналі. Далі додаємо одержані добутки, причому перші три з них беремо з тим знаком, який одержується, а три останніх – з протилежнім. Відзначимо, що головна діагональ визначника проходить по елементам a_{11}, a_{22}, a_{33}, а побічна відповідно по елементам a_{13}, a_{22}, a_{31}.

Третій спосіб розкриття визначника потребує додаткової інформації.

Мінором деякого елемента визначника називається визначник, що одержуємо, викреслюючи рядок і стовпець, на перетині яких знаходиться цей елемент.

Алгебраїчним доповненням деякого елемента визначника називається його мінор, що береться зі знаком плюс, коли сума номерів рядка і стовпця, на перетині яких знаходиться цій елемент, є парне число і зі знаком мінус, якщо ця сума є непарне число.

Отже, дамо третій спосіб розкриття визначника.

Величина визначника дорівнює сумі добутків елементів деякого з його рядків (або стовпців) на відповідні алгебраїчні доповнення.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Вище наведено розклад визначника за елементами першого рядка, але можна обрати будь який інший рядок (або стовпець). Зазначимо, що цей спосіб можна використовувати для розкриття визначників будь якого порядку. Тобто на відміну від правила трикутників, або правила Саррюса, які приведено для визначників третього порядку, цей спосіб є універсальним. Крім того, він вважається однією з властивостей визначників. Розглянемо їх інші властивості:

1. Величина визначника не зміниться, якщо кожний рядок змінити на стовпець із тим ж номером. Ця операція називається транспонуванням визначника. Її сенс полягає у тому, що рядки і стовпці визначника рівноправні.

2. При перестановці будь - яких рядків або стовпців абсолютне значення визначника залишається незмінним, а його знак змінюється на протилежний.
3. Визначник, у якого елементи одного рядка (або стовпця) відповідно пропорційні елементам іншого рядка (або стовпця) дорівнює нулеві.
4. Загальний множник усіх елементів одного рядка (або стовпця) можна винести за знак визначника.
5. Якщо кожний елемент якогось стовпця (рядка) є сума двох додатків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, де в одному замість суми стоїть тільки перший додаток, а у другому – тільки другий (інші елементи у обох визначників такі самі, як у даному).
6. Якщо до усіх елементів деякого стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка), помножені на якесь число, то новий визначник дорівнює старому.
7. Визначник, у якого усі елементи деякого стовпця (рядка) нульові, також дорівнює нулеві.

Практичний прийом обчислення визначників

Зауважимо, що цей прийом є особливо зручним, коли елементи визначників – цілі числа.

Намічаємо рядок (або стовпець), за елементами якого будемо вести розкладання. Бажано, щоб там був нуль. Прийом має за мету одержати у цьому рядку нові нулі, використавши властивість 6.

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо його за елементами другого рядка (він містить нуль). Утворимо ще один нуль елемент (на місці елемента 6). Для цього помножимо усі елементи третього стовпця на -3 і додамо ці нові числа до відповідних елементів другого стовпця. Одержимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -80.$$

Підкреслимо, що цей прийом бездоганно працює, коли треба обчислити визначники, наприклад, четвертого порядку і більш високого. Відсутність нульових елементів, або наявність дробів не є причиною відмови від його використання. Завжди можна одержати нульові елементи у деякому рядку (або стовпці). Якщо це незручно, скажімо, при обчисленні визначників третього порядку, то можна використовувати правило Саррюса, або правило трикутників.

1.2. Використання визначників до розв'язання та дослідження систем алгебраїчних рівнянь

Вперше визначники були введені для розв'язання системи рівнянь першої ступені. У 1750 році швейцарський математик Г. Крамер дав загальні формули, що виражають невідомі через визначники, елементами яких були коефіцієнти і праві частини системи. Приблизно через сто років теорія визначників, вийшовши далеко за межі алгебри, стала використовуватись в усіх математичних науках.

1.3. Два рівняння із двома невідомими

Розглянемо систему рівнянь із двома невідомими x та y:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y = h_1, \\ a_2 x + b_2 y = h_2. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Кожне з них представляє пряму на площині XOY, тому, розв'язуючи систему, ми фактично вивчаємо проблему взаємного розташування двох прямих.

Введемо позначення:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (визначник системи), $\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}$.

Визначник Δ_x одержимо із Δ заміною елементів першого стовпця на праві частини системи, аналогічно одержимо Δ_y.

Можливі три випадки.

Випадок 1. Визначник системи не дорівнює нулеві. Тоді система має єдиний розв'язок (**формули Крамера**):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad (1.2)$$

Тобто пара прямих, заданих системою (1.1), перетинається, а формули (1.2) дають координати точки перетину.

Випадок 2. Визначник системи дорівнює нулеві. Тобто коефіцієнти при невідомих пропорційні. Нехай при цьому один з визначників Δ_x, Δ_y не дорівнює нулю (тобто праві частини системи не пропорційні коефіцієнтам при невідомих). У цьому випадку система не має розв'язків (прямі, задані системою (1.1), паралельні).

Випадок 3. Усі визначники Δ, Δ_x, Δ_y дорівнюють нулю (тобто і коефіцієнти, і праві частини обох рівнянь (1) пропорційні). В такому випадку одне з рівнянь (1) є наслідком іншого. Система має безліч розв'язків (прямі, задані системою (1), співпадають).

Розглянемо приклади.

1. $$2x+3y=8, \quad 7x-5y=-3.$$

Маємо $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 7 & -5\end{vmatrix}=-31,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}8 & 3\\ -3 & -5\end{vmatrix}=-31,\ \ \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 7 & -3\end{vmatrix}=-62.$

Отже, система має єдиний розв'язок:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=2.$$

2. $$2x+3y=8, \quad 4x+6y=10.$$

Визначник системи $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=0.$ При цьому $\Delta_x=\begin{vmatrix}8 & 3\\ 10 & 6\end{vmatrix}=18\neq 0.$

Коефіцієнти системи пропорційні, а праві частини не підпорядковані цієї ж пропорції. Система несумісна, розв'язків не має.

3. $$2x+3y=8, \quad 4x+6y=16.$$

Усі визначники Δ, Δ_x, Δ_y дорівнюють нулю. Маємо випадок, коли фактично є одне незалежне рівняння (наприклад, друге одержимо з першого множенням на 2). Система має безліч розв'язків. (Кожна точка на прямій, що є геометричною моделлю рівняння, буде одним з розв'язків).

ЛЕКЦІЯ 2

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

2.1. Два рівняння із трьома невідомими.

Розглянемо систему рівнянь

$$a_1x+b_1y+c_1z=h_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=h_2.$$

Геометрична модель цієї системи - дві площини у просторі. Можливі три випадки.

Випадок 1. З трьох визначників $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}$ хоча б один не дорівнює нулю. Тоді система має безліч розв'язків, причому одна із невідомих може приймати будь – яке значення. Наприклад, якщо визначник

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$ то невідомій z можна давати будь яке значення, а невідомі x, y знаходяться єдиним образом з системи

$$a_1x + b_1y = h_1 - c_1z,$$
$$a_2x + b_2y = h_2 - c_2z.$$

Геометрична модель системи з двох рівнянь із трьома невідомими у даному випадку – пряма у просторі, що є лінією перетину двох даних площин. Кожна точка цієї прямої – це одне з рішень, і їх є безліч.

Випадок 2. Усі визначники $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ дорівнюють нулю, але один з визначників $\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & h_1 \\ b_2 & h_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & h_1 \\ c_2 & h_2 \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю, тобто коефіцієнти при невідомих пропорційні, а праві частини не підпорядковані цієї ж пропорції. У цьому випадку система не має розв'язків (площини, що мають рівняння, задані відповідно першим і другим рівняннями системи, паралельні).

Випадок 3. Усі визначники $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ і $\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & h_1 \\ b_2 & h_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & h_1 \\ c_2 & h_2 \end{vmatrix}$ дорівнюють нулю. Тоді обидві площини співпадають, система зведеться до одного рівняння із трьома невідомими, має безліч розв'язків, які є координатами точок на спільній площині.

Зауважимо, що аналогічно розглядається однорідна система (усі її праві частини тотожно дорівнюють нулю), що є частинним випадком розглянутій. Але є деякі особливості, притаманні однорідним системам, тому розглянемо її теж.

2.2. Однорідні системи двох рівнянь із трьома невідомими

Розглянемо систему:

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0.$$

Якщо звернутись до геометричної моделі цієї системи, то маємо дві площини, що проходять через початок координат, тобто вони або перетинаються при $x = 0,\ \ y = 0,\ z = 0$, або співпадають. Ось чому однорідна система завжди має розв'язок. Розглянемо детальніше два випадки.

Випадок 1. Коефіцієнти не пропорційні, тобто хоча б один з трьох визначників $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю. Тоді розв'язок можна записати у симетричному вигляді

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t,\ \ y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} t,\ \ z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t,$$

де параметр t - довільне число, а сам розв'язок є параметричне рівняння прямої перетину площин.

Випадок 2. Відповідні коефіцієнти при невідомих пропорційні, тобто дорівнюють нулю усі визначники

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Система зводиться до одного рівняння (площини співпадають).

2.3. Три рівняння із трьома невідомими

Розглянемо систему
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= h_3. \end{aligned}$$

Зауважимо, що кожне з рівнянь системи визначає площину у тримірному просторі, тому розв'язання та дослідження такої системи дає можливість встановити їх взаємне розташування.

Введемо позначення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ - визначник системи,}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ_x одержимо із визначника системи заміною першого стовпця правими частинами. Аналогічно одержимо Δ_y і Δ_z.

Якщо б елементи деяких двох рядків визначника системи були пропорційні, то відповідні рівняння системи були б або несумісні, або зводились би до одного рівняння. У першому випадку система не має розв'язків, а у другому одержимо систему з двох рівнянь із трьома невідомими. Така система розглядалась вище. Тому зараз припустимо, що у визначника Δ немає жодної пари рядків із пропорційними елементами (тобто серед трьох площин, заданих рівняннями системи, немає жодної пари паралельних). При цьому можливі три випадки.

Випадок 1. Визначник системи не дорівнює нулю. Система має єдиний розв'язок, який можна одержати за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Тобто три площини перетинаються у одній точці, а останні формули дають її координати.

Випадок 2. Визначник системи дорівнює нулю, але при цьому один з визначників Δ_x, Δ_y, Δ_z не дорівнює нулю. У даному випадку система несумісна і не має розв'язків.

Випадок 3. Визначник системи, а також визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z усі дорівнюють нулю. Цей випадок є найбільш цікавий і найбільш важкий для дослідження. Тому що можливі такі варіанти: або система має безліч розв'язків, або вона їх не має зовсім! Помітну роль у дослідженні грає геометрична модель системи. Наприклад, якщо коефіцієнти і праві частини якихось двох рівнянь пропорційні, то система зведеться до двох рівнянь і має безліч розв'язків.(Усі розв'язки системи при цьому розташовані на прямій, яка є їх лінією перетину). Якщо пропорційні коефіцієнти і праві частини усіх трьох рівнянь, то система зведеться до одного рівняння.(Усі три площини співпадають і координати будь якої точки на цій площини – це деякий з розв'язків системи). Або ще одна ситуація: дві з трьох площин співпадають, а третя їм паралельна. Усі визначники будуть дорівнювати нулю, маючі два пропорційних рядка, але, очевидно, що розв'язків така система не має. На жаль нам бракує часу для більш детального дослідження усіх випадків, які можуть бути при цієї проблемної ситуації.

2.4. Однорідні системи трьох рівнянь із трьома невідомими

Розглянемо однорідну систему
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0. \end{aligned}$$

Можливі два випадки.

Випадок 1. Визначник системи не дорівнює нулю. Система має єдиний розв'язок $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

До речі, його можна знайти за формулами Крамера.

Випадок 2. Визначник системи дорівнює нулю. Система має безліч розв'язків, тому що зводиться або до системи із двох рівнянь із трьома невідомими, або до одного рівняння із трьома невідомими. Ці ситуації вже розглядались, тому деталі опустимо.

2.5. Метод виключення невідомих, або метод Гаусса

Цей метод добре знайомий ще зі шкільного курсу математики. Його ідея проста й прозора. Але корисно хоча б на прикладі знову звернутися до метода Гаусса. Розглянемо систему:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= h_3. \end{aligned}$$

За методом Гаусса треба з першого рівняння виразити x і підставити його у друге і третє рівняння, потім з другого рівняння виразити y і підставити його у третє рівняння, яке вже буде містити тільки одне невідоме - z. Це лінійне рівняння легко розв'язати, а потім послідовно знайти інші невідомі. До речі, якщо виключення невідомих проводити інакше, тобто спочатку виключити, наприклад, y або z, якщо це доцільніше, результат також буде одержаний.

Приклад. Розв'язати систему за методом Гаусса:

$$x - y + 2z = 2,$$
$$2x + y - 4z = -1,$$
$$x + 2y + z = 4.$$

Із першого рівняння виразимо x: $x = 2 + y - 2z$. Підставимо його у друге і третє рівняння. Одержимо: $2 \cdot (2 + y - 2z) + y - 4z = -1, \quad 2 + y - 2z + 2y + z = 4.$

Виконаємо приведення подібних, тоді маємо:

$3y - 8z = -5, \quad 3y - z = 2.$

Далі можна діяти за стандартною схемою, тобто виразити у нашому випадку саме $3y$ з першого із останніх рівнянь і підставити у друге, а можна просто помножити друге рівняння на *-1* і додати до першого. Отже, одержимо $-7z = -7$. Звідси $z = 1$. Дали підставляємо знайдене значення в будь – яке з рівнянь $3y - 8z = -5, \quad 3y - z = 2.$ Для визначеності оберемо друге з них. $3y - 8z = -5, \quad 3y - z = 2.$ Звідси $3y - 1 = 2, \quad y = 1.$ Залишається знайти x.

Отже, $x = 2 + y - 2z = 2 + 1 - 2 = 1.$

2.6. Матричний спосіб розв'язання систем

Цей спосіб розглянемо для системи трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3. \end{aligned} \qquad (*)$$

Підкреслимо, що спосіб може бути реалізований при умові, що визначник даної системи не дорівнює нулю. Систему (*) можна записати у, так званій, матричній формі, а саме: $AX = H$, де

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ - матриця коефіцієнтів системи, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ - стовпець із невідомих системи (іноді кажуть вектор-стовпець), $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$ - стовпчик із правих частин системи. За правилом множення матриць треба усі елементи першого рядка матриці *A* треба помножити на відповідні елементи матриці *X*, при цьому одержуємо перший елемент матриці *H*, тобто маємо перше рівняння системи (*). Аналогічно можна одержати друге і третє рівняння. Тобто матрична форма системи і вже знайома форма (*) очевидно еквівалентні. Припустимо тепер, що існує така матриця A^{-1}, яка називається оберненою до даної і для якої справедлива рівність: $A^{-1} \cdot A = E,$ де E – одинична матриця, тобто $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Легко бачити, що добуток одиничної матриці на будь - яку іншу, залишає останню незмінною. Тому, якщо б обернену матрицю нам вдалось знайти, то розв'язок системи мав би вигляд:

$X = A^{-1} \cdot H.$

Математики знайшли спосіб побудови оберненої матриці. Він полягає у виконанні таких дій:

1. Будуємо матрицю із алгебраїчних доповнень матриці A, тобто

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}.$$

   Великими літерами позначено відповідні алгебраїчні доповнення до елементів матриці A.

2. Одержану матрицю із алгебраїчних доповнень транспонуємо:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}.$$

3. Нарешті одержимо обернену матрицю, помноживши останню матрицю на $1/\Delta$, де Δ - визначник системи. Таким чином, обернена матриця дорівнює $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$, тому остаточно розв'язок системи саме такий: $X = A^{-1} \cdot H.$

   Корисні зауваження. 1. Зрозуміло, що починати реалізацію матричного методу треба зі знаходження визначника системи. Якщо визначник дорівнює нулю, не має ніякого сенсу використовувати цей метод.

   2. При перемноженні матриць треба, щоб кількість елементів у рядку першої з них дорівнювала кількості елементів у стовпці другої.

   3. При обранні того чи іншого метода розв'язання системи треба намагатися обрати найоптимальніший для даної системи. Наприклад, якщо легко виключаються невідомі, то має сенс віддати перевагу методу Гаусса. Одним словом, завжди корисно підключати здоровій глузд при обранні кращого шляху.

   4. Широке використання визначників,

матриць і систем лінійних рівнянь у різноманітних застосуваннях важко перерахувати. До речі ми будемо застосовувати їх і при вивченні аналітичної геометрії, і векторної алгебри, розв'язуючи задачі і виконуючі дослідження.

ЛЕКЦІЯ 3.

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Апарат векторної алгебри досить простий. Але він дозволяє вивчати широке коло різноманітних проблем. Наприклад, розв'язання деяких задач аналітичної геометрії без використання елементів векторної алгебри або дуже ускладнено або просто неможливо. Можна наводити ще багато прикладів, але спочатку звернемось до визначень.

Векторною величиною, або *вектором,* називається величина, що має напрямок. У курсі геометрії *вектором* називається направлений відрізок.

Наприклад, сила, діюча на матеріальну точку, швидкість цієї точки - це вектори. Величини, що не мають напрямку, наприклад, температура тіла або його маса – це, так звані, *скалярні величини*.

Прийняте позначення для векторів, якщо його початок знаходиться у точці *A*, а кінець у точці *B*, - таке: $\overline{AB}$. Інколи вектори позначають однією буквою: $\overline{a}$. Довжина вектора називається інакше *модулем вектора*.

Знаходиться модуль вектора, якщо відомі координати початку і кінця вектора за звичайною формулою відстані між двома точками. А саме, нехай задані координати $A(x_1,y_1,,z_1)$ і $B(x_2,y_2,,z_2)$. Тоді модуль вектора одержимо за формулою $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Координати вектору – це проекції його на відповідні координатні вісі. (Проекція вектора на вісь – це вектор, початок якого співпадає із проекцією початку даного вектора на вісь, а кінець – із проекцією його кінця).

Для розглянутого вище вектору вони знаходяться так: $\overline{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = (X, Y, Z)$. Таким чином, модуль вектора дорівнює квадратному кореневі з суми квадратів його координат. Напрямок вектора можна визначити за допомогою його направляючих косинусів. Останні – це косинуси кутів $a,b,g.$, яки даний вектор утворює відповідно із віссю *x*, віссю *y* та віссю *z*. Направляючи косинуси дорівнюють:

$$\cos a = \frac{X}{\left|\overline{AB}\right|}, \quad \cos b = \frac{Y}{\left|\overline{AB}\right|}, \quad \cos g = \frac{Z}{\left|\overline{AB}\right|}.$$

Очевидно $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 1.$

Якщо вектор має довжину, що дорівнює одиниці масштабу, то напрямні косинуси співпадають із відповідними координатами вектора.

3.1. Лінійні операції з векторами

Лінійні операції з векторами – це множення векторів на число, а також їх додавання й віднімання. Припустимо, що задані два векторі $\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ і $\bar{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$. Помножити вектор на число (скаляр) m, означає множення на це число усіх координат вектора, тобто $m\bar{a} = (mX_1, mY_1, mZ_1)$. При додаванні або відніманні векторів їх відповідні координати додаються або віднімаються, при цьому одержуємо новий вектор, координати якого знаходяться як сума (різниця) відповідних координат векторів, що додаються (віднімаються).

Ще у шкільному курсі математики вивчались два правила додавання векторів: правило трикутників і правило паралелограма. Тому ми не будемо їх зараз розглядати, а детальніше повторимо їх на практичних заняттях. При цьому віднімання деякого вектора доцільно замінити на додавання вектора, що має протилежний напрямок і той же модуль. Все, що було сказано про лінійні операції над векторами природно розповсюджується на випадок будь - якої конечної кількості векторів, що додаються, віднімаються або множаться на деяке число.

3.2. Рівність векторів

Два вектори вважаються рівними, якщо вони мають однакові модулі і однаковий напрям. Тому усі вектори які співпадуть при паралельному переносі ідентифікуються, тобто, взагалі кажучи, являють собою один і той же вектор. (Слід зробити застереження, що не допускається поворот векторів на будь-який кут! Тільки паралельний перенос! Скажімо, два відрізки що мають однакову довжину, вважаються рівними. Але відрізок - скалярна величина, тому для них напрям не має значення: вони можуть бути розташовані під будь - якими кутами. Для векторів напрям повинен залишатися незмінним!).

Інакше можна казати так: два вектори є рівні, якщо вони мають рівні координати.

3.3. Колінеарні вектори

Два вектори називаються колінеарними, якщо вони розташовані на одній прямій або на паралельних прямих. Якщо задано два вектора $\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ і $\bar{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$, то вони колінеарні за умовою:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Тобто у колінеарних векторів відповідні координати пропорційні.

3.4. Компланарні вектори

Компланарні векторі – це вектори, розташовані на одній площині, або на паралельних площинах. Скоріше за все, термін «компланарний» - абревіатура від англійської "the Common plane" («загальна (одна й теж площина»), коли від першого слова взято 3 букви, а від другого – 4. Умови, за якими два вектори компланарні, будуть розглянуті нижче (а саме: при вивченні змішаного добутку векторів).

3.5. Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ і $\bar{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$ називається число (скаляр), що дорівнює $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos j$, де j - кут між векторами. Якщо відомі координати векторів, то можна знайти скалярний добуток за формулою $\bar{a}\bar{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$.

Відмітимо деякі проблеми, розв'язання яких можливо за допомогою застосування скалярного добутку:

1. Механічна робота A сили $\bar{F}$, якщо вектор переміщення - $\bar{S}$. $A = \bar{F} \cdot \bar{S}$.
2. Умова перпендикулярності двох векторів: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Дійсно, косинус прямого кута дорівнює нулю.
3. Кут між векторами можна знайти за формулою $\cos j = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$.
4. Скалярний квадрат вектора $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0^0 = |\bar{a}|^2$. (Простий, але дуже корисний результат: скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля).
5. Проекція вектора на вектор. Відомо, що проекція вектора на вісь – це добуток модуля вектора на косинус кута, що утворює вектор із віссю. У даному випадку один з векторів грає роль цієї вісі, а тому одержуємо: $np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos j = |\bar{a}| \cdot \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$.(При одержанні формули використано співвідношення, наведене у пункті 3).

ЛЕКЦІЯ 4.

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

4.1. Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ називається третій вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, який має наступні властивості:

1. Вектор $\bar{c}$ є перпендикулярним до векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ й утворює із ними, так звану, праву трійку векторів. Останнє означає що, якщо ви знаходитесь на кінці вектора $\bar{c}$, то найкоротший поворот від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ ви бачите проти часової стрілки (при протилежній ситуації трійка називається правою).

2. Якщо у векторному добутку вектори поміняти місцями , тоді маємо: $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}.$

3. Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, тобто $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin j$, де j - це кут між цими векторами. До речи, якщо треба знайти площу трикутника, достатньо поділити площу паралелограма навпіл.

4. Якщо відомі координати векторів, а саме: $\bar{a} = (X_1,Y_1,Z_1)$, $\bar{b} = (X_2,Y_2,Z_2)$, то координати вектора $\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$ можна знайти, розкривши за елементами першого рядка наступний визначник:

$$\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix},$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - так звані орти декартової прямокутної системи координат у тримірному просторі: вектори, модулі яких дорівнюють одиниці, а напрямки співпадають із додатними напрямками відповідних осей координат, тобто x, y, z. Саме коефіцієнти при $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ після розкриття визначника за елементами першого рядка є координатами векторного добутку.

5. Із попереднього пункту маємо: векторний добуток двох колінеарних векторів дорівнює нулю. Цей висновок можна зробити, використавши розглянуті вище результати. А саме: у колінеарних векторів відповідні координати пропорційні і визначник, що має пропорційні рядки дорівнює нулю.

Приклад 1. Знайти площу трикутника, заданого його вершинами $A(3,4,-1), B(2,0,4), C(-3,5,4).$

Шукана площа дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}.$ Знайдемо координати цих векторів.
$\overline{AB} = \{2-3,\ 0-4,\ 4-(-1)\} = \{-1,\ -4,\ 5\}$, $\overline{AC} = \{-6,\ 1,\ 5\}.$ Векторний добуток цих векторів $\overline{AB}\times\overline{AC} = \{-25,-25,-25\}.$

Тому $S = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-25)^2+(-25)^2+(-25)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1875}.$

Приклад 2. Нехай $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орти декартової системи координат. Знайти $\bar{i}\times\bar{i}, \bar{i}\times\bar{j}, \bar{i}\times\bar{k}.$ Очевидно, що $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$, $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$, $\bar{k} = \{0, 0, 1\}.$ Користуючись властивістю 4, маємо: $\bar{i}\times\bar{i} = 0$, тому що у визначнику другий і третій рядки однакові. $\bar{i}\times\bar{j} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{k}.$ Аналогічно одержуємо $\bar{i}\times\bar{k} = -\bar{j}.$

4.2. Змішаний добуток векторів

Змішаним (або векторно-скалярним) добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (взятих у вказаному порядку) називається скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на векторний добуток $\bar{b}\times\bar{c}$. Позначення змішаного добутку: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. Зауважимо, що при круговій перестановці співмножників змішаний добуток не змінюється, при перестановці двох співмножників – змінює знак на протилежний:
$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \overline{bca} = \overline{cab} = -(\overline{bac}) = -(\overline{cba}) = -(\overline{acb})$.
У багатьох випадках треба знайти число, якому дорівнює змішаний добуток, або знак цього числа. Найпростіше зробити це, якщо відомі координати усіх трьох векторів. Нехай $\bar{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\bar{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$, $\bar{c} = (X_3, Y_3, Z_3)$. Тоді

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Змішаний добуток використовується при розв’язанні багатьох задач аналітичної геометрії. Відмітимо найбільш важливі:

1. Ознака компланарности. Якщо три вектори компланарні, то їх змішаний добуток дорівнює нулю.
2. Орієнтація трійки векторів у тримірному просторі. Якщо система із трьох векторів права, то $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, якщо трійка векторів ліва, то $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$.
3. Геометрична інтерпретація змішаного добутку. Модуль змішаного добутку трьох не компланарних векторів дорівнює об’єму паралелограма, побудованого на цих векторах.
4. Об'єм тетраедра, побудованого на трьох векторах, дорівнює модулю змішаного добутку цих векторів, поділеному на 6.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах {1, 2, 3}, {-1, 3, 4}, {2, 5, 2}. Маємо

$V = \pm\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \pm(-27)$. Відповідь повинна бути додатною, тому $V = 27$.

Приклад 2. Найти об'єм трикутної піраміди *ABCD* із вершинами у точках *A*(2, -1, 1), *B*(5, 5, 4), *C*(3, 2 -1), *D*(4, 1, 3). Знайдемо координати векторів, розташованих на ребрах піраміди, початок яких знаходиться, наприклад, у точці *A*. Шуканий об'єм дорівнює $\frac{1}{6}$ від об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Отже,

$\overline{AB} = \{3, 6, 3\}$, $\overline{AC} = \{1, 3, -2\}$, $\overline{AD} = \{2, 2, 2\}$. Тому $V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Звідси $V = 3$.

ЛЕКЦІЯ 5.

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Аналітична геометрія виникла з потреби у таких засобах розв'язання геометричних задач, які було б можливо застосовувати до вивчення важливих для практиці кривих ліній різноманітної форми.

Ця мета була досягнута при використанні координатного методу. При цьому провідна роль належить обчисленням, а побудови мають допоміжне значення. У даному розділі використовується прямокутна система координат на площині, що добре знайома усім, завдяки шкільному курсу математики.

5.1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Будь-яку пряму, не паралельну вісі ординат, можна представити рівнянням вигляду $y = ax + b,$ де a є тангенс кута, що пряма утворює із додатним напрямком вісі абсцис, а b - це відрізок, який пряма відсікає на вісі ординат, починаючи від початку координат.

Величину а інакше називають кутовим коефіцієнтом прямої, величину b *- початковою координатою*.

Приклад. Написати рівняння прямої, що утворює з віссю абсцис кут, рівний (- 45°) і відсікає на вісі ординат відрізок, рівний (- 3).

Кутовий коефіцієнт $a = tg(-45^{\circ}) = -1, b = -3.$ Таким чином, шукане рівняння є $y = -x - 3.$

5.2. Пряма, паралельна вісі

Пряма, паралельна вісі абсцис має рівняння $y = b,$ де величина b за абсолютною величиною дорівнює відстані її від вісі абсцис. Якщо $b > 0,$ то пряма розташована над віссю абсцис, якщо $b < 0,$ то «під» нею. Сама вісь абсцис має рівняння $y = 0.$

Аналогічно, пряма, паралельна вісі ординат, має рівняння $x = c, \quad c = const.$ А рівняння самої вісі ординат $x = 0.$

5.3. Загальне рівняння прямої

Рівняння $Ax + By + C = 0$, де A, B, C можуть приймати будь-які значення (за виключенням випадку одноразового обернення в нуль A і B) називають загальним рівнянням прямої. Будь - яку пряму можна представити у такому вигляді. Легко бачити, що при $A = 0$ одержимо пряму, паралельну вісі абсцис, при $B = 0$ - пряму, паралельну вісі ординат. Розв'язавши загальне рівняння прямої відносно y (при умові, що $B \neq 0$), одержимо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Нижче будуть розглянуті інші способи завдання рівняння прямої, і ми побачимо, що будь - яке з них також можна представити у загальному вигляді. Взагалі кажучи, при необхідності за рідкими виключеннями можна міняти форму, у який задано рівняння прямої, одержуючи саме ту, яка потрібна у конкретному випадку.

5.4. Рівняння прямої, що проходить через задану точку у даному напрямку

Нехай відомо, що пряма $y = ax + b$ проходе через точку $M(x_1, y_1)$. Підставляючи координати цієї точки у рівняння прямої одержуємо тотожність $y_1 \equiv ax_1 + b.$ Віднімаючи від лівої частини рівняння прямої ліву частину тотожності, а від правої частини – праву, одержимо рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку:

$$y - y_1 = a(x - x_1). \qquad (5.1)$$

5.5. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Використаємо щойно одержане рівняння. Припустимо, що відомі координати ще однієї точки $N(x_2, y_2)$, яка розташована на тієї ж прямій. Маємо тотожність: $y_2 - y_1 \equiv a(x_2 - x_1).$Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки одержимо, поділивши ліву частину рівняння (5.1) на ліву частину цієї тотожності, а праву – на праву:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

5.6. Рівняння прямої у відрізках

Пряма, що має вигляд $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$ де a і b - відрізки, що вона відсікає на осях абсцис і ординат відповідно, називається прямою у відрізках на осях координат. Перетворимо загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до цього вигляду. При умові, що числа A, B, C не обертаються у нуль, маємо: $Ax + By = -C.$ Поділимо обидві частини останнього співвідношення на $-C$.
Маємо: $\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1.$ Остаточно: $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$ Тобто $a = -C/A, b = -C/B.$
Приклад. Знайти рівняння прямої $3x - 2y + 12 = 0$ у відрізках.
Згідно розглянутому вище, $a = -4, b = 6,$ тому шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1.$$

5.7. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай задано дві прямі $y = a_1 x + b_1$ і $y = a_2 x + b_2$. Тоді формула

$$tg\varphi = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2}$$

дає кут, на який треба повернути першу пряму, щоб вона стала паралельна другої. Із цього співвідношення одержуємо умову паралельності прямих: $a_1 = a_2$, яка к тому ж геометрично очевидна, і умову перпендикулярності –

$$1 + a_1 a_2 = 0 \ (\text{або } a_1 = -\frac{1}{a_2}).$$

Приклад. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(3, 4)$:

а) паралельно до прямої $2x + y - 7 = 0$;

б) перпендикулярно до прямої $2x + y - 7 = 0$.

Розв'язок. Скористаємось рівнянням (1). Пряма, що проходить через дану точку, має вигляд: $y - 4 = a \cdot (x - 3)$. Таким чином, обидва шуканих рівняння одержимо, підставляючи замість a потрібне значення. Для паралельної прямої $a = -2$, а для перпендикулярної замість a підставимо $\frac{1}{2}$.

Отже, відповіді такі: а) $y - 4 = -2 \cdot (x - 3)$, б) $y - 4 = \frac{1}{2} \cdot (x - 3)$.

5.9. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої

Нормальне рівняння прямої має вигляд $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

p - це довжина перпендикуляра, відпущеного з початку координат на пряму, α - кут між цим перпендикуляром і віссю абсцис. Відстань від точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямої d можна знайти, використавши співвідношення:

$$d = \left| x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p \right|.$$

Для приведення загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального вигляду треба помножити його на, так званий, нормуючий множник: $m = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, причому знак m слід обирати протилежним до знаку C.

Приклад. Знайти відстань від точки $(-1, +1)$ до прямої $3x - 4y + 5 = 0$.

$$d = \left| \frac{3 \cdot (-1) - 4 \cdot (+1) + 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{2}{5}.$$

Зауваження. Легко побачити, що усі рівняння прямої містять x та y лінійно, тобто у першому ступені. Тому інколи пряму називають лінією першого порядку (на відміну, наприклад, від кривих другого порядку – кола, еліпсу, гіперболи, параболи).

ЛЕКЦІЯ 6.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

6.1. Змінна величина. Функція

Змінна величина – це така величина, яка в умовах даного питання може приймати *різні* значення. У протилежність змінній *стала величина* – це така, яка в умовах даного питання зберігає *одне й теж* значення.

Наприклад, температура T кипіння води у більшості фізичних питань є величина стала. Але там, де треба враховувати зміни атмосферного тиску, T є величина змінна.

Визначення. Величина y називається *функцією* змінної величини x, якщо кожному з тих значень, яке може приймати x, відповідає одне або декілька значень y. При цьому змінна величина x називається *аргументом*.

Говорять також, що величина y *залежить* від величини x, тому *аргумент* називають *незалежною змінною*, а функцію – *залежною*.

6.2. Способи завдання функції

Існують різні способи завдання функцій:

А) Табличний спосіб. Наприклад, таблиці логарифмів, квадратових коренів, тощо.

Б) Графічний спосіб полягає у побудові лінії (графіка), де абсциси відображають значення аргументу, а ординати – відповідні значення функції.

В) Аналітичний спосіб полягає у завданні функції однією, або декількома формулами. Наприклад, функціональна залежність між радіусом кола r та його довжиною S задається формулою $S = 2p\, r$.

Головним чином ми будемо мати справу з аналітичним способом завдання функцій. При цьому треба вказати три основні способи їх представлення:

1) $y = f(x)$ - функція задана явно,

2) $F(x, y) = 0$ - функція задана неявно,

3) $\begin{cases} x = j\,(t), \\ y = y\,(t) \end{cases}$ - функція задана параметрично. t - параметр (змінна величина, яка для кожної конкретної функції змінюється на деякому проміжку). При цьому, коли параметр t пробігає усі свої значення, відповідні точки (x, y) описують відповідну криву лінію у прямокутній системі координат. Інколи вдається виключити параметр t, але, взагалі кажучи, ця задача може не мати розв'язку. Математики успішно використовують параметричну форму завдання функції і розробили для неї спеціальні формули для пошуку похідних й інтегралів.

6.3. Область визначення функції

Сукупність усіх значень аргументу x, при яких дана функція має сенс (тобто визначена), називається областю визначення функції.

Наприклад, функція $y=\sqrt{x-1}$ визначена для усіх $x-1\geq 0$, (або $x\geq 1$), функція $y=ax+b$ визначена для усіх $x\in(-\infty,+\infty)$.

6.4. Основні елементарні функції

До основних елементарних відносять наступні функції:

1) *Степенева* функція $y=x^a$, де a – стале постійне число.
2) *Показникова* функція $y=a^x$, де a – додатне число (основа степеню).
3) *Логарифмічна* функція $y=\log_a x$, де a – додатне число (основа логарифму).
4) *Тригонометричні* функції $y=\sin x, y=\cos x, y=tgx, y=ctgx, y=scx, y=\csc x.$
5) *Кругові (обернені тригонометричні функції)* $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=arctgx, y=arcctgx, y=ar\csc x, y=arc\csc x.$

Оскільки усі ці функції детально вивчались у шкільному курсі математики, їх властивості будемо нагадувати, якщо у цьому виникне потреба, а зараз додамо тільки таке зауваження: функції, які можна одержати із елементарних шляхом їх суперпозиції, а також при виконанні чотирьох дій арифметики над ними, також вважаються елементарними. Наприклад, функція $y=\lg\sin\sqrt[3]{1-3\sin x}$ є елементарна.

Функції, яки не можна виразити вказаним чином вважаються неелементарними. Наприклад, функція $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ не є елементарною, тому що її не можна виразити обмеженою кількістю елементарних дій.

Зауваження. На жаль, нам бракує часу, крім того, рівень математичної культури вчорашнього школяра не дуже високий, тому ми не маємо можливості розглянути таки тонкі речи, як алгебраїчні і трансцендентні функції.

6.5. Границя послідовності

Число b називається *границею послідовності* $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots,$ якщо по мірі зростання номера n член y_n необмежено наближається до b. Запис $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$ означає, що при необмеженому зростанні n y_n прямує до b. (А позначення *lim* є абревіатура від латинського *limes* (границя)).

Класичне визначення границі послідовності

Число b називається *границею послідовності* $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots,$ якщо абсолютна величина різниці $y_n - b$, починаючи з деякого номера N залишається менше будь якого малого наперед заданого додатного числа e: $|y_n - b| < e$ при $n \geq N$. (Число N залежить від вибору e.).

Приклад. У послідовності $y_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ (тобто $y_1 = 1, y_2 = 2\frac{1}{2}, y_3 = 1\frac{2}{3}, \ldots$) член y_n по мірі зростання номера n прямує до 2. Тобто 2 є границя послідовності. Дійсно, маємо $|y_n - b| = \frac{1}{n}$, а величина $\frac{1}{n}$, починаючи з деякого номера остається меншою за будь - яке скільки завгодно мале додатне число. До речі, цей приклад показує, що члени послідовності можуть бути як більше, так і менше границі.

6.6. Границя функції

Визначення. Число b називається границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо абсолютне значення різниці $f(x) - b$ остається менше будь - якого скільки завгодно малого наперед заданого додатного числа e кожного разу, коли абсолютне значення різниці $x - a$ стає менш деякого додатного числа d, що залежить від e.

Основні теореми про границі:

1) Границя сталої дорівнює самої сталої.
2) Границя суми двох, трьох і взагалі любого незмінного числа функцій дорівнює сумі границь цих функцій . А коротко – так: *Границя суми дорівнює сумі границь* $\lim(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots \lim u_n$.
3) Границя різниці дорівнює різниці границь (частковий випадок 2): $\lim(u_1 - u_2) = \lim u_1 - \lim u_2$.
4) Границя добутку двох, трьох і взагалі любого незмінного числа функцій дорівнює добуткові границь цих функцій: $\lim(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_n$.
5) Сталий множник можна виносити за знак границі: $\lim c \cdot u = c \cdot \lim u$.
6) Границя дробі дорівнює відношенню границі чисельника до границі знаменника, якщо остання не дорівнює нулю: $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$ $(\lim v \neq 0)$.

6.7. Нескінченно малі і нескінченно великі величини

Змінна величина $a(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} a(x) = 0$.

Наприклад, $1 - \cos x$ є нескінченно мала при $x \to 0$, тому що $\lim\limits_{x \to 0}(1 - \cos x) = 0$.

Із теорем про границі очевидно, що сума (або різниця) нескінченно малих є нескінченно мала, добуток сталої на нескінченно малу є нескінченно мала.

Змінна величина $b(x)$ називається *нескінченно великою* при $x \to b,$ якщо $\lim\limits_{x \to b} b(x) = \infty.$

Наприклад, функція tgx є нескінченно велика при $x \to \dfrac{p}{2}.$

Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими величинами

Нехай y є нескінченно велика величина, тоді $\dfrac{1}{y}$ - нескінченно мала, а якщо z є нескінченно мала, то $\dfrac{1}{z}$ - нескінченно велика. Ці зв'язки дуже часто використовуються при практичному находженні границь функцій.

6.8. Порівняння нескінченно малих величин

Припустимо, що треба знайти границю $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}.$ При цьому відомо, що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0.$ Таку ситуацію у теорії границь називають невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ Виникає вона, як бачимо, коли у чисельнику і у знаменнику дробі маємо нескінченно малі при $x \to a$ величини. Результат залежить від того, як саме функції $f(x), g(x)$ наближаються до нуля. Тобто треба порівняти поведінку двох нескінченно малих. Краще зробити це на конкретних прикладах, але спочатку перелічимо усі можливі випадки:

1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$ У даному випадку нескінченно малі називають еквівалентними (тобто функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$ прямують до нулю однаково).

2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A, A \neq 1$, тобто прямування до нуля у обох функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$ проходить досить подібно, але їх границі відрізняються множником A. (У даному випадку це кінцеве число).

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$ У даному випадку кажуть, що $f(x)$ є нескінченно мала при $x \to a$ вищого порядку малості, ніж $g(x)$. (Це означає, що вона скоріше прямує до нуля, ніж $g(x)$).

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty.$ У даному випадку, навпаки, $g(x)$ є нескінченно мала при $x \to a$ вищого порядку малості, ніж $f(x)$. (Це означає, що вона скоріше прямує

до нуля ніж $f(x)$). Аналогічно можна розглянути порівняння двох нескінченно великих величин. До речі, це корисна вправа для самостійної роботи.

6.9. Неперервна функція

Визначення 1. Функція $y = f(x)$ називається неперервною, якщо її приріст

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Тобто, якщо приріст аргументу скільки завгодно малий, то й приріст самої функції скільки завгодно малий. Інакше: малі зміни аргументу приводять до малих змін самої функції.

Розглянемо простий приклад. Нехай задано функцію $y(x) = x^2$. Легко бачити, що приріст функції $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тому дана функція дійсно є неперервна.

Зауважимо, що далі, коли буде розглянуто диференціальне числення, можна буде для розв’язання подібної проблеми використовувати той факт, що будь - яка диференційована функція необхідно неперервна. Це випливає з того, що диференціювання є більш сильна властивість функції, ніж неперервність. (І до речі, не всяка неперервна функція має похідну!).

При вивченні теорії границь суттєво будемо застосовувати інше визначення.

Визначення 2. Для неперервної функції $f(x)$ має місце співвідношення: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Тобто, якщо маємо неперервну функцію, то її границю можна знайти, просто підставивши замість x у дану функцію граничне значення аргументу і виконавши підрахунки.

Прийнято позначати неперервну функцію так: $f(x) \in C$. (Взявши першу букву слова «*Continuous*», що перекладається з англійської, як «неперервний»).

Далі ми будемо мати справу з неперервними функціями на протязі вивчення усього курсу математичного аналізу.

Альтернативою неперервних є розривні функції. Досить детально ми їх вивчати не будемо, але потрібно знати, що у функцій існують розриви першого і другого роду. Наприклад, відома функція Хевисайда $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$ має кінцевий розрив (першого роду) при $x = 0$. А ось добре відома функція

$y = \dfrac{1}{x}$ (звернено пропорційна залежність, а інакше – гіпербола, що віднесена до асимптот (її асимптоти співпадають з осями координат)) при $x = 0$ має нескінчений розрив (другого роду). Дійсно, якщо наближаємось до нуля по від’ємним значенням, то $y \to -\infty$, а якщо по додатним значенням, то $y \to +\infty$.

Ми будемо використовувати наведену вище інформацію, до речі, при дослідженні функцій. Побачимо, що, наприклад, розриви другого роду «розріжуть» графік функції на декілька гілок.

ЛЕКЦІЯ 7.

НЕВИЗНАЧЕННОСТІ ВИГЛЯДУ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \left(\frac{0}{0}\right), (0\cdot\infty), (\infty-\infty)$

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{3x^2-x+1}$.

Розв’язання почнемо з тестування: підставляємо граничне значення аргументу у дану функцію. Остання є частинний випадок, так званої, дрібно-раціональної функції – відношення двох багаточленів. Очевидно, що тип невизначеності - $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Щоб її розкрити, підготуємо функцію до граничного переходу, визначивши, по-перше, найвищу степінь багаточленів (у нашому випадку – це друга) і поділивши на x^2 усі члени чисельника й знаменника одночасно. Отже, маємо:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{3x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$. Результат одержано при використанні теорем про границі дробі, суми, сталої, а також зв’язок між нескінченно великими і нескінченно малими (а саме: при $x\to\infty$ $\frac{3}{x},\frac{5}{x^2},\frac{1}{x},\frac{1}{x^2}$ є нескінченно малі, тобто їх границі дорівнюють нулю).

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}+2x}{3x+1}$.Маємо знов невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Старша степінь x у чисельнику і знаменнику дробі дорівнює одиниці. До речі, при наявності коренів, треба під знаком кореня взяти тільки той член, що містить x у найвищій степені й прикинути, у якому степені він стане, якщо корінь із нього витягнути. У нашому прикладі одержуємо x у першому степені. Наявність кореня не заважатиме використанню того ж прийому, що був запроваджений у *Прикладі 1.* Отже, одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}+2x}{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+2}{3+\frac{1}{x}}=1.$$ (Використано, що $x=\sqrt{x^2}$).

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$. Тип невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$. Тобто граничне значення x є коренем як чисельника, так й знаменника. Потрібно використовувати підхід, що суттєво відрізняється від розглянутого вище. Перетворимо вигляд функції, що знаходиться під знаком границі. Для цього розкладемо квадратні тричлени, що стоять у чисельнику і знаменнику на добутки лінійних множників. При цьому, очевидно, там будуть присутні однакові множники, а саме - $(x-1)$. Доки ми не перейдемо до границі, прямуючи x до одиниці, цей множник не прямує до нуля. Ділимо одночасно на нього чисельник і знаменник, а вже потім переходимо до границі. А саме:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-4}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$. Маємо невизначеність $(\infty-\infty)$. Бажано змінити її, виконавши еквівалентні перетворення функції, що міститься під знаком границі. Природно привести її до спільного знаменника. Як правило, при цьому пошук границі спрощується. Отже, одержимо:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Таким чином, елементарні перетворення дозволили змінити тип невизначеності на $\left(\frac{0}{0}\right)$, а подальші дії треба виконувати за схемою, що розглядалась у *Прикладі 3*: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{(1-x)\cdot(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$

Приклад 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. Наявність кореня заважає використанню розглянутої вище схеми, що слід застосовувати при невизначеності типу $\left(\frac{0}{0}\right)$, яка має місце і у даному прикладі. Пропонується впровадження еквівалентного перетворення даної функції, що полягає у одночасному множенні чисельника і знаменника даної дробі на, так званий, спряжений вираз (у даному випадку – на $\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)$). Після використання формул скороченого множення ми фактично попадемо в умови, які розглядались у *Прикладі 3*. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}{x\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0.$$

Зауважимо, що при наявності кореню третього степеню можна використати ще одну формулу скороченого множення із курсу шкільної математики, помноживши чисельник і знаменник на неповний квадрат суми (або різниці).

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$. Ми вже вдруге одержуємо дуже «неприємну» невизначеність типу $(\infty-\infty)$. Але на відміну від ситуації, що була у *Прикладі 4*, дана функція не містить дробів, тому треба шукати інші шляхи для зміни типу невизначеності. Використаймо прийом, застосований у *Прикладі 5:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0.$$

Зауважимо, що таки ж самі прийоми треба використовувати, якщо замість x у прикладах буде n - аргумент, що приймає цілі значення. І ще: треба уважно проробити цю тему: вона має дуже широке застосування у різних розділах курсу вищої математики.

ЛЕКЦІЯ 8.

ВАЖЛИВІ ГРАНИЦІ

8.1. Перша важлива границя

Якщо x є радіанна міра кута, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$Це співвідношення і є *перша важлива границя*. При прямуванні x до нуля $\sin x\to 0, x\to 0,$ тобто маємо, що границя відношення цих двох нескінченно малих величин дорівнює одиниці. Із цього випливає, до речі, що функції $\sin x$ і x поводять себе однаково при $x\to 0.$ Відомо, що цей факт використовували астрономи: для дуже малих кутів x їх значення приблизно дорівнюють самим синусам .

Очевидно, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tgx}=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1.$

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Розв'язання усіх прикладів на розшук границь традиційно починається з тестування функції, розташованої під знаком границі. Для цього треба підставити граничне значення аргументу у дану функцію і подивитись, що при цьому одержуємо. У нашому випадку маємо невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.Використаємо формулу $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}.$ Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

Вище виконані елементарні еквівалентні перетворення. Також користуємось теоремою про границю добутку і очевидним узагальненням першої важливої границі: $\lim\limits_{j(x)\to 0}\dfrac{\sin(j(x))}{j(x)}=1.$

Приклад 2. $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\cdot tg\dfrac{p z}{2}$.У даному прикладі ми вперше одержуємо «екзотичну» невизначеність типу $(0\cdot\infty)$. При розв'язанні прикладів цей тип

невизначеності легко привести або к типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, або – к $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Детальніше це буде викладено при вивченні правила Лопіталя. Що до даного прикладу, то спочатку перепишемо його у вигляді: $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\cdot tg\dfrac{p z}{2}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{(1-z)\cdot\sin\frac{p z}{2}}{\cos\frac{p z}{2}}.$

Тестування показує, що тип невизначеності змінився на $\left(\frac{0}{0}\right)$. Далі буде потрібна формула приведення: $\cos\frac{p\,z}{2}=\sin\left(\frac{p}{2}-\frac{p\,z}{2}\right)=\sin\frac{p\,(1-z)}{2}$.

Таким чином, залишається скористатись цим результатом і помножити одночасно чисельник і знаменник на $\frac{p}{2}$. Отже, маємо: $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\frac{p}{2}(1-z)\cdot\sin\frac{p\,z}{2}}{\frac{p}{2}\cdot\sin\frac{p\,(1-z)}{2}}=\frac{2}{p}$.

Як бачимо, знання шкільної тригонометрії суттєво використовується при вивченні і першої важливої границі. Тобто, зайвих знань не буває!

8.2. Друга важлива границя

Другою важливою границею називають $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. Число e - це основа натурального логарифма. Тип невизначеності $\left(1^{\infty}\right)$ можна вважати «візитною карткою» другої важливої границі.

Якщо зробити заміну: $z=\frac{1}{x}$, то одержимо цю границю у новому вигляді: $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$. Характер поведінки функції, що находиться під знаком границі – однаковий: у дужках до одиниці додається нескінченно мала при відповідному прямуванні змінної величина і при цьому ця сума має нескінченно великий показник степені.

За допомогою цих формул можна розв’язувати велику кількість задач. Звернемось до прикладів.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$. Хоча тип невизначеності – такий, як у стандартній формулі, але наявність деяких відмінностей не дозволяє миттєво нею скористатись. Тому перетворимо еквівалентним чином вигляд даної функції так, щоб було можливо розглянути саме другу важливу границю!

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{mx}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right\}^{m\cdot k}=e^{mk}.$$

Спочатку число k відправлено у знаменник знаменника, потім у показнику степені одночасно помножено і поділено на те ж число. Після виконання цих еквівалентних операцій у фігурних дужках одержано шуканий вигляд функції. Отже, маємо результат, використовуючи другу важливу границю.

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$. Легко бачити, що тип невизначеності (1^{∞}). Але ситуація виглядає декілька складніше, ніж у попередньому прикладі. Перетворимо еквівалентним шляхом вигляд даної функції. Наша мета полягає у тому, щоб після перетворень можна було б побачити саме другу важливу границю. Спочатку зробимо виділення цілої частини з дробу $\dfrac{x+1}{x-2}$. Для цього існують три способи:

1) $\dfrac{x+1}{x-2}=1+\left(\dfrac{x+1}{x-2}-1\right)=1+\dfrac{3}{x-2}=1+\dfrac{1}{\frac{x-2}{3}}$. До речі, у знаменнику останньої дробі міститься підказка: саме такий вираз треба бути виділити, перетворюючи далі показник степеню.

2) $\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+3}{x-2}=1+\dfrac{3}{x-2}$.

3) Нарешті, можна поділити чисельник дробі $\dfrac{x+1}{x-2}$ на знаменник (саме так виділяють цілу частину неправильної дробі). Ціла частина у нас – одиниця, а решток від ділення – чисельник дрібної частини.

Виконаємо перетворення показника:

$$2x-1=2(x-2+2)-1=2(x-2)+3=6\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)+3.$$

Тепер нашу границю одержати неважко:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{6\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)+3}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right\}^{6}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{3}=e^{6}.$$

Звернемо увагу на те, що вираз у фігурних дужках співпадає за своїм виглядом та поведінкою саме з другою важливою границею.

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{2}{x^2-1}}$. Маємо невизначеність (1^{∞}). Оскільки виправдовує себе прийом, що базується на еквівалентних попередніх перетвореннях, використаємо його знов. Отже, $5x-4=1+(5x-4-1)=1+5(x-1)$. $5(x-1)$ і є та сама нескінченно мала при $x\to 1$.

$$\lim_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{2}{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}\bigl(1+5(x-1)\bigr)^{\frac{2x}{(x-1)(x+1)}}=\lim_{x\to 1}\left\{\bigl(1+5(x-1)\bigr)^{\frac{1}{5(x-1)}}\right\}^{\frac{2x}{x+1}\cdot 5}=e^{10}.$$

Бувають ситуації, коли на перший погляд не має підстав у використанні другої важливої границі, але після декількох кроків стає очевидною її необхідність. Звернемось до прикладу.

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$. Маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Ось як проходить пошук результату: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+kx)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\ln(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right\}^{k}=e^{k}$.

ЛЕКЦІЯ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

9.1. Вступ

Джерелом диференціального числення були два питання:

1) про розшук дотичної до довільної лінії;
2) про розшук швидкості при довільному закону руху.

Обидва ці питання привели до однієї обчислювальної задачі, яка і лягла в основу диференціального числення. Ця задача полягає у тому, щоб по даній функції $f(t)$ знайти іншу функцію $f'(t)$, що одержала пізніше назву *похідна*, яка б представляла швидкість зміни функції $f(t)$відносно до зміни аргументу. (Точне визначення похідної буде дане пізніше).

У такому загальному вигляді задача була поставлена Ньютоном, а потім Лейбніцем у 70-80 роках 17 століття. Але ще у продовж півстоліття до того Ферма, Паскаль та інші вчені дали правила розшуку похідних для багатьох функцій.

Ньютон і Лейбніц завершили це дослідження: вони ввели загальні поняття похідної і диференціала, а також позначення, які дуже полегшують обчислення, розвинули апарат диференціального числення до максимальних границь та використали диференціальне числення до розв'язання багатьох задач геометрії і механіки. Подальший розвиток їх ідеї одержали тільки у XIX столітті.

9.2. Похідна. Механічний та геометричний сенс похідної

Нехай $y=f(x)$ є неперервна функція аргументу x, визначена на проміжку (a,b) і нехай x - якась точка з цього проміжку. Дамо аргументу x приріст Δx(додатний або від'ємний). Функція $y=f(x)$ одержить приріст$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

При нескінченно малому Δx приріст Δyє також нескінченно малий. Границя, до якої прямує відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ сама є функцією від аргументу x. Ця функція називається *похідною* від функції $f(x)$ і позначається $f'(x)$ або y'. Таким чином, ***похідною функції називається границя (якщо вона існує), до якої прямує відношення приросту функції до відповідного нескінченно малого приросту аргументу.***

Похідні деяких простіших функцій

1. Похідна сталої дорівнює нулю: $(a)' = 0.$

Фізичний сенс: швидкість нерухомої точки дорівнює нулю.

Геометричний сенс: кутовий коефіцієнт прямої $y = a$ дорівнює нулю.

2. Похідна незалежної змінної дорівнює 1: $(x)' = 1.$

Геометричний сенс: кутовий коефіцієнт прямої $y = x$ дорівнює одиниці.

Фізичний сенс: якщо шлях, пройдений тілом, чисельно дорівнює часу знаходження у русі, то швидкість чисельно дорівнює одиниці.

Розглянемо деякі приклади, у яких шукати похідну будемо саме за означенням.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^2$. Маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \sin x$ (аргумент функції виражається у радіанній мірі). Приріст функції дорівнює:

$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$. Таким чином,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

9.3. Властивості похідної

1. Сталий множник можна виносити за знак похідної: $\left[af(x)\right]' = af'(x).$
2. Похідна від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх похідних.
3. Похідна добутку знаходиться за формулою: $(u \cdot v)' = u'v + uv',$ де $u = u(x), v = v(x) -$ це функції аргументу x.
4. Похідна дробі знаходиться за формулою: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$
5. Похідна складної функції $f(j(x))$ дорівнює похідній функції по допоміжному аргументу j , помноженій на похідну від цього аргументу по x: $\{f(j(x))\}' = \frac{df}{dj} \cdot \frac{dj}{dx}.$

Приклад. Знайти похідну від функції $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Маємо складну функцію, яку можна представити у вигляді ланцюжка з елементарних функції: $y = j^{\frac{1}{2}},\ j = a^2 - x^2$. Відповідно правилу, одержимо:

$$y' = \frac{1}{2} j^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Привило природно поширюється на випадок суперпозиції будь - якої кінцевої кількості елементарних функцій.

9.4. Таблиця похідних основних елементарних функцій

Наведемо таблицю похідних основних елементарних функцій:

1. $\left(x^a\right)' = a \cdot x^{a-1}$, де a може приймати будь яки значення;
2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $\left(e^x\right)' = e^x$, де $a > 0,\ e \approx 2{,}71828$ – основа натурального логарифма;
3. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$ ($a > 0$);
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;
6. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
7. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
9. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
10. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;
11. $(arcctgx)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.

Як було відмічено вище, похідна використовується при розв’язанні багатьох задач. Розглянемо задачу о дотичній. Оскільки дотична до кривої $y = f(x)$ - це пряма, що проходить через точку дотику $M(a, b)$, то її рівняння має вигляд $y - b = k(x - a)$, де кутовий коефіцієнт виражається через похідну від $f(x)$, зафіксовану у точці дотику (відповідно з геометричним сенсом похідної). Тобто *рівняння дотичної* має вигляд: $y - b = f'(a) \cdot (x - a)$. Легко одержати й *рівняння нормалі* (прямої, що проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної). Використовуючи умову перпендикулярності, маємо: $$y - b = \frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a).$$

Зрозуміло, що успішне використання похідної для розв'язання задач, не можливе без оволодіння технікою диференціювання. Розглянемо це питання.

Перш ніж приступати до практичного знаходження похідних, треба мати на увазі, що для різних способів аналітичного завдання функцій існують свої конкретні методи. А саме: ці методи розроблені для функцій, заданих явно, неявно і у параметричному вигляді. Почнемо з функцій, заданих явно, тобто у вигляді $y = f(x)$. Здається корисною таблиця, яку можна одержати із наведеної вище, якщо замінити в ній x на довільну функцію $j(x)$ і застосувати правило диференціювання складної функції. Приведемо цю таблицю і на деяких прикладах переконаємось у перевагах, які вона дає. До речі, пошук похідної – це майже найпростіша з задач у курсі математичного аналізу, тому що це задача для сумлінного виконавця.

9.5. Таблиця похідних для складних функцій

Використавши правило диференціювання складної функції, одержимо таблицю похідних для складних функцій:

1. $\left((j(x))^a\right)' = a \cdot ((j(x))^{a-1} j'$, де a може приймати будь - які значення;
2. $\left(a^{j(x)}\right)' = a^{j(x)} \ln a \cdot j'$, $\left(e^{j(x)}\right)' = e^{j(x)} j'$, де $a > 0, e -$ основа натурального логарифма;
3. $\left(\log_a j(x)\right)' = \frac{1}{j(x) \ln a} \cdot j'$, $\left(\ln j(x)\right)' = \frac{1}{j(x)} \cdot j'$ $(a > 0)$;
4. $(\sin j(x))' = \cos j(x) \cdot j'$;
5. $(\cos j(x))' = -\sin j(x) \cdot j'$;
6. $(tg\, j(x))' = \frac{1}{\cos^2 j(x)} \cdot j'$;
7. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
8. $(\arcsin j(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(j(x))^2}} \cdot j'$;
9. $(\arccos j(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-(j(x))^2}} \cdot j'$;
10. $(arctg\, j(x)' = \frac{1}{1+(j(x))^2} \cdot j'$;
11. $(arcctg\, j(x)' = \frac{-1}{1+(j(x))^2} \cdot j'$.

Приклад1. Знайти похідну функції $y=\sqrt[3]{tg^2 x}=(tgx)^{\frac{2}{3}}$.
Очевидно для знаходження похідної треба використати формулу 1. останньої таблиці. Дійсно, у нашому випадку $j(x)=tgx,\ a=\dfrac{2}{3}$. Таким чином,

$$y'=\frac{2}{3}(tgx)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y=\dfrac{\sin(2^x\cdot\ln x)}{x^2+1}$. У чисельнику дробі – складна функція, при диференціюванні якої потрібне використання формули 4. Крім того, аргументом у синуса є добуток двох функцій. Отже, нам ще потрібні правила диференціювання добутку і дробі. Таким чином, одержимо

$$y'=\left(\frac{\sin(2^x\cdot\ln x)}{x^2+1}\right)'=\frac{\cos(2^x\cdot\ln x)\cdot(2^x\ln 2\cdot\ln x+2^x\cdot(1/x))\cdot(x^2+1)-2x\sin(2^x\cdot\ln x)}{(x^2+1)^2}.$$

Для диференціювання майже усіх функцій, заданих явно, як правило, достатньо грамотно використовувати таблицю похідних і відповідні правила їх знаходження. Виключенням є, так звані, складні показниково-степеневі функції вигляду $y=(u(x))^{v(x)}$, для яких існує спеціальне правило, яке ми зараз розглянемо.

9.6. Правило логарифмічного диференціювання

Для диференціювання функцій вигляду $y=(u(x))^{v(x)}$ недостатньо тільки приведених вище правил і таблиці. Але ситуація має розв'язок. При цьому можна йти двома шляхами. Перший полягає у використанні основної логарифмічної тотожності $N\equiv e^{\ln N}$ (ми будемо використовувати цей частинний випадок від $N\equiv a^{\log_a x}$). Представимо дану функцію у вигляді $y=(u(x))^{v(x)}=u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\cdot\ln u}$. При цьому одержана складна функція, яку ми зможемо диференціювати на підставі саме правил і таблиці: $y'=\left(e^{v\cdot\ln u}\right)'=e^{v\cdot\ln u}\cdot\left(v'\ln u+v\cdot\dfrac{u'}{u}\right)$.

Другий шлях полягає у тому, що шукану похідну одержимо, диференціюючи не саму функцію, а її логарифм. Розглянемо це детальніше.
$\ln(y(x))=\ln(u(x))^{v(x)}=v(x)\cdot\ln u(x)$. Подальше для спрощення опустимо x. Беремо далі похідну по x від обох частин, тобто $(\ln y)'=(v\cdot\ln u)'$. Приймаючи до уваді, що складні функції x маємо в обох частинах останньої рівності, одержимо:
$\dfrac{y'}{y}=v'\ln u+v\cdot\dfrac{u'}{u}.$
Залишається одностайно помножити обидві частини на $y=u^v$ і шукана похідна знайдена: $y'=u^v\left(v'\ln u+v\cdot\dfrac{u'}{u}\right)$.
Звернемось до прикладів.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y=(\sin x)^{\cos x}$. У відповідності із методом логарифмічного диференціювання, одержимо

$$y'=((\sin x)^{\cos x})'=(e^{\ln(\sin x)^{\cos x}})'=(e^{\cos x\cdot\ln\sin x})'=e^{\cos x\cdot\ln\sin x}\left(-\sin x\cdot\ln\sin x+\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$=(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\cdot\ln\sin x\right).$$

Можна знайти розв'язок, інакше, за використанням логарифму даної функції. $\ln y=\ln(\sin x)^{\cos x}=\cos x\cdot\ln\sin x;\quad \frac{y'}{y}=-\sin x\cdot\ln\sin x+\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$. Помноживши обидві частини останньої рівності на $y=(\sin x)^{\cos x}$, одержимо шуканий розв'язок.

Корисно відмітити, що інколи використання цього правила буває ефективним не тільки для розглянутих вище функцій, а також, у випадках коли дана функція являє собою громіздке співвідношення, що представляє добуток великої кількості множників (або дріб, чисельник та знаменник якої має саме таку структуру). Розглянемо функцію $y=\sqrt{x\cdot\sin^3 x\cdot\sqrt[4]{x}\cdot e^{5x}}$. Можна, безумовно, шукати похідну цієї функції, не звертаючись до правила логарифмічного диференціювання, але його використання допоможе суттєво спростити викладки і зберегти час. Найдемо натуральний логарифм даної функції (вибір саме натурального логарифма не є випадковим: буде використано більш простий вигляд формули для відповідної похідної).

$\ln y=\ln(\sqrt{x\cdot\sin^3 x\cdot\sqrt[4]{x}\cdot e^{5x}})=\frac{5}{8}\ln x+\frac{3}{2}\ln\sin x+\frac{5}{2}.$ Диференціюючи і одночасно помножуючи обидві частини одержаної похідної на $y=\sqrt{x\cdot\sin^3 x\cdot\sqrt[4]{x}\cdot e^{5x}}$, маємо:

$$y'=\sqrt{x\cdot\sin^3 x\cdot\sqrt[4]{x}\cdot e^{5x}}\cdot\left(\frac{5}{8x}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\sqrt{x\cdot\sin^3 x\cdot\sqrt[4]{x}\cdot e^{5x}}\cdot\left(\frac{5}{8x}+\frac{3}{2}tgx\right).$$

ЛЕКЦІЯ 10.
ДИФЕРЕНЦІАЛ

Визначення. Нехай приріст функції $y=f(x)$ розбито на суму двох членів $\Delta y=A\cdot\Delta x+a$, де A не залежить від Δx і a має вищий порядок відносно Δx (при $\Delta x\to 0$).

Тоді перший (головний) член, пропорційний Δx, називається *диференціалом* функції $f(x)$ і позначається dy або $df(x)$ (читається «де ігрек», «де еф от ікс»).

Приклад. Розглянемо функцію $y=x^2$. Тоді $\Delta y=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$. Диференціал функції дорівнює $dy=2x\cdot\Delta x.$ Коефіцієнт при Δx дорівнює похідної даної функції. Має місце *теорема:*

Диференціал функції дорівнює добутку похідної на приріст аргументу $dy=y'\Delta x$**, або** $dy=f'(x)\Delta x$**.**

10.1. Механічна та геометрична інтерпретація диференціала

Нехай $s = f(t)$ - відстань, що проходить точка при прямолінійному русі від початкового положення (t - час знаходження у путі). Якщо швидкість у момент t не дорівнює нулю, то ds дає наближену величину малого зміщення точки.

Геометрична інтерпретація (див. рисунок 10.1) диференціалу функції $y = f(x)$ - це приріст ординати дотичної. Результат легко одержати, розглянувши прямокутний трикутник (одна з вершин якого знаходиться у точці дотику) з катетами, паралельними осям координат (один з них дорівнює Δx і паралельний вісі абсцис), гіпотенуза – це відрізок дотичної до кривої, для якої тангенс кута нахилу до вісі абсцис дорівнює $f'(x)$, а другий катет дорівнює $df = f'(x) \cdot \Delta x$.

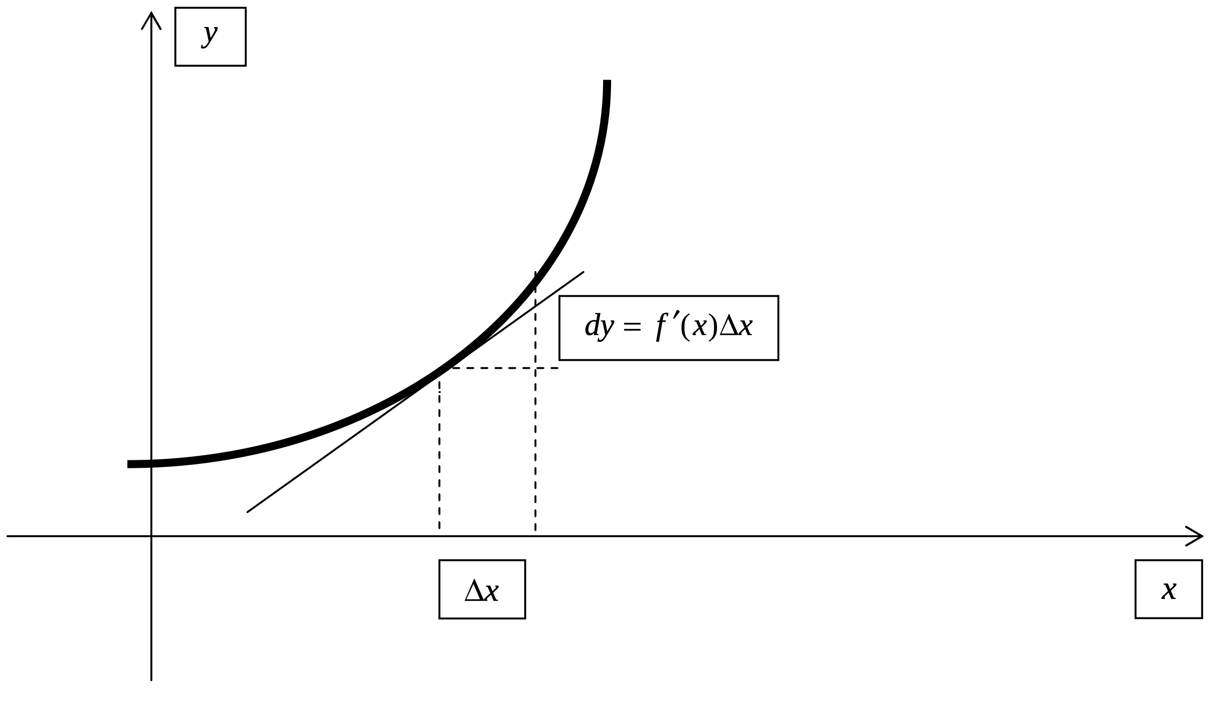

Рис. 10.1

10.2. Диференційовані функції

Неперервна функція, що має (у даній точці) диференціал, називається *диференційованій* (у цій точці).

Розривна функція не може мати у точці розриву а ні похідної, а ні диференціалу (графік не має дотичної).

Функція, неперервна у даній точці, може не мати диференціалу у цій точці. За браком часу обмежимось тільки констатацією цього факту. Що до альтернативної ситуації, то підкреслимо, що всяка диференційована функція є необхідно неперервна.

10.3. Диференціали деяких простіших функцій

1. Диференціал сталої дорівнює нулю: $da = 0$.
2. Диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту: $dx = \Delta x$.
3. Взагалі диференціал лінійної функції дорівнює її приросту: $d(ax+b) = \Delta(ax+b) = a\Delta x$.

Для інших функцій диференціал і приріст не рівні одне одному.(Вони відрізняються на величину, вищого порядку меншості відносно Δx).

10.4. Властивості диференціала

1. Постійний множник можна виносити за знак диференціала: $d[af(x)] = a \cdot d[f(x)]$.
2. Диференціал алгебраїчної суми незмінної кількості функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх диференціалів: $d[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] = d[f_1(x)] + d[f_2(x)] - d[f_3(x)]$.
3. Диференціал функції дорівнює добутку похідної на диференціал аргументу: $df(x) = f'(x) \cdot dx$.
4. Похідна від функції y по аргументу x дорівнює відношенню диференціала змінної y до диференціалу змінної x: $y' = \dfrac{dy}{dx}$.
5. Диференціал добутку: $d(u \cdot v) = udv + vdu$.
6. Диференціал дробі: $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

10.5. Обернена функція. Похідна оберненої функції

Якщо із співвідношення $y = f(x)$ випливає співвідношення $x = j(y)$, то функція $j(y)$ називається *оберненою* (відносно функції $f(x)$).

Деякі з взаємно обернених функцій добре знайомі з шкільного курсу математики. Наприклад, для показникової функції $y = e^x$ оберненою є логарифмічна $y = \ln x$, причому для останньої виконано перепозначення: для аргументу традиційне x, а для функції - y. (Корисно нагадати, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів).

Похідна оберненої функції дорівнює одиниці, поділеної на похідну даної функції, тобто $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Важливість цього результату дуже велика: по-перше, не треба будувати обернену функцію (а ця задача, взагалі кажучи, не завжди має розв'язок), якщо нам потрібна тільки її похідна, по-друге, при виведенні формул таблиці похідних саме ця формула багатократно використовувалась, має вона і інші застосування.

10.6. Застосування диференціала

Користуючись зв'язком між похідною і диференціалом, можна записати таблицю диференціалів, яку, до речі, суттєво застосовують при побудові таблиці інтегралів.

1. $d(x^a) = a \cdot x^{a-1}dx,$ де a може приймати будь - які значення;
2. $d(a^x) = a^x \ln a dx,\quad d(e^x) = e^x dx,$ де $a > 0,\, e \approx 2{,}71828 -$ основа натурального логарифма;
3. $d(\log_a x) = \dfrac{1}{x\ln a}dx,\ d(\ln x)' = \dfrac{1}{x}dx \quad (a > 0);$
4. $d(\sin x) = \cos x dx;$
5. $d(\cos x) = -\sin x dx,$
6. $d(tgx) = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx;$
7. $d(ctgx) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx,$
8. $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$
9. $d(\arccos x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$
10. $d(arctgx) = \dfrac{1}{1+x^2}dx,$
11. $d(arcctgx) = \dfrac{-1}{1+x^2}dx.$

А зараз розглянемо застосування диференціала до наближених обчислень. Часто виникає ситуація, коли досить легко обчислити значення функції і її похідної при $x = a$, при значеннях x, близьких до a ,безпосереднє обчислення функції зробити важко. Тоді користуються наближеною формулою $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\cdot h.$ Вона виражає, що приріст функції $f(x)$ при малих h приблизно дорівнює її диференціалу: $f(a+h) - f(a) \approx f'(a)\cdot h.$

Приклад. Знайти без таблиць $tg46°$.

Розв'язок. Нехай $f(x) = tgx,\ a = 45°,\ h = 1° = 0{,}0175$ радіану, тоді маємо $f'(a) = \dfrac{1}{\cos^2 45°} = 2.$ Таким чином, $tg46° \approx 1 + 2\cdot 0{,}0175 = 1{,}0350.$ Якщо подивитись у таблицю, розходження з нею – тільки у останньому знаки після зап'ятої: $tg46° = 1{,}0355.$

10.7. Диференціювання неявних функцій

Для знаходження похідної неявної функції не треба перетворювати її на явну (цю операцію, взагалі кажучи, вдається реалізувати не завжди!). Правило досить просте:

Знаходимо диференціал даної функції і із одержаного співвідношення виражаємо $\frac{dy}{dx}$.

Розглянемо приклад. Нехай $x^2 + xy^3 - \sin y = 0$ - дана неявна функція. Її диференціалом є: $2xdx + y^3dx + x \cdot 3y^2dy - \cos y \cdot dy = 0$. Звідси $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y^3}{\cos y - 3y^2}$.

Можливо також використання декілька іншого шляху: *співвідношення, яке задає неявну функцію, диференціюємо по* x*, маючи на увазі, що* y *є залежна від* x *функція* (і треба використовувати правило диференціювання складної функції, якщо маємо справу з y або тією частиною неявної функції, що задається через y). Таким чином, похідна дорівнює: $2x + y^3 + x \cdot 3y^2 y' - \cos y \cdot y' = 0$. Одержане співвідношення завжди лінійно містить y'. Тобто залишається розв'язати його відносно похідної. Отже $y' = \frac{2x + y^3}{\cos y - 3y^2}$.

10.9. Функції, задані параметрично

Нарешті розглянемо функції вигляду $\begin{cases} x = j\,(t), \\ y = y\,(t). \end{cases}$ Її похідна дорівнює

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{j\,'(t)}{y\,'(t)}.$$

Приклад. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$ Коли параметр t пробігає значення від $t = 0$ до $t = 2p$, точка з координатами (x, y) описує коло. (До речі, виключаючи параметр t, легко одержимо знайоме рівняння кола. Для цього треба возвести у квадрат обидва дані рівняння і одержані вирази додати: $x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2$. Але, взагалі кажучи, виключення параметру не завжди можливо). По формулі маємо: $\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctgt.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1975. - 272 с.
2. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии – М.: Наука, 1963. - 272 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1. – М.:Наука, 1983. - 429 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. – М.: Наука, 2002. - 416 с.
5. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1.– М.: Высшая школа, 1986. - 386 с.
6. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М.: Высшая школа, 2000. - 416 с.

Навчальне видання

Заборова Тамара Михайлівна

Вища математика за фаховим спрямуванням
Частина 1

Конспект лекцій

Тем. план. *2008,* ***поз.*** *272*

Підписано до друку17.07.08. Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 2, 52 Умов. друк. арк. 2, 5 Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ