МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

В. В. Кузьменко, Г. Г. Швачич, Г. І. Рижанкова, В. М. Пасинков

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

РОЗДІЛ " ЕЛЕМЕНТИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ "

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як конспект лекцій

Дніпропетровськ НМетАУ 2004

УДК 510.6

Кузьменко В. В., Швачич Г. Г, Рижанкова Г. І., Пасинков В. М. Основи дискретної математики. Розділ "Елементи алгебри логіки": Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2004. – 41с.

Викладені основні поняття алгебри логіки, яка розвивалася в XIX – XX сторіччях в трудах Б. Рассела, А. Уайтхеда, Я. Лукасевича, Д. Гільберта, Г. Фреге та ін., в контексті сучасних концепцій дискретної математики та основ програмування.

Призначений для студентів спеціальності 7.080401 – інформаційні управляючі системи та технології.

Іл. 25. Бібліогр.: 17 найм.

Відповідальний за випуск Г. Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенти: Б. І. Мороз., д-р техн. наук, проф. (Академія митної Служби України)

Д. Г. Зеленцов., канд. техн. наук, доц. (УДХТУ)

Тема 1 Комбінаторні конфігурації та методи їх счислення

У багатьох задачах виникає необхідність підрахунку кількісні можливих комбінацій з`єднань об'єктів множин, які задовольняють визначеним умовам. Такі задачі називаються комбінаторними. Їх розмаїтість не підлягає вичерпуючому опису, але є цілий ряд задач, котрі зустрічаються найбільш часто. З`єднаннями в комбінаторному аналізі називають групи (підмножини деяких множин), які складаються з будь-яких елементів (цифр, букв, геометричних фігур, і т.д.). В алгебрі логіки розглядаються три види з`єднань: розміщення, перестановки, сполучення.

Розміщення

Дана деяка множина: $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n}$., яка складена з **n** елементів. Розміщеннями з **n** елементів по **k** називаються з'єднання, до кожного з яких входять **k** елементів, взятих із **n** даних елементів. Розміщення (підмножини даної множини), відрізняються між собою хоча б одним елементом або порядком елементів в підмножині, при умові, що $\mathbf{k \leq n}$.

Наприклад, із трьох елементів множини **a, b, c**, можна утворити:

1. три розміщення по одному елементу: **a**, **b**, **c**;
2. шість розміщень по два елемента: **a, b**; **b,a**; **b, c**; **c, b**; **a, c**; **c, a**;
3. шість розміщень по три елементи: **a, b, c**; **b, a, c**; **c, a, b**; **a, c, b**; **b, c, a**; **c, b, a**.

Число розміщень із **n** елементів по **k** позначається символом A_n^k

Теорема: Число можливих розміщень із **n** елементів по **k** є послідовність. чисел натурального ряду, найбільшим із який є **n**.

$$A_n^k = n\ (n - 1)*(n - 2)\ \ldots[n - (k - 1)].$$

$$A_8^5 = 8 * 7 * 6 * 5 * 4 = 6720;$$

$$A_{19}^2 = 19 * 18 = 342;$$

$$A_{m+3}^{m-1} = (n + 3)(n + 2) \dots [n + 3 - (n - 1 - 1)] = (n + 3)(n + 2) \dots 6 * 5.$$

Перестановки

Перестановками з **n** елементів називають з'єднання кожне із яких містить **n** елементів. Такі з'єднання відрізняються між собою лише порядком елементів.

Наприклад:

1. з одного елемента: **a** можна утворити лише одну перестановку **a;**
2. з двох елементів: **a, b**. можна утворити дві перестановки **a, b**; **b, a**;
3. з трьох елементів: **a, b, c** можна утворити шість перестановок **a, b, c**; **b, a, c**; **c, a, b**; **b, c, a**; **a, c, b**; **c, b, a**.

Число всіх перестановок позначається символом P_n.

Теорема. Число всіх перестановок із **n** елементів дорівнює добутку послідовних натуральних чисел від **1** до **n** включно.

$$P_n = 1 * 2 * 3 * \dots (n - 1) * n.$$

Добуток n натуральних чисел від 1 до **n** скорочено позначається **n!**

$$P_n = 1 * 2 * 3 * \dots (n - 1) * n. = n!;$$

$$P_n = n!.$$

Наприклад:

$$P_5 = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 5! = 120;$$

$$P_{10} = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 3628800.$$

Користуючись поняттям факторіал формулу числа розміщень можна записати так:

$$A_n^k = n*(n-1)*(n-2) \dots [n-(k-1)] =$$

$$= \frac{n*(n-1)*(n-2) \dots [n-(k-1)]*(n-k)*(n-k-1) \dots 3*2*1}{(n-k)*(n-k-1) \dots 3*2*1} =$$

$$= \frac{P_n}{p_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{p_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сполучення

Сполученнями з **n** елементів по **k** є з'єднання, до кожного з яких входять **k** елементів, узятих з даних **n** елементів. Сполучення елементів (підмножини однієї множини) відрізняються хоча б одним елементом ($k \le n$).

Наприклад:

1. з одного елемента **a** можна утворити тільки одне сполучення **a**;
2. з двох елементів **a** і **b** можна утворити два сполучення по одному елементу: **a**, **b**, і одне сполучення по два елемента **a**, **b**.
3. З трьох елементів **a**, **b**, **c**. можна утворити:

a) три сполучення по одному елементу **a**, **b**, **c**;
b) три сполучення по двох елемента **a**, **b**; **a**, **c**; **b**, **c**;
c) одне сполучення по трьох елемента **a**, **b**, **c**.

Число різноманітних сполучень із n елементів по k позначається символом $C_m^л$.

Теорема. Число сполучень із **n** елементів по **k** дорівнює частці від добутку **k** послідовних чисел натурального ряду, найбільше з яких дорівнює **n**, на добуток послідовних натуральних чисел від одиниці до **k** включно.

$$C_n^k = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\mathbf{K}\,[n-(k-1)]}{1*2*3\,\mathbf{K}\,k};$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k};$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$C_{10}^3 = \frac{10*9*8}{1*2*3};$$

$$C_5^4 = \frac{5*4*3*2}{1*2*3*4} = 5.$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

$$C_{20}^{18} = C_{20}^{20-18} = C_{20}^2 = \frac{20*19}{1*2} = 190.$$

Таким чином має місце тотожність $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Підстановки

Функція f: X $\rightarrow$ X називається підстановкою на X.

Приклад:

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \qquad g = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Добутком підстановок f і g є їх суперпозиція f $\circ$ g.

Приклад: $f\,g = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$

Тотожна підстановка – це така підстановка e, коли e (x) = x.

Приклад: $e = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

Обернена підстановка – це обернена функція, яка завжди існує, оскільки підстановка є бієктивною.

Приклад: $f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad f^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

Множина підстановок утворює групу щодо операції суперпозиції. Ця множина називається симетричною щодо **n**.

Тема 2 Закони логіки висловлень, їх символьне визначення та зв`язок з алгеброю логіки

Закони логіки висловлень застосовують при побудові будь-якої із сучасних мов програмування. Задача формальної логіки складається у встановленні методів правильних умовиводів. Це робиться двома засобами:

1. за допомогою правил виводу;
2. за допомогою логічних законів.

Законами логіки висловлень називають схеми побудови істинних та помилкових суджень. Закони логіки висловлень ще називають теоремами або тезами логіки.

Закон виключного третього

p або (невірно, що **p**).

Якщо в запропоновану схему замість **р** підставити осмислене речення, то завжди утвориться істина складна пропозиція. Наприклад, якщо замість **р** підставимо речення: «Під час своїх мандрівок Платон побував в Індії», то одержимо складне речення:

Під час своїх мандрівок Платон побував в Індії = **р.**

(Під час своїх мандрівок Платон побував в Індії) або (невірно, що під час своїх мандрівок Платон побував в Індії).

Виконується одна з можливостей: або Платон побував в Індії, або ні. Якщо перше висловлення істина, тоді **р = 1**; якщо лож, тоді **р = 0.**

Якщо, **р = 1** або **р = 0** то стає неможливим будь-яке третє припущення. Саме тому наведений закон зветься законом виключного третього.

Закон непротиріччя

Невірно, що **[р** і (невірно, що **р**)].

Закон формулюється й таким чином: Невірно, що **[р** і (не **р**)].

Наприклад: Невірно, що {(Колумб був в Індії) і [не (був Колумб в Індії)]}.

Кожне з речень по одинці істинна. Людина, не може одночасно бути і не бути в якомусь місці. Колумб не міг одночасно бути і не бути в Індії. Якщо **р = 1** стає суперечливим, що **р = 0.**

У законах непротиріччя і виключного третього формулюються пропозиції виду **р** і **не р**. Таку пару називають суперечними пропозиціями. Закон непротиріччя іноді формулюють у такому виді: дві суперечні пропозиції не можуть бути одночасно істинними.

Закон подвійного заперечення

Якщо заперечити двічі деяке припущення, то в результаті утвориться, начебто ніякого заперечення не було. Наприклад, говорячи: «Не є істинною, що Петро цього не робив», ми, тим самим, підтверджуємо, що Петро цього не робив.

Загальний вид закону: Якщо [невірно, що (невірно, що **р**)], то не **р**.

Оборот «невірно, що **р**» замінимо на «**не р**» (**~ р**). У такому випадку закон формулюється у вигляді: Якщо [не (**не р**)], то **р**.

Пропозиція приймає значення лож **р = 0**, тільки тоді, коли, те що заперечиться істинно. Навпаки, якщо пропозиція є неправильною **~ р = 0** (не р), то її заперечення є істинною [**~** (**~ р) =1]**.

Зв'язок висловлюють символічно:

1. якщо **р** істинно, то **~ р** (не р) лож;
2. якщо **р** лож, то **~ р** (не р) істинно.

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

1 при **р** істинно **р** = 1;

2 при **р** лож **р** = 0.

1. Якщо **р** = 1, то **~ р** (не р) = 0;
2. якщо **р** = 0, то **~ р** (не р) = 1.

р	~ р
1	0
0	1

У таблиці в колонку під **р** записані символи пропозицій, які може приймати довільне речення. Застосовується й інша форма запису:

якщо р = А, то **~ р = ~А.**

Заперечення висловлення А (~А) необхідно розглядати, як функцію однієї перемінної.

Закон контрапозиції

Закон контрапозиції називають законом подвійного якщо:

Якщо (якщо **р**, то **q**), то [якщо **не q**, то **не р**)].

Якщо [(у Яна буде час), то (Ян відвідає Петра), але якщо (Ян не відвідає Петра), то в (Яна не було часу).

1. Ян відвідає Петра = **р;**
2. Ян не відвідає Петра = **q.** У Яна буде час = **n;**
3. у Яна не було часу = **m.**

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

Припущення **р** істинно, якщо **n** істинно.

Припущення **q** істинно, якщо **m** істинно.

n = 1 p = 1	m = 0 q = 0
m = 1 q = 1	n = 0 p = 0

Закон контрапозиції дає уявлення про логічну функцію двох змінних.

Закони алгебри логіки, які характеризують кон`юнкцію

Застосування союзу **і** при побудові висловлень зветься кон`юнкцією. Наприклад: (Дніпропетровськ розташований на Дніпрі) **і** (Київ розташований на Дніпрі).

Скорочена форма запису:

Дніпропетровськ розташований на Дніпрі = p;
Київ розташований на Дніпрі = q.

Якщо (p і q) то (q і p);
якщо (p і q) то p;
якщо (p і q) то q.

У логічних схемах існує правило, яке дозволяє застосовувати кон`юнкцію двох і більше істинних пропозицій:

Якщо p, то [якщо q. то (p і q)].

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

1. p = 1 і q = 1, то (p і q) = 1;
2. p = 1 і q = 0, то (p і q) = 0;
3. p = 0 і q = 1, то (p і q) = 0;
4. p = 0 і q = 0, то (p і q) = 0.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Якщо істині висловлення, які складають, кон`юнкцію, то кон`юнкція істина, і навпаки, якщо кон`юнкція істина, то істина кожна її складова. Кон`юнкція помилкова якщо помилкова хоча б одна її складова.

Закони імплікативних спілок

Імплікативними силогізмами є теореми, які подібні логічним схемам, називаним силогізмами. У традиційній логіці силогізмами вважають схеми умовиводів, які призводять від двох посилань до висновку, котрий має визначений вид. В імплікаціях обидва посилання, як і висновок, мають однаково визначений вид.

Наприклад:

- якщо завтра буде ясна погода, то не буде снігопаду;
- якщо завтра буде ясна погода, то з'являється можливість приємної прогулянки;

- **якщо** [(завтра буде ясна погода), **то** (не буде снігу), висновок, (з'явиться можливість приємної прогулянки)].

Завтра буде ясна погода посилання = **p;**
не буде снігу посилання = **q;**
з'явиться можливість приємної прогулянки висновок = **r.**

Скорочена форма запису:

якщо [(якщо p, то q) і (якщо p то r)], то [якщо p, то (q і r)].

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

1. p = 1 і q = 1 то $(p \rightarrow q) = 1$;
2. p = 1 і q = 0 то $(p \rightarrow q) = 0$;
3. p = 0 і q = 1 то $(p \rightarrow q) = 1$;
4. p = 0 і q = 0 то $(p \rightarrow q) = 1$.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Коли обидві посилки вірні, то висновок вірний. Якщо одна з посилок зрадлива, то і весь алгоритм зрадливий.

Закони, які характеризують диз'юнкцію.

Диз'юнкція завжди є комунікативною. Вона характерна спілкою **або.**

Наприклад:

- завтра буде дощ **або** завтра буде сонячно;
- завтра буде сонячно, **або** завтра буде дощ.

Завтра буде дощ p;
завтра буде сонячно q.

Якщо (**p** або **q**), то (**q** або **p**).

При диз'юнкції можливі підстановки: Якщо вірно, що завтра буде дощ, то одночасно не може бути сонячно.

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

1. якщо p = 1 і q = 1 то (p або q) = 1;
2. якщо p = 1 і q = 0 то (p або q) = 1;
3. якщо p = 0 і q = 1 то (p або q) = 1;
4. якщо p = 0 і q = 0 то (p або q) = 0.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Диз'юнкція істина тоді, коли один з її членів є істинним.

Закон, що характеризує еквівалентність

Якщо (**p** тоді і тільки тоді, коли **q**), то (**q** тоді і тільки тоді, коли **p**).

Наприклад:

Якщо [(наступає туман) тоді і тільки тоді, коли відносна вологість повітря перевищує 100%)], [(відносна вологість повітря перевищує 100% тоді і тільки тоді, коли наступає туман)].

Еквівалентність комунікативна.

Якщо (**p** тоді і тільки тоді, коли **q**), то (якщо **p** то **q**).

Форма запису відповідно прийнятої символіки:

1. якщо p = 1 і q = 1, то $(p \leftrightarrow q) = 1$;
2. якщо p = 1 і q = 0, то $(p \leftrightarrow q) = 0$;
3. якщо p = 0 і q = 1, то $(p \leftrightarrow q) = 0$;
4. якщо p = 0 і q = 0, то $(p \leftrightarrow q) = 1$;

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Еквівалентність істинна коли обидва її члена одночасно або істинні, або помилкові.

Закони де-Моргана

1. [Не (**p** або **q**)] тоді і тільки тоді, коли [(**не p**) і (**не q**)].
2. [Не (**q** і **не p**)] тоді і тільки тоді, коли [(**не p** або **не q**)].

Обидва закони мають численні застосування, у першу чергу при підстановках.

Наприклад

{Невірно, що [(завтра буде одночасно сонячно), і (завтра буде одночасно дощ)]}.

завтра буде сонячно **p;**

завтра буде дощ **q.**

[Краще: Невірно, що завтра буде сонячно і завтра буде дощ тоді і тільки тоді, коли завтра не буде сонячно або завтра не буде дощ]

Всі підстановки при використанні законів де-Моргана істині з винятковою очевидністю. Ці закони можна характеризувати як: заперечення диз'юнкції еквівалентно кон`юнкції заперечень, тоді коли заперечення кон`юнкції еквівалентно диз'юнкції заперечень.

Тема3 Нормальні форми в алгебрі логіки та засоби побудови нормальних форм

Існують три принципово різні семантичні вирази алгебри логіки:

$$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q). \quad (1)$$

$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge q). \quad (2)$$

$$(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q). \quad (3)$$

Відзнаки виразів наведені в таблиці 1

Таблиця 1

p	Q	~ p	~q	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	$(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$
1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0

- вираз $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ при будь-якому розподілі значень пропозиціональних змінних приймає логічне значення **істина**;
- вираз $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$ завжди приймає логічне значення **неправда**;
- вираз $(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$ не істинний, але і не є **неправдою**, він зветься **нейтральним**.

Таким чином, у алгебрі логіки зустрічаються три види виразів:

1. загальнозначущі – такі вирази, які при кожному наборі значень своїх пропозиціональних змінних приймають тільки значення істина. Загальнозначущі вирази називають законами логіки висловлень;
2. протиріччя – вирази, які при будь-якому наборі пропозиціональних змінних приймають тільки значення неправда;
3. нейтральні висловлення – такі вирази, котрі набувають, принаймні, при одному наборі значень пропозиціональних змінних, які в них зустрічаються, значення неправда;
4. виконаними виразами називаються такі вирази, котрі, принаймні, при одному розподілі значень істинності пропозиціональних змінних, які в них зустрічаються, приймають значення істина.

Будь-який вираз алгебри логіки завжди перетворюється в одну з форм, яка називається нормальною. Вираз в нормальній формі містить у собі тільки заперечення, кон`юнкцію або диз'юнкцію.

Перетворення форм

Імплікація (як наведено в таблиці 2) може бути перетворена в диз'юнкцію $p \to q \equiv \sim p \vee q$**,** тому що обидві мають однаковий порядок значень.

Таблиця 2

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

Є цілий ряд перетворень імплікацій, наприклад:

$p \to \sim q$, $\sim p \to \sim q$, $\sim (p \to q)$, $(p \wedge q) \to r$.

Для перетворень імплікацій у диз'юнкцію достатньо запам'ятати правило: вираз $\sim p \vee q$ завжди можна одержати з $p \to q$.

$$\begin{array}{ccc} p & \to & q \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \sim p & \vee & q \end{array}$$

1. p – антецедент імплікації замінюється своїм запереченням;
2. $\to$ – константа імплікації замінюється константою $\vee$ для диз'юнкції;
3. q – консеквент імплікації береться без зміни.

Імплікація (як наведено в таблиці 3) перетвориться в диз'юнкцію з таким же порядком значень істинності, якщо її антецедент заперечується, константа імплікації замінюється константою диз'юнкції, а консеквент береться без змін. Відповідно до цього припустимі такі перетворення:

Таблиця 3

$p \to \sim q$ $\downarrow$ $\sim p \vee \sim q$	$\sim p \to \sim q$ $\downarrow$ $\sim \sim p \vee \sim q$	$\sim (p \to q)$ $\downarrow$ $\sim (\sim p \vee q)$	$(p \wedge q) \to r$ $\downarrow$ $\sim (p \wedge q) \vee r$

Диз'юнкція (як наведено в таблиці 4) перетвориться в імплікацію з таким же порядком значень істинності, якщо її перший член заперечиться, константа диз'юнкції замінюється константою імплікації, а її другий член береться без зміни. Відповідно до цього припустимі такі перетворення:

Таблиця 4

$p \vee q$	$p \vee \sim q$	$\sim (\sim p \vee q)$	$\sim (p \wedge q) \vee q$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\sim p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim (\sim \sim p \rightarrow q)$	$\sim \sim (p \wedge q) \rightarrow r$
		$\downarrow$	$\downarrow$
		$\sim (p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$

Кон`юнкція перетвориться в диз'юнкцію з таким же порядком значень істинності, якщо:

1. обидва члени замінюються їхніми запереченнями;
2. $\wedge$ замінюється $\vee$ і заперечується весь вираз;
3. відповідно, $p \wedge \sim q$ перетвориться в $\sim (\sim p \vee \sim \sim q)$ і в остаточному підсумку спрощується в $\sim (\sim p \vee q)$.

Диз'юнкція перетвориться в кон`юнкцію з таким же порядком значень істинності, якщо:

1. обидва члени замінюються їх запереченнями;
2. $\vee$ заміняється на $\wedge$ і заперечується весь вираз

$$\sim (\sim p \vee \sim q) \sim \sim (\sim \sim p \wedge \sim \sim q) \qquad p \wedge q.$$

Зв'язок між виразами алгебри логіки наведено у таблиці 5

Таблиця 5

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

З таблиці істинності видно, що:

1. вирази $p \rightarrow q$ і $\sim p \vee q$ семантично еквівалентні;
2. еквіваленція $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ загальнозначуща.

Два вирази семантично еквівалентні тільки тоді, коли утворена з них еквіваленція загальнозначуща.

Правило підстановки: у загальнозначущому виразі алгебри логіки замість будь-якої пропозиціональної змінної можна підставити будь-який вираз за умови, що це здійснюється для усіх входжень цієї змінної.

Відношення алгебри логіки, вираз одних спілок через інші

- Перехід від імплікації до диз'юнкції: $p \to q \equiv {\sim}p \lor q$;

  $\boxed{\equiv \quad \text{тотожність}}$ $\qquad (p \to q) \leftrightarrow ({\sim}p \lor q)$;
- перехід від кон`юнкції до диз'юнкції: $p \land {\sim}q \equiv {\sim}({\sim}p \lor {\sim}{\sim}q) \equiv {\sim}({\sim}p \lor q)$;
- закон подвійного заперечення: ${\sim}({\sim}p) \equiv p$;
- перший закон де Моргана – заперечення кон`юнкції ${\sim}(p \land q) \equiv {\sim}p \lor {\sim}q$;
- другий закон де Моргана – заперечення диз'юнкції ${\sim}(p \lor q) \equiv {\sim}p \land {\sim}q$.

Закони де Моргана використовуються для перенесення заперечень, які застосовані до складних висловлень. Вони є законами вираження одних спілок через інші. За допомогою цих законів, використовуючи еквівалентність, можна виключати імплікацію з будь-якої формули. Еквівалентність є відношенням між формулами. При її допомозі подвійна імплікація виражається:

1. через кон`юнкцію й імплікацію еквівалентністю

   $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$; $\qquad p \leftrightarrow q = r$;
2. через кон`юнкцію, диз'юнкцію і заперечення еквівалентністю

   $p \leftrightarrow q \equiv ({\sim}p \lor q) \land (p \lor {\sim}q)$; $\qquad p \leftrightarrow q = r$;
3. через кон`юнкцію і заперечення еквівалентністю

   $p \leftrightarrow q \equiv {\sim}(p \land {\sim}q) \land {\sim}({\sim}p \land q)$. $\qquad p \leftrightarrow q = r$.

Закон контрапозиції: $p \to q \equiv {\sim}q \to {\sim}p$ означає, що замість істинності висловлення $p \to q$ можна доводити обернене, протилежне йому твердження ${\sim}q \to {\sim}p$. При цьому, ${\sim}q \to {\sim}p$ є конверсією контрапозиції. При кон`юнкції імплікацій одержуємо $(p \to q) \land (q \to p) \equiv p$ -q.

З визначення відношень еквівалентності безпосередньо випливає, що воно рефлексивно, симетрично, транзитивне.

1. $r \equiv r$ для будь-якої формули r рефлексивно;
2. якщо $r_1 \equiv r_2$, то $r_2 \equiv r_1$ симетрично;
3. якщо $r_1 \equiv r_2$ і $r_2 \equiv r_3$, то $r_1 \equiv r_3$ транзитивне відношення, то воно справедливе для будь-яких формул r_1, r_2, r_3.

Можливість виразу того самого висловлення еквівалентними формулами відбиває можливість виразу однієї і тієї ж думки за допомогою висловлень різноманітних логічних структур. Відношення еквівалентності дозволяє, зокрема, виражати одну логічні операції через іншу.

Наприклад:

Якщо необхідно досліджувати еквіваленцію $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$, то її перетворюють у дві імплікації, які досліджуються окремо. Спочатку розглянемо імплікацію $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Припустимо, що консеквент $(p \rightarrow q)$ невірний, тому p істинно, q невірно. Через хибність q антицендент невірний. Отже, цей вираз загальнозначущий. Роздивимося імплікацію $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$. Є три набори значень істинності, при яких консеквент невірний. Серед них є один набір значень, коли антецедент також невірний (якщо p істинно, а q невірно). Але це ще не говорить про те, що вираз загальнозначущий. Існують два будь-яких набори значень, при яких усі вирази невірні:

1. коли p невірно, та q істинно;
2. коли p та q обидва помилкові.

Досліджувана еквіваленція була б загальнозначущою, якби обидві імплікації були загальнозначущі. Тільки перша імплікація є загальнозначущою.

Тема 4 Рішення виразів алгебри логіки за допомогою нормальних форм

Для рішення деякого виразу алгебри логіки (тобто для встановлення до якого класу він належить) його спочатку призводять до нормальної форми. Нормальна форма повинна задовольняти таким умовам:

1. бути семантично еквівалентною первісному виразу;

2. в зв`язку з логікою висловлень, в ній повинні утримуватися тільки знаки заперечення, кон`юнкції та диз'юнкції;
3. знаки заперечення, що зустрічаються, повинні ставитися тільки до пропозиціональних змінних, але не до складних виразів.

Приведемо до нормальної форми вираз:

$$\sim (p \vee \sim q) \rightarrow \rightarrow \sim (\sim p \wedge q). \tag{4}$$

Насамперед, необхідно подбати про виконання другої умови, а вже потім проводити перетворення, для виконання третьої умови. Для цього спочатку необхідно усунути знаки імплікації з виразу (4). Перетворення імплікації в диз'юнкцію призводить до такого виду:

$$\sim \sim (p \vee \sim q) \vee \sim (\sim p \wedge q). \tag{5}$$

Перетворення імплікації в диз'юнкцію призвело до того, що лівий член заперечиться двічі. Відповідно до правила, вираз може бути зведено до такого:

$$(p \vee \sim q) \vee \sim (\sim p \vee q). \tag{6}$$

Тепер правий член необхідно перетворити так, щоб було виконано умову про відношення знаків заперечення тільки до пропозиціональних змінних. Для цього правий член виразу перетворимо в диз'юнкцію:

$$(p \vee \sim q) \wedge \sim \sim (\sim \sim p \vee \sim q). \tag{7}$$

Після скорочення подвійних знаків заперечення утворюється вираз:

$$(p \vee \sim q) \vee (p \vee \sim q). \tag{8}$$

Вираз (8) є нормальною формою виразу (4).

Доцільно не брати до уваги знаки заперечення, тому що вони нерідко скорочуються в процесі перетворення. Якщо нормальна форма містить заперечення, то потребує додаткових перетворень. При цьому виконуються правила дистрибутивності:

1. від $p \vee (q \wedge r)$ можна перейти до $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ і навпаки. Обидва вирази мають той самий розподіл значень істинності;
2. від $p \wedge (q \vee r)$ можна перейти до $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Правила дистрибутивності гарантують, що вираз, отриманий з їх допомогою, семантично еквівалентний первісному. За допомогою правил дистрибутивності з будь-якого виразу алгебри логіки після приведення до нормальної форми, можна одержати його кон`юнкцію і диз'юнкцію нормальної форми. Кон'юнктивна нормальна форма виразу $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ –

кон’юнктивна диз'юнкція, яка виконує усі умови нормальної форми. Члени диз'юнкцій (із запереченнями або без них) є пропозиціональними змінними. Кон`юнктивна нормальна форма дозволяє дізнатися, є вираз загальнозначущим або ні.

Дослідимо вираз: $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$. Спочатку складемо нормальну форму:

$$\sim (p \wedge q) \wedge (p \wedge q);$$

$$\sim (\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge q);$$

$$(\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q).$$

Вираз складається з диз'юнкції і кон`юнкції. Але нам необхідна кон`юнкція диз'юнкцій. Візьмемо перше правило дистрибутивності. Замість p введемо $(\sim p \vee \sim q)$, одержимо:

$$((\sim p \vee \sim q) \vee p) \wedge ((\sim p \vee \sim q) \wedge q).$$

Вирази (p ($q \vee r$) та $((p \vee q) \vee r$ і $(p \vee q \vee r)$ семантично еквівалентної. Їх можна переписати у виді: $(\sim p \vee \sim q \vee p) \vee (\sim p \vee \sim q \vee q)$. Кон`юнкція диз'юнкцій еквівалентна початковому виразу, її члени є пропозиціональними змінними.

Якщо з кон`юнктивної нормальної форми виразу можна дізнатися, чи є він загальнозначущим, то диз`юнктивна нормальна форма дозволяє визначити, чи є вираз суперечливим. Диз`юнктивна нормальна форма є диз'юнкцією кон`юнкцій. Вона виконує всі умови нормальної форми. Члени цих кон`юнкцій є пропозиціональними змінними (із запереченням або без нього).

Приведемо **вираз** $p \wedge [(\sim p \wedge q) \vee (q \wedge \sim p)]$ до диз`юнктивної нормальної форми. Приймемо, що p лишається незмінним, $(\sim p \wedge q)$ підставляється замість q, замість r підставляється $(q \wedge \sim q)$. Одержимо:

$$(p \wedge (\sim p \wedge q)) \vee (p \wedge (q \wedge \sim q));$$

$$(p \wedge \sim p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \sim q).$$

Обидві кон`юнкції містять вираз виду $p \wedge \sim p$**.** Вони при будь-якому наборі значень змінних помилкові, тобто є протиріччями, тому що кон`юнкція містить помилковий член. Обидва члени диз'юнкції є протиріччями. Таким чином, вона і сама є протиріччям. Отже, і початковий вираз також суперечення.

Вирази алгебри логіки є протиріччям, якщо в кожній кон`юнкції, яка складає диз`юнктивну нормальну форму, деяка пропозиціональна змінна входить один раз із запереченням, а іншим разом без нього. Якщо ж цього немає хоча б в одній кон`юнкції, то вираз не є протиріччям, тобто він загальнозначущий або нейтральний.

ТЕМА 5 БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ Й ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Булеві функції й операції над ними зручно розглядати, використовуючи поняття "множина". Припустимо, що кожна з множин складається з декількох підмножин. Якщо глобальну множину визначати як U, то вхідні в неї підмножини A, B, C, і т.д. Надалі, глобальна множина буде розглядатися як функція U**,** підмножини, як її змінні x_1, x_2, x_3, і т.д.

$$A = x_1, \qquad B = x_2, \qquad C = x_3.$$

Функція $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ де: $x = \{0, 1\}$, називається функцією алгебри логіки, або булевою функцією.

Таблиця істиності (6) булевої функції від **n** змінних має вид:

Таблиця 6

x_1	X_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_n)$
0	0	0	
…	…	…	
…	…	…	
1	1	1	

Якщо число змінних **n,** то таблиця має 2^n рядків. Це відповідає усім комбінаціям змінних, які можна визначити. В кожному рядку спочатку задається набір значень змінних, а потім значення функції на цьому наборі.

Суттєві і несуттєві змінні

Булева функція при $f \in P_n$ істотно залежить від змінних x_i, якщо існує набір таких змінних: $a_1, \ldots, a_{i+1}, \ldots, a_n$, при якому:

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f'(a'_1, \ldots, a'_{i-1}, 1, a'_{i+1}, \ldots, a'_n).$$

У такому випадку $\mathbf{x_i}$ – суттєва змінна, у протилежному – $\mathbf{x_i}$ несуттєва змінна.

Приклад

Нехай функції $f_1(x_1, x_2)$ і $f_2(x_1, x_2)$ задані такою таблицею істинності:

Таблиця 7

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Для цих функцій x_1 – суттєва змінна, а x_2 – несуттєва змінна. Булеві функції рівні, якщо утворюються видаленням або додаванням несуттєвих змінних. Усюди надалі булеві функції будемо розглядати з точністю до несуттєвих змінних. Це дозволяє вважати, що всі булеві функції (у даній системі функцій) залежать від однакових змінних.

Операції алгебри логіки Буля

Операції булевої алгебри розглядаємо при використанні поняття “множина”. Під множиною розуміємо сукупність елементів будь-якої природи, які підпорядковані рахуванню. Зміст процедури рахування складається в установленні взаємно однозначної відповідності між елементами. Процедура рахування для множини завжди повинна бути визначеною. Питання, пов'язані з необмеженою кількістю елементів в булевій алгебрі не розглядаються.

Нехай дана сукупність предметів, які після перерахування можна позначити як: **U** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}. Припустимо, що перша частина предметів, як-от: 1, 2, 4, і 6, мають круглу форму. Друга частина – 2, 3, 4, 8, і 9 пофарбована в білий колір. У цьому випадку множина **U** має дві підмножини: A = {1, 2, 4, 6}. B {2, 3, 4, 8, 9}.

$$\begin{cases} \text{A – множина круглих предметів} \\ \text{B – множина білих предметів} \end{cases}$$

Вихідну множина називають фундаментальною, а підмножини A і B – просто множинами.

У результаті якісного аналізу фундаментальної множини одержимо чотири класи елементів:

C_0 {5, 7, 10, 11} – елементи, які не володіють жодною з названих властивостей,

C_1 {1, 6} – елементи, які володіють тільки властивістю А (бути круглими),

C_2 {3, 8, 9} – елементи які мають властивість бути білими,

C_3 {2, 4} – елементи, які володіють одночасно двома властивостями.

Зображення класів елементів показане (мал.1) на діаграмі Ейлера-Венна:

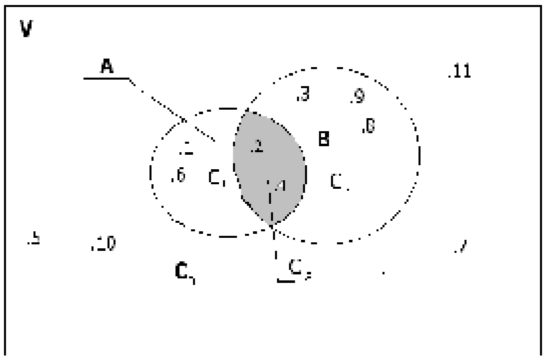


Рис.1

Графічне відображення (мал.2) операції вмикання в булевій алгебрі:

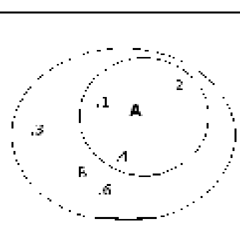


Рис.2

Малюнок 2 показує, що множина А цілком включена в множину В.

$$A \subset B = \{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

Якщо одночасно виконуються дві умови: $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$ У такому випадку множини А і В цілком еквівалентні.

Після визначення елементів, множин починаємо операції над ними.

Графічне відображення (мал.3) операції об'єднання в булевій алгебрі:

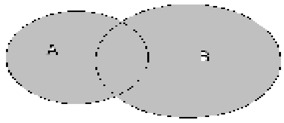


Рис.3

$A = \{1, 2, 4, 6\}$ $B = \{2, 3, 4, 8, 9\}$

Нехай $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Об'єднанням охоплюються три класи елементів – C_1, C_2, C_3.

Тому, що x належить A або B, використовуємо таку форму запису:

$x \in A \cup B = (x \in A) \vee (x \in B)$,

З погляду алгебри логіки, замість однієї змінної x зручно ввести дві логічних змінних x_1, і x_2. Областю визначення $\mathbf{x_1}$, і $\mathbf{x_2}$ будуть не числа натурального ряду, а два логічних значення: 1 – для істинного значення і 0 – для помилкового.

Приклад

Нехай $x = 7$. Оскільки це число не належить ні множині A, ні множині B, то логічні значення змінних будуть $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Комбінація змінних відповідає класу C_0.

Припустимо, що вибрано число 4. Воно входить як в A так і у B. Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, що відповідає класу C_3.

Нехай $x = 6$. Маємо $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, для $x = 8$ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, що відповідає класам C_1 і C_2.

Змінні x_1 і x_2 визначають логічну функцію: $y = f(x_1, x_2)$, яка у випадку диз'юнкції може бути записана як пропозиціональна низка: $y = x_1 \vee x_2$. Число 7 не входить в об'єднання множин $A \cup B$, тому при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ значення логічної низки дорівнює 0. Коли ж вибираються числа 4, 6, або 8, то вони потрапляють в область діаграми.

При цих значеннях функція (як показано в таблиці 8) дорівнює:

Таблиця 8

Умова	x_1	x_2	$y = x_1 \vee x_2$.
x = 7	0	0	0
x = 6	1	0	1
x = 8	0	1	1
x = 4	1	1	1

Число одиниць і нулів для функції U визначає загальне число можливих операцій на двох множинах.

Графічне відображення (мал.4) операції перетинання в булевій алгебрі:

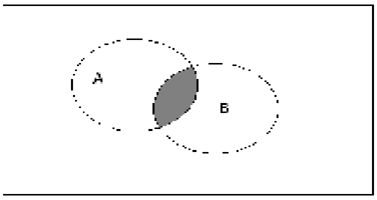


Рис.4

Перетинанням множин A і B називається множина $A \cap B$, яка містить ті елементи A і B, що входять одночасно в обидві множини. Для нашого приклада будемо мати: $A \cap B = \{1, 2, 4, 6\} \cap \{2, 3, 4, 8, 9\} = \{2, 4\} = C_3$,

Належність x одночасно A і B можна представити виразом:

$x \in A \cap B = (x \in A) \wedge (x \in B)$.

Якщо в таблиці істинності диз'юнкції усе нулі замінити одиницями, а всі одиниці нулями, то одержимо взаємну двоїстість диз'юнкції і кон'юнкції. Для будь-якої логічної операції можна знайти двоїсту.

При перетинанні множин C_1 і C_3 $C_1 = \{1, 6\} \cap C_3 \{2, 4\}$,

Множина $\bar{A}$ – доповнена (мал.5):

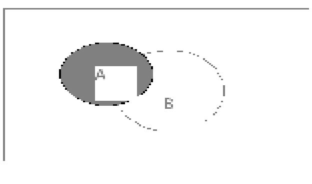


Рис.5

При перетинанні множин C_0 і C_2 одержуємо $\boldsymbol{A}\cap\bar{\boldsymbol{A}}$ = 0 порожню множину

При кон'юнкції (як показано в табл. 9) одержуємо таку таблицю істинності:

Таблиця 9

x_1	x_2	$y = x_1 \wedge x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

На діаграмі Ейлера-Венна (мал.6) порожня множина має вигляд:

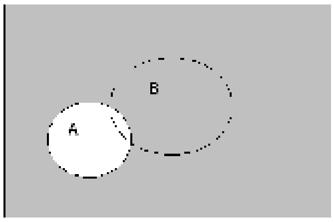


Рис.6

При утворенні доповненої множини говоримо про тавтологію. При утворенні порожньої – про протиріччя. Для логічних функцій, що мають відповідні назви виконуються такі рівності:

$$y = x \vee \bar{x} = 1$$ – тавтологія,

$$y = x \wedge \bar{x} = 0$$ – протиріччя.

Множина А доповнює множину $\bar{A}$ до фундаментальної множини U, звідси назва – доповнена множина, логічна операція називається доповнення. При утворенні порожньої множини операція називається заперечення. Операції перетинання і доповнення в булевих алгебрах для чотирьох аналізованих областей позначаються в такий спосіб:

$$C_0 = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad C_1 = A \cap \bar{B}, \quad C_2 = \bar{A} \cap B, \quad C_3 = A \cap B.$$

Шляхом об'єднання відповідних областей C_I можна уявити будь-яку множинну операцію, у тому числі і саме об'єднання:

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cap (A \cap B).$$

Всё це поширюється і на алгебру логіки:

$$y = x_1 \vee x_1 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2).$$

Операції стрілка Пірса і штрих Шеффера в алгебрі логіки

Операція стрілка Пірса визначає об'єднання двох і більш доповнених (узятих із запереченням) областей до фундаментальної множини. На діаграмі Ейлера-Венна (мал.7) вона позначається такий чином:

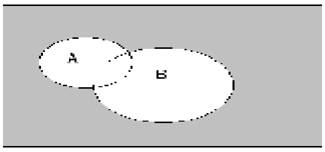


Рис.7

На мові алгебри логіки формули операції стрілка Пірса мають вид:

$$(\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2) \vee (\boldsymbol{x}_1 \downarrow \boldsymbol{x}_2) = 1, \quad (\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2) \wedge (\boldsymbol{x}_1 \downarrow \boldsymbol{x}_2) = 0.$$

Логічна операція штрих Шеффера (мал.8) визначає перетинання доповнених областей до фундаментальної множини. Діаграма Ейлера-Венна має вид:

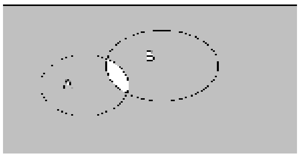


Рис.8

На мові алгебри логіки формули операції перетинання має вид:

$$(\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2) \vee (\boldsymbol{x}_1 \ \mathbf{b} \ \boldsymbol{x}_2) = 1, \quad (\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2) \wedge (\boldsymbol{x}_1 \ \mathbf{b} \ \boldsymbol{x}_2) = 0.$$

Таблиця істинності (10) для логічної операції стрілка Пірса має вид:

Таблиця 10

x_1	x_2	$y = x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

З таблиці видно, що:

$$y = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2).$$

Таблиця істинності (11) для логічної операції штрих Шеффера має вигляд:

Таблиця 11

x_1	x_2	$y = x_1 \updownarrow x_2$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

З таблиці видно, що:

$$y = x_1 \ \mathbf{b}\ x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2).$$

Різницею між множинами А і В називається сукупність тих елементів множини А, що не ввійшли в В:

А - В = {1, 2, 4, 6} - {2, 3, 4, 8, 9} = {1, 6} = С1.

Діаграма Ейлера-Венна (мал.9) для різниці множин має такий вид:

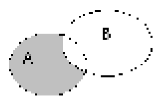


Рис.9

Таблиця істинності (12) для різниці множин:

Таблиця 12

x1	x2	У = x1 - x2
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	0

Для логічної функції різниці множин справедлива рівність:

$$y = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1 - x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = (x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2).$$

Діаграма Эйлера-Венна (мал.10) має вид:

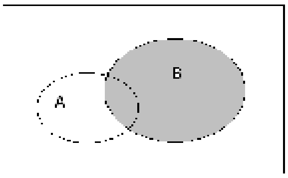


Рис.10

На діаграмі видно, що при імплікації відбувається часткове вмикання множини А в множину В.

Таблиця істинності (13) має вид:

Таблиця 13

x_1	x_2	$y = x_1 \to x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Логічна функція має такий вид запису:

$$(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \vee (\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2) = 1, \qquad (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \wedge (\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2) = 0.$$

Симетричною різницею множин А и В є об'єднання двох різниць:

А + В = (А - У) ∪ (В - А) = {1, 3, 6, 8, 9} = С1 ∪ С2 = {1, 6}∪ {3, 8, 9}.

Діаграма Ейлера-Венна для симетричної різниці (мал.11) має вид:

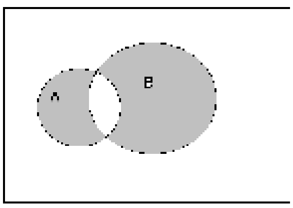


Рис.11

Функція при симетричній різниці подана в такий спосіб:

$$(x_1 + x_2) \vee (x_1 \sim x_2) = 1.$$

$$(x_1 + x_2) \wedge (x_1 \sim x_2) = 0.$$

Симетрична різниця має декілька назв:

- строга диз'юнкція, що виключає альтернативу;
- сума по модулі два.

Симетричну різницю можна визначити словами: «або А, або В», тобто це логічна низка «або», але без вмикання в неї низки «і».

Еквівалентність

Визначається тими елементами множин А і В, що є для них загальними. Але елементи не вхідні ні в множину А, ні в множину В, також рахуються еквівалентними.

Діаграма Ейлера-Венна (мал.12) для еквівалентності має вид:

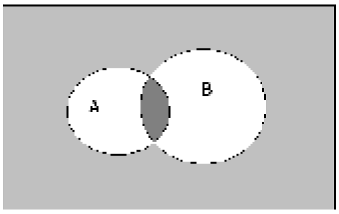


Рис.12

З умов додатковості випливає таке співвідношення:

$$y = x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 + x_2} = (x_1 \wedge x_2) \wedge (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \wedge x_2) \wedge (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2).$$

Таблиця істинності еквівалентності (14) має такий вид:

Таблиця 14

x_1	x_2	$y = x_1 - x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

ТЕМА 6. ЗАКОНИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ ТА ЇХ ПОРІВНЯННІСТЬ З АРИФМЕТИЧНИМИ ВИРАЗАМИ

У якості основних законів в алгебрі логіки називають:

1. **Закон идемпотичності**:

- $a = a \wedge a$ множина **a** дорівнює спілці множин **a** «і» **a**;
- $a = a \vee a$ множина **a** дорівнює **a** «або» **a**.

2 Закон комунікативності:

- $a \wedge b = b \wedge a$ спілка множин **a** «і» **b** дорівнює спілці множин **b** «і» **a**;
- $a \vee b = b \vee a$ альтернатива **a** «або» **b** дорівнює альтернативі **b** «або» **a**.

3 Закон асоціативності:

- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ при асоціації трьох різноманітних множин їх перестановка не змінює змісту глобальної множини.

4 Закон дистрибутивності:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, при альтернативі між множинами **b** і **c** та спілці такої альтернативи з множиною **a**, вірно, що спілка множин **a** і **b** альтернативна спілці множин **a** і **c**;
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge (a \vee c)$, при виборі між множиною **a** або асоціацією множин **b** і **c** дійсна асоціація між альтернативами множин **a** «або» **b** або ж **a** «або» **c**.

5 Закон нуля й одиниці:

- $a \wedge \bar{a} = 0$ при асоціації множин **a** і доповненої множини **ā** глобальна множина обертається в порожню або дорівнює 0;
- $a \wedge 1 = 1$, асоціація множини **a** з одиницею дорівнює одиниці;
- $a \vee \bar{a} = 1$ альтернатива множини **a** і доповненої множини **ā** дорівнює 1;
- $a \wedge 0 = a$ альтернатива множини **a** і 0 дорівнює множині **a**.

6. Закон поглинання:

- $a \vee (a \wedge b) = a$ при альтернативі множини **a** і асоціації **a** і **b** множина **b** поглинається множиною **a**;

- $a \wedge (a \vee b) = a$ при спілці множини **a** і альтернативі множин **a** «або» **b** - множина **b** поглинається множиною **a**.

7. Закони де Моргана:

$$\overline{a \vee в} = \bar{a} \wedge \bar{в}, \qquad \overline{a \wedge в} = \bar{a} \vee \bar{в};$$

- альтернатива усередині доповненої множини, що включає **a** і **b,** дає асоціацію двох доповнених множин – доповненої множини А і доповненої множини В;
- при альтернативі двох доповнених множин – доповненої множини А і доповненої множини В, утворюється єдина доповнена множина.

8. Закони склеювання:

$$(a \vee \bar{в}) \wedge (a \vee в) = a, \qquad (a \wedge \bar{в}) \vee (a \wedge в) = a.$$

- при спілці двох альтернатив: множини **a** і доповненої множини **b**; а також альтернативі множини **a** і множини **b** одержуємо множину **a**;
- при альтернативі двох спілок: множини **a** і доповненої множини **b**, а також множин **a** і **b** одержуємо множину **a**.

З законів: одиниці і нуля, поглинання, де Моргана, склеювання – можна зробити висновок, що доповнену множину аналізуємо і як заборону - **ā** - «НЕ А». Заборона має й іншу форму запису при виконанні логічних операцій – ˥ **НЕ А.** Закон поглинання нуля й одиниці буде читатися в такем чином: при асоціації А і НЕ А одержуємо 0, при альтернативі А і НЕ А – одержуємо одиницю.

Закон де Моргана відповідно приймає вид: в альтернативі заборон А «і» В одержуємо заборону А і заборону В.

Закон склеювання буде мати вид: у спілці альтернатив А і НЕ В а також альтернативи А або В одержуємо А.

Порівняння тотожностей алгебри логіки й арифметичних виразів наведено в таблиці 15

Таблиця 15

Тотожності алгебри логіки	Арифметичні вирази
$a \vee b = b \vee a$	$a + b = b + a$
$a \wedge b = b \wedge a$	$a * b = b * a$
$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a + (b + c) = (a + b) + c$
$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a * (b * c) = (a * b) * c$
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a * (b + c) = a *b + a * c$
$a \wedge 1 = a$	$a * 1 = a$
$a \vee 0 = a$	$a + 0 = a$
$a \wedge 0 = 0$	$a * 0 = 0$

Не всі вісім законів незалежні друг від друга. Закон идемпотичності можна одержати з закону поглинання при використанні закону дистрибутивності:

$$a = a \vee (a \wedge b) = (a \vee a) \wedge (a \vee b) = (a \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge (a \vee b)) = a \vee a.$$

Закон поглинання може бути виведений із закону нуля й одиниці:

$$a \vee (a \wedge b) = (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) = a \wedge (1 \vee b) = b \wedge 1 = b.$$

Закон идемпотичності щодо диз'юнкції безпосередньо виводиться з законів нуля й одиниці:

$$a \vee a = (a \vee a) \wedge 1 = (a \vee a) \wedge (\bar{a} \vee a) = a \vee (a \wedge \bar{a}) = a \vee 0 = a.$$

При логічних доказах завжди необхідно мати на увазі принцип двоїстості – можливість заміни диз'юнкції кон'юнкцією і навпаки. У цьому випадку ланцюжок рівностей для закону поглинання може бути поданий таким чином:

$$a \wedge (a \vee b) = (a \vee 0) \wedge (a \vee b) = b \vee (0 \wedge b) = a \vee 0 = a.$$

У якості незалежної системи законів можна вибрати закони: комунікативності, асоціативності, дистрибутивності, нуля й одиниці.

Тема 7 Застосування висловлень математичної логіки в контактних схемах

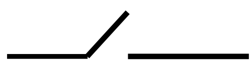
У 1910 році петербурзький фізик П. Эренфест висловив думку про можливість інтерпретації теорії складних висловлень на фізичних і технічних явищах. Найпростішим випадком застосування теорії висловлень в техніці є аналіз контактних електричних схем.

Припустимо, що електричний струм йде від якого-небудь джерела до споживача через один або декілька контактів. Кожен контакт може бути розімкнутий або замкнутий. Перший стан перешкоджає проходженню струму, другий пропускає струм.

Сформулюємо головну задачу: знаючи, які контакти в даний момент часу замкнуті, визначити, чи буде проходити струм по ланцюгу.

Поставимо у відповідність кожному контакту висловлення, визначивши при цьому контакти буквами p, q, r, ... Контакти тепер будуть пропозиціональними змінними, кожна з яких може приймати тільки одне з двох значень:

контакт розімкнутий:

по визначенню = 0  (ланцюг розімкнутий)

контакт замкнутий

по визначенню = 1  (ланцюг замкнутий)

Два стани уподібнюються значенню істинності висловлення (істинно або лож)

Основні операції і відповідні їм найпростіші схеми

Добутком двох контактів $p * q$ називається схема, отримана у результаті послідовного з'єднання.

Ланцюг буде замкнутий (мал.13) тільки тоді, коли обидва контакти будуть замкнуті. У цьому випадку говорять, що ланцюг дорівнює 1:

$p = 1 \quad q = 1,$

P q $p * q = 1 * 1 = 1.$ Рис.13

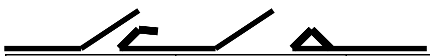
Якщо ж хоча б один із контактів розімкнутий (мал.14), ланцюг дорівнює 0:

p q $p = 1 \quad q = 0,$
$p * q = 0.$

p q $p = 0 \quad q = 1,$
$p * q = 0.$

p q $p = 0 \quad q = 0,$
$p * q = 0.$ Рис.14

Стан ланцюга $p * q$ можна відобразити таблицею істинності:



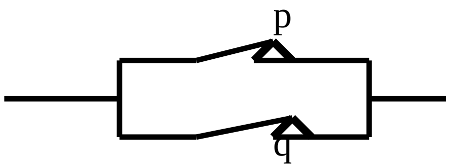
p	q	p * q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
1	0	0

Як відомо, такою же таблицею істинності задається зміст кон`юнкції. Таким чином, найпростіша схема послідовного з'єднання двох контактів може бути описана законом кон`юнкції ($p \wedge q$). Формулою ($p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$) можна описувати схему з послідовно з’єднаними контактами. У електротехніці така схема називається «схемою І» або «схемою збігів».

Сумою контактів p і q позначається («p + q») називається схема утворена рівнобіжним з'єднанням.

Ланцюг буде замкнутий (дорівнює 1) тільки тоді, коли замкнутий (дорівнює 1) хоча б один з утворюючих схему контактів.

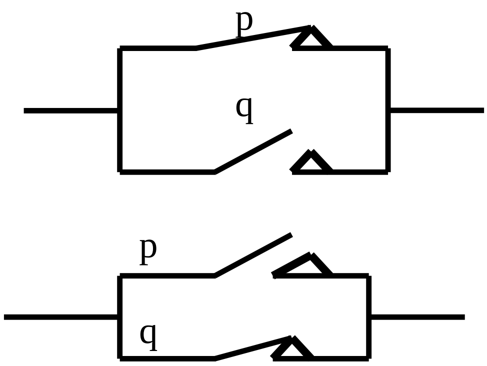
Якщо обидва контакти замкнуті (мал.15), то ланцюг буде замкнутим:



$p = 1 \ \ q = 1,$
$p + q = 1 + 1 = 1.$

Рис.15

Ланцюг буде замкнутим (мал.16) і в тому випадку, якщо один із контактів замкнутий (дорівнює 1), а інший розімкнутий (дорівнює 0):

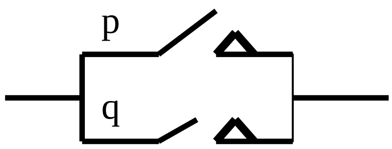


$p = 1 \ \ q = 0,$
$p + q = 1 + 0 = 1.$

$p = 0 \ \ q = 1,$
$p + q = 0 + 1 = 1.$

Рис.16

Коли обидва контакти розімкнуті (мал.17), то ланцюг буде розімкнутий (дорівнює 0):



$p = 0 \ \ q = 0,$
$p + q = 0 + 0 = 0.$

Рис.17

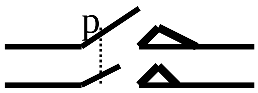
Стан ланцюга p + q можна висловити таблицею істинності:

p	q	p + q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

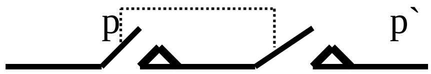
Такою ж таблицею істинності задається зміст диз'юнкції. Найпростіша схема рівнобіжного з'єднання двох контактів може бути описана формулою з двома змінними. Формула $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ буде описувати схему рівнобіжного з'єднання контактів.

Групи контактів

Контакти не завжди діють незалежно друг від друга. Групою контактів називають такі контакти, котрі сполучені жорстким зв'язком і одночасно замикаються або розмикаються. На схемах (мал.18, мал.19), цей зв'язок позначається пунктирною лінією. Якщо контакти завдяки такому зв'язку одночасно замикаються або розмикаються, то вони позначаються однією і тією ж пропозициональною змінною. Таким чином, різноманітні входження однієї і тієї ж змінної у формулу, яка описує електричну схему, визначають, що в схемі контакти, які відповідають цим входженням, механічно сполучені, тобто, утворюють групу контактів.



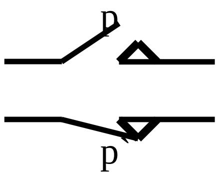
p`.   Рис.18

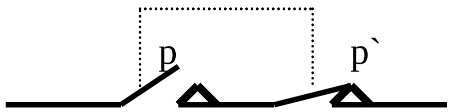


p * p` = p.   Рис.19

Два контакти можна спарити так, що, коли один із них розімкнути, то інший буде замкнутий (мал.20). Один контакт назвемо першим, а інший – протилежним першому. Приймемо, що протилежний першому контакту –замкнутий контакт, він дорівнює 1.

Контакт, протилежний p, означимо p'





p * p` = 0

p = 0,   p` = 1
p = 1,   p` = 0

Рис.20

Дане явище можна відобразити таблицею істинності:

p	p'
1	0
0	1

Це таблиця заперечення. Формула, що виражає операцію заперечення (наприклад ~p'), описує протилежний контакт.

Інтерпретація основних логічних операцій (кон`юнкції, диз'юнкції, заперечення) свідчить, що синтез контактних схем підкорений правилам логіки висловлень, і операції над контактами можуть аналізуватися засобами логіки висловлень. Але при цьому будь-яка формула логіки висловлень повинна бути приведена до нормального виду (містити лише кон`юнкцію, диз'юнкцію, заперечення).

Необхідно мати на увазі, що контактна схема може складатися тільки з одного постійно замкнутого контакту (дорівнює 1), або з одного постійно розімкнутого контакту (дорівнює 0). При конструюванні складних схем, що містять тільки такі постійні контакти, уся схема по своїй дії буде еквівалентна одному з двох постійних контактів 1 або 0. Таким чином, можна побудувати логіку контактних схем, що цілком відповідає (ізоморфна) логіці висловлень.

Подібно тому, як у логіці висловлень важливий не зміст висловлення, а його істинність, так і при розгляді контактних схем інтерес подає, насамперед замкнутість визначеної схеми. Формули логіки висловлень описують стан контактів схеми. Якщо схема замкнута, то вона дорівнює 1. Якщо розімкнута – дорівнює 0.

Деякі умовності:

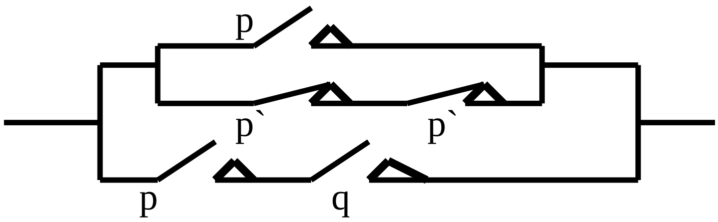
1. Якщо в схемі два контакти позначені однією і тією ж пропозиціональною змінною, то вони завжди приймають однакові значення, тобто, вони механічно об'єднані;
2. якщо в схемі якийсь контакт є запереченням іншого контакту, то їх значення завжди протилежні, тобто, вони механічно сполучені так, що коли один із них замикається, то інший розмикається;

3. якщо у вираз входить буква без штриха, то вона позначає розімкнутий контакт, буква зі штрихом позначає замкнутий контакт.

Приклад вирішення задачі аналізу контактної схеми

Визначити умови роботи заданої схеми. Знайти, при яких положеннях контактів струм буде проходити або не проходити.

Нехай маємо схему (мал.21):



p + (p` * q`)) + (p * q)   Рис.21

Цій схемі відповідає висловлення, позначене формулою:

$$p \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$

Побудувавши таблицю істинності цієї формули, бачимо, що вона помилкова тільки тоді, коли p − лож, а q – істинно. Отже, струм за схемою буде проходити тільки тоді, коли контакт p – розімкнутий, контакт q – замкнутий.

Це можна перевірити безпосередньо. Якщо контакт p − замкнутий, струм пройде крізь верхню гілку незалежно від стана контакту q. Якщо розімкнуті обидва контакти, а p' і q' будуть замкнуті, струм пройде крізь середню гілку.

Формулу, що відповідає наведеній мережі можна записати таким чином $p \vee (\sim p \vee \sim q)$, що у свою чергу відповідає стану, коли дві гілки на схемі розімкнені. Таким чином, електричні властивості аналізованої схеми залишаться незмінними, якщо убрати нижню гілку. Формула – $p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ еквівалентна формулі p, $\wedge$ ~q, якій задовольняє більш проста схема (мал.22).

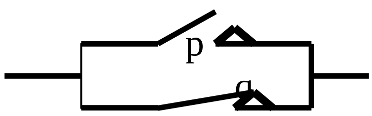


Рис.22

Еквівалентні перетворення для спрощення схем

Аналіз виявив умови, при яких можливе спрощення схем (тобто, заміна схемою з тими ж характеристиками, але з меншим числом контактів)

Важливою задачею побудови контактних схем із наперед заданими умовами роботи є задача їх синтезу, тобто, створення такого послідовно-рівнобіжного з'єднання контактів, що відповідало би необхідним умовам у відношенні провідності. Проблема для логіки висловлень складається в побудові складного висловлення з заданою таблицею істинності.

Кожне складне висловлення, що складається з трьох складових p, q, r, може бути побудоване у виді диз'юнкції основних кон'юнкцій. Оскільки, основні кон`юнкції мають вид: $p \wedge q \wedge r$, $p \wedge q \wedge \sim r$, $p \wedge \sim q \wedge r$ і т.д., кожну з них можна уявити схемою, яка складається з трьох послідовно об`єднаних контактів – $p * q * r$, $p * q * r'$, $p * q' * r$ і т.д. Таку схему називають основною послідовно з`єднаною схемою. Диз'юнкція деяких основних кон'юнкцій тоді буде подана схемою, з рівнобіжним з'єднанням основних послідовно з`єднаних схем.

Отримана мережа буде простою мережею, що задовольняє даним вимогам. Метод завжди достатній для перебування однієї такої мережі. Його зручність – у стандартності.

Необхідно побудувати контактну схему висловлення (табл. 16), що має таблицю істинності 11101000. Вона складається з трьох змінних, якими є основні кон`юнкції:

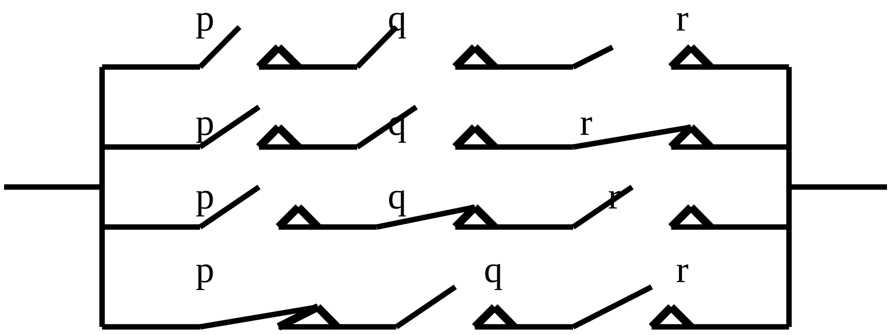
Таблиця 16

№	p	q	r	задана таблиця	Відповідність. кон`юнкції
1	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$
2	1	1	0	1	$p \wedge q \wedge \sim r$
3	1	0	1	1	$p \wedge \sim q \wedge r$
4	1	0	0	0	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$
5	0	1	1	1	$\sim p \wedge q \wedge r$
6	0	1	0	0	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$
7	0	0	1	0	$\sim p \wedge \sim q \wedge r$
8	0	0	0	0	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

Використовуючи таблицю, шукане висловлення запишемо формулою:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$$

Побудуємо відповідну контактну схему (мал.23):



(p * q * r) + (p * q * r`) + (p * q` * r) + (p` * q * r)

Рис.23

Схема, яка задовольняє такій умові проводить струм тільки тоді, коли замкнуті, принаймні, два з трьох контактів.

Література

1. Акимов О. Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. 376с.
2. Аристотель. Первая аналитика, Вторая аналитика. Собр. Соч.: В 4 т. – М.: Мысль, Т. 2. – 685с.
3. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976. – 400с.
4. Гетманова А. Д. Логика. – М.: Высш. шк, 1986. – 298с.
5. Гильберт Д., Барнайо П. Основания математики. Теория доказательств. – М.: Наука, 1982. – 652с.
6. Гильберт Д., Барнайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Наука, 1982. – 556с,
7. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высш. шк, 1986. – 311с.
8. Гжегорчик А. Популярная логика. – М.: Наука, 1979. – 111с.
9. Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. – 416с.
10. Кузин Л. Т. Основа кибернетики. Т.2. Основы кибернетических моделей. – М.: Энергия, 1979. – 584с.
11. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции, – М.: Наука, 1986. – 368с.
12. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971. – 320с.
13. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 400с.
14. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – С. Пб.: Москва – Харьков – Минск, 2002. 301с.
15. Рыжов Ю. М. Сущанский В. И. Булевы алгебры. – Киев. Вища школа, 1982. – 94с.
16. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: ИА, 1957. – 536с.
17. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979. – 272с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Кузьменко В’ячеслав Віталійович
Швачич Геннадій Григорович
Рижанкова Галина Іванівна
Пасинков Володимир Миколайович

Основи дискретної математики
розділ “Елементи алгебри логіки”

Конспект лекцій

Тем. План 2004, поз.

Підписано до друку 30. 03.04. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 2,11 Умов.-друк. арк. 2, 09. Тираж 100 пр. Замовлення № .

Національна металургійна академія України
49600, Дніпропетровськ – 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно – видавничий відділ НМетАУ