МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національна металургійна академія України

РОБОЧА ПРОГРАМА

та методичні вказівки до виконання
контрольної роботи з дисципліни
“Основи математичного моделювання”
для студентів спеціальності 7.090202 -
- технологія машинобудування

Затверджено
На засіданні Вченої ради академії
Протокол №1 від 30.01.2007

Дніпропетровськ НМетАУ 2007

УДК 669.02/09:519.28

Робоча програма та методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни “Основи математичного моделювання” для студентів спеціальності 7.090202 /Укл. О.Г. Ясев, Р.В. Пась. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2007. – 32 с.

Вміщують робочу програму, конторольні питання для перевірки знань, методичні вказівки до виконання контрольної роботи та приклад її виконання.

Призначені для студентів спеціальності 7.090202 – технологія машинобудування.

Укладачі: О.Г. Ясев, канд. техн. наук, професор
Р.В. Пась, асистент
К.Г. Меженна, аспірант

Відповідальний за випуск О.Є. Проволоцький, д-р. техн. наук, професор.

Рецензент Р.П. Дідик, д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри технології гірничого машинобудування,
/Національний гірничій університет України/

Редактор О.І. Лук`янець

Підписано до друку 21.02.2000 Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік. –вид. арк. 1,58. Умов. друк. арк. 1,56. Тираж 150 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України,
49600, Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 4

1. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Підвищення вимог до якості продукції, прагнення зменшити трудомісткість і витрати на проектування (продукції і відповідних технологічних процесів її виготовлення) і виготовлення обумовлюють інтенсивний розвиток математичного моделювання як теоретичної основи автоматизованих комп'ютерних систем проектування і керування виробництвом.

У результаті вивчення дисципліни "Основи математичного моделювання" студент повинен ознайомитися з основними поняттями математичного моделювання, класифікацією моделей, послідовністю розробки моделей, особливостями методів створення і використання математичних моделей при рішенні конкретних задач технології машинобудування.

Для успішного вивчення дисципліни "Основи математичного моделювання" студент повинен мати відповідний обсяг знань з технології машинобудування, металорізальних верстатів, технологічної оснастки, різання металів. У результаті вивчення дисципліни студент повинен засвоїти, що математичне моделювання є «інструментом», який використовує технолог-машинобудівник при рішенні практичних задач проектування технологічних процесів виготовлення деталей або складання виробів.

Для спеціальності 7.090202- технологія машинобудування - дисципліна "Основи математичного моделювання" висвітлює особливості створення і використання математичних моделей і математичних методів, що застосовуються у машинобудуванні при дослідженні, розробці і керуванні технологічними процесами виготовлення деталей, складання вузлів і виробів і контролі якості.

Дисципліна "Основи математичного моделювання" вивчається студентами дистанційних форм навчання в 10 семестрі, а студентами стаціонару - у 8 семестрі. Для студентів дистанційних форм навчання передбачається читання лекцій з найбільш складних питань дисципліни, виконання практичних занять і контрольної роботи. Основною формою вивчення даної дисципліни є самостійна робота студентів з літературними джерелами.

Вивчення частин дисципліни здійснюється в послідовності, що рекомендується. Деякою допомогою у вивченні є теоретичні відомості, що роз'ясняють методику виконання контрольної роботи. Контроль якості засвоєння вивченого матеріалу виконується студентом самостійно за допомогою питань для самоперевірки.

Завдання на контрольну роботу видається індивідуально.

Контрольна робота повинна виконуватися студентами тільки після вивчення і засвоєння теоретичного курсу, а також передбачає розрахунки основних характеристик випадкових величин та побудову емпіричної математичної моделі з використанням методів математичної статистики для опрацювання експериментальних даних і містить розрахунки, що виконуються й оформляються відповідно до даних методичних вказівок.

У додатках наведено приклади завдань на контрольну роботу, а також необхідні для її виконання статистичні таблиці для критерію Фішера.

Після виконання контрольна робота захищається студентом у процесі обговорення з викладачем.

2. РОБОЧА ПРОГРАМА

Тема 1. Вступ. Основні поняття

Задача моделювання фізичних процесів і технологічних систем. Математична модель об'єкта моделювання, чутливість математичної моделі. Класифікація математичних моделей. Вимоги до математичних моделей. Достовірність результатів моделювання. Область застосування математичної моделі і результатів моделювання.

[1, С. 4-10].

Тема 2. Основні етапи розробки математичних моделей

Послідовність розробки математичних моделей. Формулювання задачі створення моделі. Формалізація об'єкта дослідження. Вибір математичного опису. Ідентифікація математичної моделі. Перевірка адекватності математичної моделі. Погрішності моделювання.

[1, С. 10-17].

Тема 3. Математичні моделі технологічних процесів

Емпіричні математичні моделі. Математичні моделі типових процесів в елементах технологічної системи. Математичні моделі процесів механічної обробки. Математичні моделі похибок при механічній обробці. Інформаційні математичні моделі.

[1, С. 33-41, С. 46-52].

Тема 4. Математичні моделі виробничих процесів

Моделювання виробничих процесів на однопредметних і багатопредметних ділянках. Моделювання виробничих процесів на одногрупових і багатогрупових потокових лініях. Моделювання перерваних процесів виготовлення деталей. Окремі випадки моделювання процесів виробництва.

[1, 2, 3, 4].

Тема 5. Методи рішення алгебраїчних рівнянь і звичайних диференціальних рівнянь

Лінійні алгебраїчні рівняння. Метод послідовних наближень. Метод Ньютона - Рафсона. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Матриці. Метод Гаусса. Ітераційні методи. Нелінійні алгебраїчні рівняння.

Лінійні диференціальні рівняння. Рішення за допомогою рядів Тейлора. Методи Рунге-Кутта. Методи прогнозу і корекції. Системи рівнянь. Нелінійні диференціальні рівняння.

[1, С. 42-52].

Тема 6. Метод найменших квадратів

Добір прямої методом найменших квадратів. Матричний підхід до лінійної регресії. Множинна регресія. Аналіз дисперсій. Нелінійне оцінювання.

[1, С. 28-32, 5-7, 9].

Тема 7. Метод кінцевих різниць

Поняття про метод кінцевих різниць. Представлення похідних за допомогою кінцевих різниць. Метод сіток. Рішення диференціальних рівнянь у частинних похідних методом кінцевих різниць.

[1, С. 43-52].

Тема 8. Елементи теорії надійності

Проблема оцінки надійності. Поняття випадкової події. Основні формули теорії можливостей. Випадкові розміри і їхні функції розподілу. Перетворення Лапласа.

Надійність елемента. Щільність розподілу часу безвідмовної роботи. Експоненціальний закон надійності. Інтенсивність відновлення. Випробування на надійність. Загальні методи оцінки показників надійності за результатами експериментів.

[1, С. 53-64].

Тема 9. Загальна характеристика систем масового обслуговування. Основні визначення теорії графів

Класифікація систем масового обслуговування і їхні основні характеристики. Системи масового обслуговування з відмовами. Системи масового обслуговування з чеканням.

Теоретико-множинне визначення графа. Відношення порядку і відношення еквівалентності на графі. Задача про найкоротший шлях. Постановка задачі. Перебування найкоротшого шляху в графі з ребрами одиничної і довільної довжини. Побудова графа найменшої довжини.

[1, С. 56-58, С.62-64], [2, 3, 4].

Тема 10. Методи оптимізації в технологічних системах

Постановка задачі оптимізації. Безумовна й умовна оптимізація. Лінійне програмування. Градієнтні методи. Нелінійне програмування.

[1, С. 65-88].

ПЕРЕЛІК КОНТРОЛЬНИХ ПИТАНЬ

1. Визначення поняття "математична модель". Класифікація моделей.
2. Основні вимоги до математичної моделі.
3. Особливості лінійних математичних моделей.
4. Планування одномірних експериментів.
5. Планування багатомірних експериментів.
6. Особливості емпіричних математичних моделей.
7. Особливості випадкових математичних моделей.
8. Основні характеристики випадкової величини і випадкового процесу.
9. Охарактеризувати похибки моделювання.
10. Визначення поняття "оптимальні режими різання".
11. Основні етапи розробки моделі.
12. Формулювання задачі оптимізації (безумовна й умовна оптимізація).
13. Методи побудови емпіричних моделей.
14. Методи рішення диференціальних рівнянь у частинних похідних.
15. Методи рішення задач оптимізації.
16. Основні показники надійності елементів технологічної системи.
17. Статистична оцінка параметрів закону розподілу випадкової величини.

3. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Складність та випадковий характер явищ, які складають основу технологічних методів обробки, обумовлюють необхідність застосування для їх опису математичного апарату випадкових величин і випадкових процесів. Більше половини математичних моделей (ММ) технології машинобудування є емпіричними ММ, тобто їх отримують в результаті обробки експериментальних даних (випадкових величин) з використанням методів математичної статистики.

Контрольна робота виконується з метою вивчення основних особливостей використання деяких методів математичної статистики для оцінки випадкових результатів технологічних методів обробки та побудови емпіричних ММ. Кожний студент одержує індивідуальне завдання (Додаток 1 або 2), що містить експериментальні дані, які характеризують результати технологічного методу та взаємозв'язок між однією зі складових сили різання і режимами різання. Ці дані встановлені в результаті спеціальних експериментальних досліджень (проведених раніше). В даному розділі методичних вказівок наведені приклади виконання основних розрахунків для аналогічних задач.

Передбачено два способи здійснення розрахунків та оформлення контрольної роботи, а саме:

- виконання усіх етапів роботи і розрахунків “вручну” (за допомогою мікрокалькуляторів);
- виконання роботи за допомогою відповідних програм персонального комп’ютера.

Вибір одного з двох способів здійснює студент за власним бажанням. В залежності від вибору він одержує різні індивідуальні завдання (дивись приклади у Додатках 1 або 2).

Контрольна робота виконується у певній послідовності, що в основному відповідає послідовності розробки математичної моделі. У пояснювальну записку повинні входити такі розділи:

1. Основні відомості з теорії ймовірностей і математичної статистики.
2. Розрахунки основних статистичних характеристик результатів технологічного методу обробки (середнє арифметичне, середнє квадратичне відхилення тощо).
3. Особливості планування експериментальних досліджень.
4. Побудова емпіричної математичної моделі для сили різання:
   4.1. Формулювання цілі створення моделі.
   4.2. Ідеалізація (спрощення) оригіналу.
   4.3. Формалізація моделі.
   4.4. Ідентифікація (визначення параметрів) моделі.
   4.5. Перевірка адекватності моделі.
5. Графічне подання результатів моделювання.
6. Висновки.

Результатом виконання контрольної роботи повинні бути статистичні характеристики технологічного методу обробки та лінійна (одномірна або багатомірна) емпірична математична модель, що подана в аналітичному й графічному (для багатомірного варіанта подаються часткові одномірні графіки) видах.

3.1. Деякі відомості з теорії ймовірностей і математичної статистики

Більшість змінних, що характеризують технологічні процеси технології машинобудування, є випадковими, хоча ступінь "випадковості" може бути різним. Наприклад, при механічній обробці різанням параметри режиму різання (глибина, подача и швидкість різання) в дуже малому ступені виявляють випадкові властивості, в той час, коли випадкові властивості сили різання виявляються більше. Загальною особливістю є те, що для вихідних змінних технологічних процесів випадкові властивості виявляються в більшій мірі, ніж для вхідних змінних. Таким чином, такі вихідні змінні як розміри, показники форми і взаємного розташування поверхонь, шорсткості, твердості і т.ін. є випадковими величинами.

Випадковою величиною називається величина визначеного фізичного змісту, значення якої схильні до деякого неконтрольованого розкиду при повтореннях даного процесу (даного експерименту). Випадкова величина неперервна, якщо область її значень неперервна, і дискретна, якщо вона може приймати лише окремі дискретні значення. Наприклад, результати вимірів різноманітних величин (розмірів, ваги, тиску і т.п.) є неперервними випадковими величинами, тому що вони можуть приймати будь-які значення з деякого діапазону. Прикладом дискретних випадкових величин можуть бути: кількість оброблених деталей, кількість робочих, верстатів, інструментів і т.д.

Генеральною сукупністю називають сукупність усіх мислимих значень, що може прийняти випадкова величина при даному комплексі реальних умов. Очевидно, що цілком охопити всю генеральну сукупність можливо лише у вкрай обмеженому числі випадків. Як правило, у силу економічних, технічних, нарешті, біологічних причин ми змушені задовольнятися тільки порівняно малою кількістю значень випадкової величини для даного сполучення умов. Якщо в такому наборі значення розташовуються випадково і незалежно, то ці значення утворюють вибірку з даної генеральної сукупності. Чим більше вибірка (обсяг вибірки), тим повніше інформація про досліджувану випадкову величину.

Комплекс умов, при якому провадиться обстеження генеральної сукупності (експеримент), характеризується вхідними змінними (факторами, незалежними змінними). Ступінь їх впливу (кореляції) на вихідні змінні можливо оцінiти за результатами попередніх досліджень. Виконання контрольної роботи перебачає одномірний (одна вхідна або незалежна змінна, фактор і одна вихідна або залежна змінна) та багатомірний (декілька вхідних змінних та одна вихідна змінна) варіанти залежностей. Передбачається, що виділені фактори мають переважний вплив на хід досліджуваного процесу, який описується залежною змінною. До всіх змінних подається вимога стійкого контролювання і вимірності, а до незалежних змінних - у деяких випадках і вимога керованості.

Подання вихідних змінних оригіналів у вигляді випадкових величин дозволяє оцінювати їх властивості та вирішувати багато практичних задач. Для подання зміни випадкових властивостей оригіналів у часі використовуються випадкові процеси. Можна вважати, что випадкова величина є "моментальним" проявом випадкового процесу в визначений фіксований момент (τ_i) часу (рис.3.1), а випадковий процес описує зміну характеристик випадкової величини у часі. Одиничне значення випадкової величини називається реалізацією. Послідовні (в часі) реалізації випадкової величини утворюють реалізації випадкового процесу.

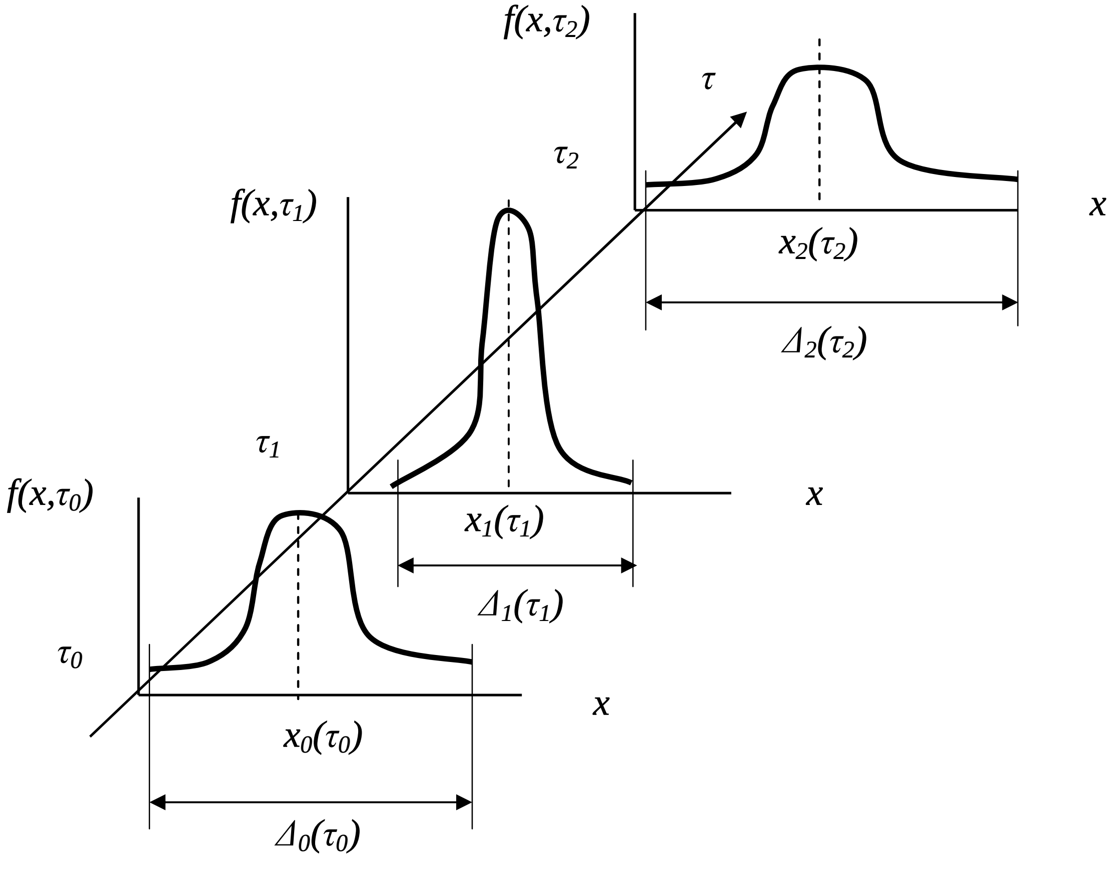


Рис. 3.1. Випадковий процес (гауссовський) і випадкові величини:
$x_i(\tau_i)$ - математичне очікування;
$\Delta_i(\tau_i)$ - поле розсіювання;
$f(x,\tau_i)$ - функція щільності розподілу

Для одержання інформації, яка потрібна для застосування методів математичної статистики, проводять спеціальні експериментальні дослідження [1, 5-9]. Особливості планування та проведення експериментів залежать від мети створення ММ та кількості незалежних змінних, які включають до моделі.

3.2. Основні характеристики випадкової величини

Основні характеристики випадкових величин и процесів мають для инженера-механіка важливий прикладний зміст.

1. Розмах (3.1) визначається різницею найбільшого та найменшого значень випадкової величини у виборці

$$R = x_{max} - x_{min} \,. \tag{3.1}$$

Величина розмаху може бути попередньою оцінкою ступеня розсіювання значень випадкової величини. При обробці статистичних даних діапазон, що відповідає розмаху, ділять на інтервали (зазвичай однакові).

2. Частота (3.2), яка є попередньою оцінкою імовірності появи деякої реалізації випадкової величини, визначається відношенням кількості (m_i) реалізацій, що потрапили в i-тий інтервал розмаху, до загальної кількості (n) досліджених реалізацій

$$n_i = \frac{m_i}{n}. \tag{3.2}$$

3. Середнє арифметичне значення (оцінка математичного очікування) характеризує положення реалізацій, які зустрічаються найчастіше (центр групування). Величина середнього арифметичного (3.3) значення залежить від об’єму вибірки:

$$\breve{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{3.3}$$

4. Середнє квадратичне відхилення (3.4) характеризує ступінь розсіювання (розкид) реалізацій випадкової величини відносно центра групування. Величина середнього квадратичного відхилення (також залежить від об’єму вибірки) розраховується за формулою

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \ . \tag{3.4}$$

Чим менше середнє квадратичне відхилення, тим менше розсіювання реалізацій випадкової величини (рис. 3.2).

5. Найбільш повною характеристикою випадкової величини є закон розподілу імовірностей (або функція розподілу імовірностей), який характеризує імовірність появи визначених реалізацій випадкової величини, а саме, менших за величиною заданого значення *x*

$$F(x) = P(x_i \le x). \tag{3.5}$$

6. Функція щільності розподілу *f(x)* однозначно пов'язана з функцією розподілу імовірностей і використовується для розрахунку величини останньої

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ . \tag{3.6}$$

Для нормального закону розподілу імовірностей (закона Гаусса) функція щільності розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}} \tag{3.7}$$

Вигляд кривої щільності розподілу для багатьох законів розподілу імовірностей залежить (головним чином) від двох основних характеристик випадкової величини: середнього арифметичного значення та середнього квадратичного відхилення (рис. 3.2).

7. Зв'язок між двома величинами може бути відсутнім або бути чисто функціональним. Однак випадковий характер реальних процесів у машинобудуванні призводить до виникнення зв'язків проміжного вигляду, так званих кореляційних зв'язків. Як критерій такого зв'язку часто використовується коефіцієнт парної кореляції k_{xy} (пари утворюють кожна вхідна змінна з вихідною змінною).

Коефіцієнт парної кореляції, який розраховується (3.8) за експериментальними даними, може приймати значення в діапазоні ($-1 \le k_{xy} \le 1$).

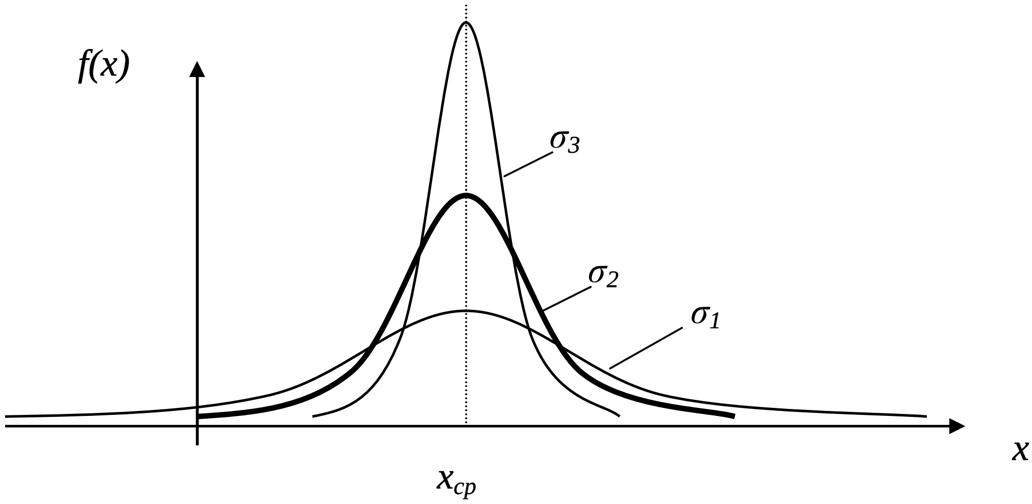


Рис. 3.2. Вигляд функції щільності для нормального закону розподілу імовірностей при однакових середніх арифметичних значеннях (x_{cp}) і різних середніх квадратичних відхиленнях ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

"Сила" (інтенсивність) кореляційного зв'язку тим більша, чим більша абсолютна величина коефіцієнта кореляції. При однозначному функціональному зв'язку між змінними коефіцієнт кореляції приймає значення "-1" або "1", при відсутності зв'язку - "0".

Вважається, якщо значення коефіцієнта кореляції знаходяться у діапазоні від 0,7 до 1,0, то зв'язок між змінними є сильним, а якщо коефіцієнт кореляції менше 0,3, то зв'язок дуже слабкий і його можна не враховувати.

Знак коефіцієнта парної кореляції вказує на вигляд залежності, а саме:

- якщо $k_{xy} > 0$, то зі збільшенням значення вхідної змінної вихідна змінна також збільшується;
- якщо $k_{xy} < 0$, то зі збільшенням значення вхідної змінної вихідна змінна зменшується

$$k_{xy} = \frac{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}\,; \qquad (3.8)$$

Загальною особливістю статистичних характеристик є залежність їх значень від кількості (об'єму вибірки) і властивостей (наприклад, однорідність і випадковість) експериментальних даних, які використані для їх розрахунку. Для урахування цієї особливості використовують додаткові характеристики (рівень значущості та довірчі інтервали), а також специфічні засоби перевірки достовірності запропонованих висновків (гіпотез), які формулюються при статистичних дослідженнях.

Рівень значущості характеризує імовірність виникнення помилки, яка складається у відхиленні правильної гіпотези (так звана помилка першого роду). В технічних додатках широко застосовується рівень значущості 5% (це означає, що в 5 випадках зі 100 правильна гіпотеза помилково може бути відкинута).

Довірчі інтервали характеризують точність визначення наближених оцінок показників (наприклад, середнього арифметичного значення, середнього квадратичного відхилення, коефіцієнта регресії и т.д.), розрахованих за обмеженою вибіркою експериментальних даних. Довірчий інтервал будується поблизу середнього значення показника з урахуванням рівня значущості та імовірно містить "істине" значення показника, яке можна було б визначити при використанні для розрахунку генеральної сукупності даних. Чим менше довжина довірчого інтервалу, тим точніше оцінка показника.

Загальна схема перевірки достовірності гіпотез передбачає [5-9]:

- вибір критерію для перевірки визначеної гіпотези;
- розрахунок величини критерію за експериментальними даними;
- порівняння розрахункової величини критерію з допустимою (табличною) величиною, що залежить від умов проведення експериментів і обраного рівня значущості.

В залежності від результату порівняння формулюється висновок з урахуванням прийнятого рівня значущості, тобто відкидається або не відкидається висунута гіпотеза.

Наприклад, перевірка гіпотези щодо адекватності ММ (яка має g

коефіцієнтів, які оцінюються) здійснюється за допомогою критерію Фішера, який розраховується (за *n* експериментальними даними) за формулою [7-9]

$$F_p = \frac{k_{xy}^2}{\left(1-k_{xy}^2\right)} \cdot \frac{n-g}{g-1}, \tag{3.9}$$

де k_{xy} - коефіцієнт кореляції (для одномірної ММ розраховується за формулою (3.8), а для багатомірної ММ в розрахунках за формулою (3.9) використовують коефіцієнт детермінованості). Розрахований критерій Фішера порівнюється з табличною величиною критерію $F_т(g\text{-}1,\ n\text{-}g)$. Якщо розрахована величина більше табличної, то гіпотеза не відхиляється.

3.3. Деякі відомості з регресійного аналізу

Для побудови емпіричних ММ використовують методи регресійного аналізу [7-9], котрі дозволяють розрахувати (за експериментальними даними) коефіцієнти рівняння регресії (тобто ММ), яке з найменшою помилкою відповідає цим експериментальним даним. Широко використовують лінійні одномірні (3.10) та багатомірні (3.11) рівняння регресії:

$$Y = a + b \cdot X. \tag{3.10}$$

$$Y = a + b \cdot X_1 + c \cdot X_2 + d \cdot X_3 + \ldots\ldots\ldots \tag{3.11}$$

Для розрахунків коефіцієнтів лінійного одномірного рівняння регресії (3.10) використовують формули (3.12) і (3.13), що одержані після перетворень відповідними методами регресійного аналізу [1, 7-9], наприклад, методом найменших квадратів:

$$a = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - b\sum_{i=1}^{n} X_i\right); \tag{3.12}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{Y_i} \cdot X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{Y_i} \sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \tag{3.13}$$

Аналогічні розрахунки для багатомірних (3.11) лінійних (або нелінійних) регресійних моделей здійснюють за допомогою програм для комп'ютерів, оскільки "ручні" розрахунки коефіцієнтів регресії є трудомісткими.

Таким чином, методи регресійного аналізу використовуються під час ідентифікації параметрів емпіричної ММ (розділ 3.5).

Для реалізації методів регресійного аналізу (наприклад, методу найменших квадратів) треба мати необхідний обсяг експериментальних даних, які забезпечують певний рівень достовірності. Дані одержують під час проведення експериментів, які спеціально планують. Відомими є такі рекомендації:

- для одномірного експерименту слід провести дослідження не менш ніж при трьох значеннях незалежної змінної та трьох повтореннях кожного, тобто мінімальна кількість експериментів складає дев'ять;

- для багатомірного експерименту слід керуватися правилами теорії планування експериментів [1, 9], які встановлюють, що кількість експериментів залежить від кількості незалежних змінних (з урахуванням необхідного дублювання). Наприклад, при трьох незалежних (вхідних) змінних кількість основних експериментів складає вісім (за схемою повного факторного експерименту), а з урахуванням повторних експериментів - двадцять чотири.

3.4. Приклади розрахунків основних характеристик випадкових величин

1. Описати технічний зміст та розрахувати значення основних характеристик випадкових величин для значень кількості циклів навантаження після механічної обробки, які отримано вимірюваннями (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1

Випадкова величина	Результати вимірювання					
	1	2	3	4	5	6
Логарифм кількості циклів навантаження	6,85	6,80	7,02	6,91	7,12	6,91

1. Розмах розраховується за формулою (3.1) і визначає величину діапазону розкиду реалізацій випадкової величини.

$$R = 7{,}12 - 6{,}80 = 0{,}32 \ .$$

Величина розмаху характеризує стабільність очікуваних значень. Чим меншим є розмах, тим більш передбачуваними будуть реалізації випадкової величини.

2. Частота розраховується для кожного інтервалу за формулою (3.2), для чого весь діапазон значень розділяють на три рівних інтервали та підраховують кількість реалізацій, які потрапили до кожного з інтервалів.

Частота є приблизною оцінкою імовірності виникнення реалізації випадкової величини у виділеному діапазоні значень.

Результат зручно подати у вигляді таблиці.

Таблиця 3.2

Інтервал		Кількість реалізацій	Частота
I	6,80 -6,90	2	0,333333
II	6,91 -7,01	2	0,333333
III	7,01 -7,12	2	0,333333

3. Середнє арифметичне значення визначає значення (центр), біля якого групуються усі інші реалізації випадкової величини.

Для даного прикладу середнє арифметичне значення визначається за формулою (3.3)

$$\hat{x} = \frac{1}{6}\left(6.85 + 6.8 + 7.02 + 6.91 + 7.12 + 6.91\right) = 6.935 \ .$$

4. Середньоквадратичне відхилення характеризує розподіл випадкових

величин відносно середнього арифметичного значення.

У даному прикладі розрахунок за формулою (3.4) дає величину

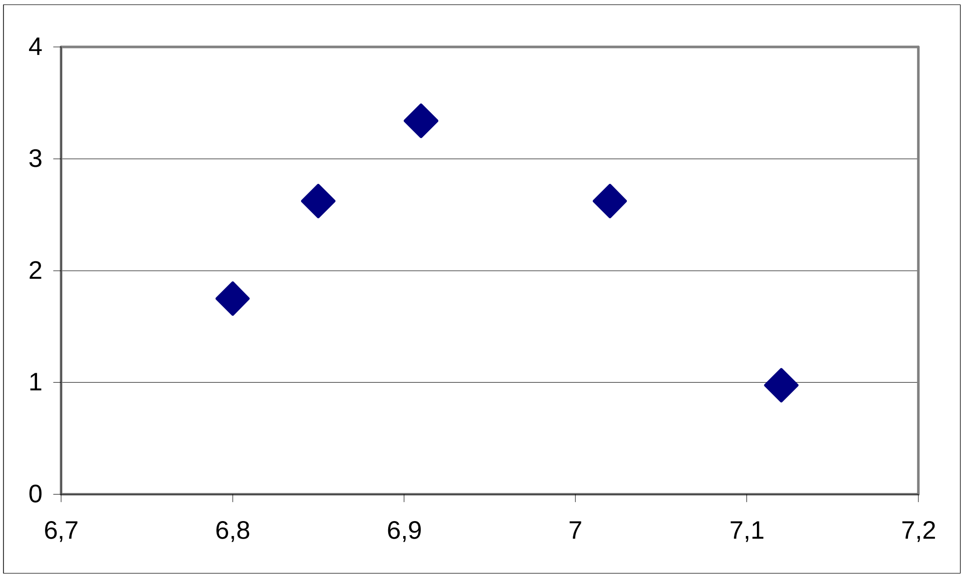
$$\hat{s}=\sqrt{\frac{1}{6-1}\left[(6{,}85-6{,}935)^2+(6{,}8-6{,}935)^2+(7{,}02-6{,}935)^2+(6{,}91-6{,}935)^2+(7{,}12-6{,}935)^2+(6{,}91-6{,}935)^2\right]}=0.1167$$

5. Функція щільності розподілу характеризує розподіл значень випадкової величини у межах усього діапазону зміни (у межах розмаху).

Для даного прикладу більшим значенням функції щільності розподілу (які розраховано за формулою (3.7) та наведено у таблиці) відповідає більша кількість реалізацій випадкової величини (див. рисунок) поблизу середнього арифметичного значення.

Таблиця значень функції щільності розподілу.

X	*f(x)*
6,85	2,621541
6,8	1,751094
6,91	3,33968
7,02	2,621541
6,91	3,33968
7,12	0,973653



3.5. Приклади побудови емпіричних ММ

3.5.1. Розглянемо особливості застосування загальної схеми створення ММ для розробки одномірної емпіричної ММ за допомогою “ручних” розрахунків:

1. Формулювання мети створення ММ.

Побудувати лінійну ММ, яка описує вплив величини експлуатаційного навантаження на довговічність зразка (кількість циклів навантаження).

Враховуючи, що ММ одномірна, проведено по шість експериментів при чотирьох значеннях вхідної змінної (величини експлуатаційного навантаження). Відповідні результати експериментів наведені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3

Результати експериментів

№№ дослі-дів	Логарифм величини експлуатацій-ного наванта-ження, *x*	Логарифм кількості циклів навантаження, *Y*							СКВ
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_{cp}	
1	1,28	6,85	6,80	7,02	6,91	7,12	6,91	6,94	0,116748
2	1,3	6,60	6,40	6,52	6,64	6,62	6,71	6,58	0,108151
3	1,4	5,32	5,78	5,39	5,53	5,52	5,60	5,52	0,161823
4	1,48	4,78	4,68	4,73	4,78	4,86	4,65	4,75	0,076333

2. Ідеалізація оригіналу.

Ступінь впливу незалежної змінної на залежну оцінімо за допомогою коефіцієнта парної кореляції (3.8). Для розрахунку його величини необхідно попередньо знайти величини середні арифметичні (3.3) та середньоквадратичні відхилення (3.4) для незалежної і залежної змінних:

$$\hat{x} = \frac{1.28 + 1.3 + 1.4 + 1.48}{4} = 1.365; \qquad s_x = \sqrt{\frac{1}{4-1}\sum_{i=1}^{4}\left(x_i - \hat{x}\right)^2} = 0{,}0929;$$

$$\hat{y} = \frac{6.85 + 6.6 + 5.32 + 4.78}{4} = 5.95; \qquad s_y = \sqrt{\frac{1}{4-1}\sum_{i=1}^{4}\left(y_i - \hat{y}\right)^2} = 0{,}9999.$$

$$k_{xy} = \frac{\frac{1}{3}\left[(1.28-1.365)\cdot(6.91-5.95)+(1.3-1.365)\cdot(6.71-5.95)\right]}{0.0929\cdot 0.9999}+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left[(1.4-1.365)\cdot(5.6-5.95)+(1.48-1.365)\cdot(5.65-5.95)\right]}{0.0929\cdot 0.9999} = -0.9978.$$

Коефіцієнт парної кореляції (3.8) довговічності зразка і кількості циклів навантаження має велике значення, що свідчить про наявність сильного зв'язку між змінними. Від'ємність величини коефіцієнта кореляції вказує, що із збільшенням незалежної (вхідної) змінної залежна (вихідна) змінна зменшується.

Величина коефіцієнта кореляції підтверджує, що при моделюванні можна розглядати тільки одну вхідну та вихідну змінні, тобто одномірну ММ довговічності зразка від величини експлуатаційного навантаження.

3. <u>Формалізація (вибір загального виду математичного опису)</u>.

В якості математичного опису приймаємо лінійний вираз (a і b - коефіцієнти рівняння) виду

$$Y = a + b \cdot X .$$

4. <u>Ідентифікація параметрів ММ</u>.

Для визначення параметрів (a і b) застосуємо метод найменших квадратів. Для спрощення розрахунків використовуємо часткові середні арифметичні значення вихідної змінної (таблиця 3.3)

$$Y_{cp} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} Y_i .$$

Величини часткових середніх квадратичних відхилень (СКВ) також наведені у таблиці 3.3

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}\left(Y_i - Y_{cp}\right)^2} .$$

Значення параметрів (a і b) розраховані за формулами (3.12) і (3.13):

$$b=\frac{(6{,}94\cdot 1{,}28+6{,}58\cdot 1.3+5{,}52\cdot 1.4+4{,}75\cdot 1{,}48)-\frac{1}{4}(6{,}94+6{,}58+5{,}52+4{,}75)\cdot(1{,}28+1{,}3+1.4+1.48)}{(1.28^2+1{,}3^2+1{,}4^2+1{,}48^2)-\frac{1}{4}(1{,}28+1{,}3+1{,}4+1{,}48)^2}=-10{,}7375$$

$$a=\frac{1}{4}\left[(6{,}85+6{,}6+5{,}32+4{,}78)+10{,}7375\cdot(1{,}28+1{,}3+1{,}4+1{,}48)\right]=20{,}6033.$$

Лінійна емпірична ММ (рівняння регресії) має вид:

$$\boldsymbol{Y=20{,}6033-10{,}7375\cdot X.}$$

5. <u>Перевірка адекватності ММ</u>.

Розрахункова величина (3.9) критерію Фішера

$$F_p=\frac{(-0{,}9978)^2}{\left(1-\left(-0{,}9978^2\right)\right)}\cdot\frac{4-2}{2-1}=454{,}0345\,.$$

Величина критерію Фішера ($F_р$=454,0345) дозволяє порівняти ступені розсіювання експериментальних даних відносно середніх значень і рівняння регресії, більше критичного табличного значення [5] F(1; 2)=18,51 (при рівні значущості 0,05), що свідчить про адекватність ММ.

3.5.2. Розглянемо приклад побудови багатомірної лінійної емпіричної ММ за допомогою програмного забезпечення сучасного персонального комп’ютера (на прикладі програми **EXCEL**).

1. <u>Формулювання мети створення ММ</u>.

Побудувати лінійну ММ, яка описує вплив трьох величин експлуатаційних навантажень (X_1 , X_2 , X_3) на довговічність зразка (кількість циклів навантаження).

Враховуючи, що ММ багатомірна, проведено по шість експериментів при восьми сполученнях значень вхідних змінних (величин експлуатаційних навантажень) відповідно до схеми повного факторного експерименту для трьох факторів. Відповідні результати експериментів наведені в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Результати експериментів

№№ дослідів	Логарифми величин експлуатаційних навантажень			Логарифм кількості циклів навантаження, Y						
	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	$Y_{ср}$
1	1,28	2,5	1,5	6,905	6,915	6,925	6,945	6,955	6,965	6,935
2	1,28	2,5	1,8	6,084	6,094	6,104	6,124	6,134	6,144	6,114
3	1,28	4,0	1,5	5,839	5,849	5,859	5,879	5,889	5,899	5,869
4	1,28	4,0	1,8	5,202	5,212	5,222	5,242	5,252	5,262	5,232
5	1,48	2,5	1,5	5,548	5,558	5,568	5,588	5,598	5,608	5,578
6	1,48	2,5	1,8	5,123	5,133	5,143	5,163	5,173	5,183	5,153
7	1,48	4,0	1,5	4,826	4,836	4,846	4,866	4,876	4,886	4,856
8	1,48	4,0	1,8	4,717	4,727	4,737	4,757	4,767	4,777	4,747

2. Ідеалізація оригіналу.

Ступінь впливу незалежних змінних на залежну (для часткових середніх $Y_{ср}$) оцінимо коефіцієнтами парної кореляції, величини яких розраховано за допомогою функції **КОРРЕЛ**(...). Результати наведено в таблиці 3.5.

Таблиця 3.5

Коефіцієнти парної кореляції

	X_1	X_2	X_3
k_{xy}	-0,699	-0,564	-0,365

Величини коефіцієнтів парної кореляції вказують на найбільш впливові незалежні змінні (а саме, першу змінну). Від'ємність величин коефіцієнтів кореляції вказує, що зі збільшенням незалежних (вхідних) змінних залежна (вихідна) змінна зменшується.

Додатково розраховано за допомогою функції **ЛИНЕЙН**(...) величину коефіцієнта детермінації, який дозволяє оцінити правильність включення до ММ певного набору факторів.

Величина коефіцієнта детермінації (0,93978) підтверджує, що при моделюванні можна розглядати три вхідні та вихідну змінні, тобто багатомірну ММ.

3. Формалізація (вибір загального виду математичного опису).

В якості математичного опису приймаємо лінійний вираз (a, b, c, d - коефіцієнти рівняння) виду:

$$Y = a + b \cdot X_1 + c \cdot X_2 + d \cdot X_3.$$

4. Ідентифікація параметрів ММ.

Для визначення параметрів (a, b, c, d) застосуємо багатомірний варіант методу найменших квадратів, який реалізовано функцією **ЛИНЕЙН**(...). Для спрощення розрахунків використовуємо часткові середні арифметичні значення вихідної змінної (таблиця 3.4).

Лінійна емпірична ММ (рівняння регресії) має вид:

$$\mathbf{Y=16,5483 - 4,77 \cdot X_1 - 0,513 \cdot X_2 - 1,66 \cdot X_3.} \qquad (3.14)$$

5. Перевірка адекватності ММ.

Розрахункова величина (розрахунок передбачено функцією **ЛИНЕЙН**(...)) критерію Фішера дорівнює $F_р$=20,8086, більше критичного табличного значення [5] F(3; 4)=6,59 (при рівні значущості 0,05), що свідчить про адекватність ММ.

3.6. Графічне подання результатів моделювання

Для наочного подання результатів моделювання варто побудувати графік отриманої залежності і нанести на нього значення, що характеризують експериментальні дані. Для умов прикладу, що розглядається у методичних вказівках, такий графік показаний на рис. 3.3.

По горизонтальній осі нанесені значення незалежної змінної, а по вертикальній - значення залежної змінної (у контрольній роботі це глибина різання і сила різання відповідно). Масштаб, а також початкові і кінцеві значення змінних вибираються так, щоб забезпечувалася наочність зображення. Для побудови використовуються вибіркові середні (характеризують експериментальні дані) і результати розрахунку за допомогою побудованої математичної моделі при однакових значеннях незалежних змінних. Точки, що відповідають математичної моделі, з'єднуються суцільною лінією, а експериментальні значення виділяються, наприклад, затемненими кружками.

Взаємне розташування експериментальних і розрахункових даних характеризує якість побудованої математичної моделі. Зокрема, експериментальні точки повинні розташовуватися з обох сторін від графіка приблизно в однаковій кількості. Чим ближче розташовуються експериментальні і розрахункові точки, тим краще відповідає математична модель оригіналу.

Для побудови графіків часткових залежностей для багатомірної емпіричної ММ доцільно використовувати інструменти програми **EXCEL** (а саме, мастер діаграм). Часткова залежність може бути отримана з багатомірної ММ (3.11), якщо зафіксувати усі змінні (кожну на своєму значенні, наприклад, на мінімальному), окрім однієї, та перерахувати значення вільного члена. Наприклад, для багатомірної ММ, яка має вид (3.14), часткові залежності мають вид:

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{12{,}7766 - 4{,}77} \cdot \boldsymbol{X_1},$$

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{7{,}95267 - 0{,}513} \cdot \boldsymbol{X_2}.$$

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{9{,}1601 - 1{,}66} \cdot \boldsymbol{X_3}.$$

Графічне подання цих залежностей наведено (усі три залежності суміщено на одному графіку) на рис. 3.4.

Кут нахилу прямих характеризує ступінь впливу кожної вхідної змінної на вихідну змінну (за умови, що діапазони зміни незалежних змінних встановлені порівнянними). Для графіків на рис. 3.4 таке порівняння не зроблено, тому є певна їх невідповідність з величинами коефіцієнтів кореляції.

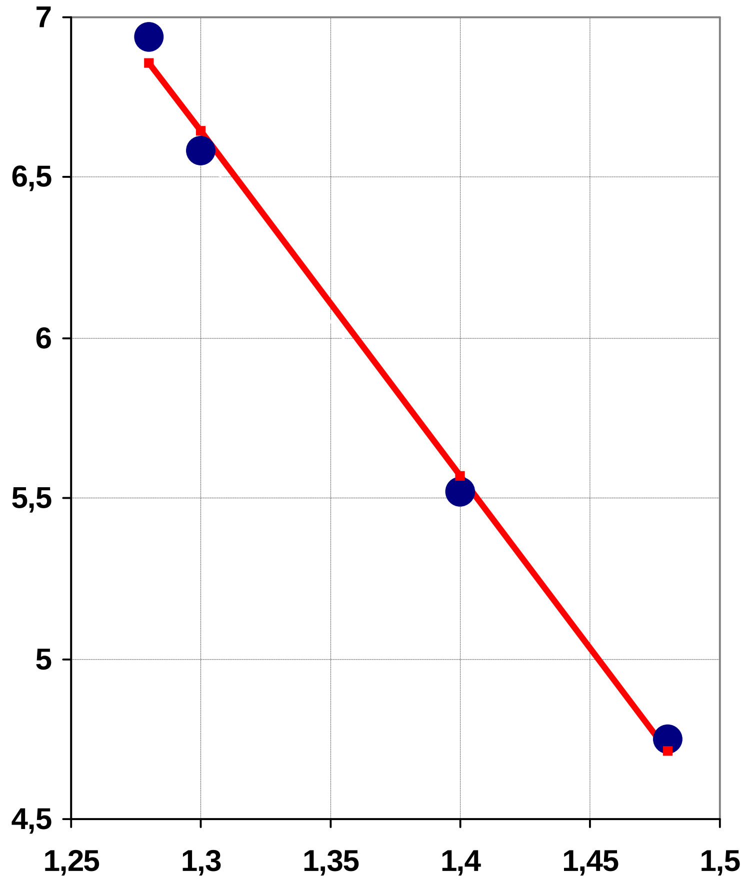


Рис. 3.3. Графічне подання результатів моделювання (одномірна ММ)

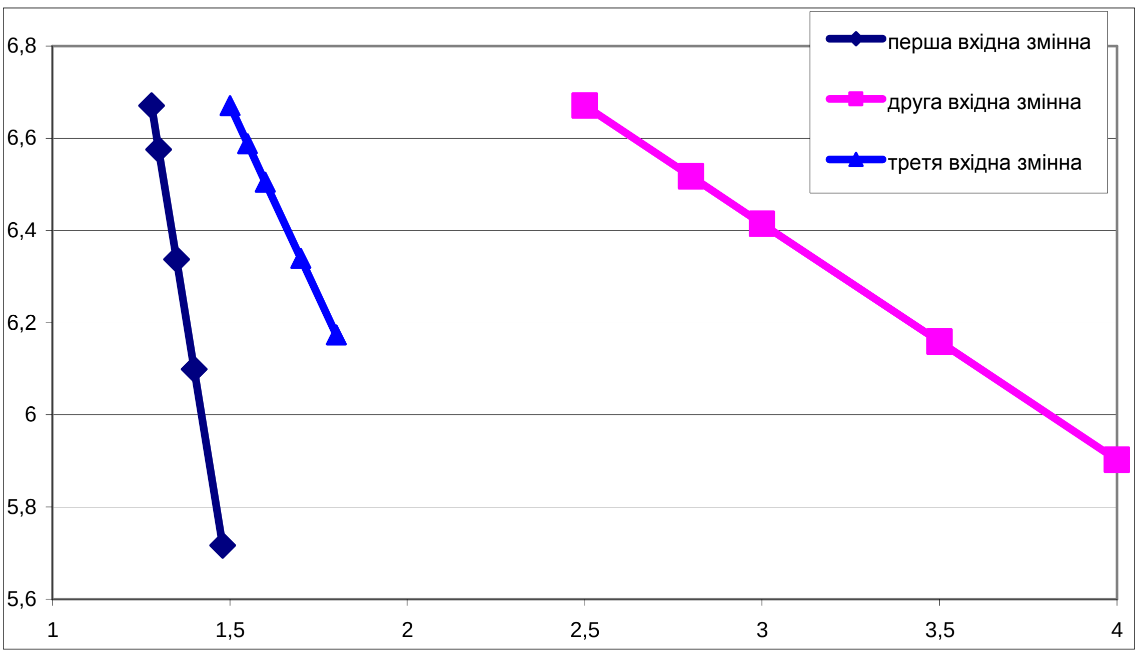


Рис. 3.4. Графічне подання результатів моделювання (багатомірна ММ)

ЛІТЕРАТУРА

1. Ясев А.Г. Основы математического моделирования: Конспект лекций. - Днепропетровск: НМетАУ, - 2004. – 94 с.
2. Основы моделирования сложных систем /Под общ. ред. И.В.Кузьмина. - Киев: Высшая школа, 1981. -360 с.
3. Математическое моделирование /В.И. Скурихин, В.В. Шифрин, В.В. Дубровский. - Киев : Техніка, 1983. -270 с.
4. Парамонов Ф.И. Моделирование процессов производства. -М.: Машиностроение, 1984. -232 с.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
6. Айвазян С.А. Статистическое исследование зависимостей. – М.: Металлургия, 1968. – 277 с.
7. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Статистика, 1973. – 392 с.
8. Хютсон А. Дисперсионный анализ. – М.: Статистика, 1971. – 88 с.
9. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976. –279 с.

Додаток 1

Розрахунки "вручну"

Приклад

Завдання N _____

на контрольну роботу з дисципліни

"Основи математичного моделювання"

1. Описати технічний зміст та розрахувати значення основних характеристик випадкових величин для значень діаметрів валів після механічної обробки, які отримано вимірюваннями (табл. Д.1.1).

Таблиця Д.1.1

Параметр, що контролюється	Результати вимірювання					
	1	2	3	4	5	6
Діаметр, мм	35,03	35,07	35,05	34,95	34,97	34,93

2. Розрахувати параметри емпіричної математичної моделі, використовуючи методи математичної статистики для опрацювання експериментальних даних (табл. Д.1.2), що характеризують залежність між складовою сили різання (залежна змінна) і глибиною різання (незалежна змінна).

Таблиця Д.1.2

№ п/п	Незалежна змінна t, мм	Експериментальні дані – залежна змінна, Н					
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	0,6	276	271	273	276	279	270
2	1,2	351	360	350	353	352	358
3	1,4	460	453	455	461	458	462
4	2,4	492	490	501	493	491	500

Одержати лінійну математичну модель виду: $\boldsymbol{P = a + b \cdot t}$.

Додаток 2

Розрахунки за допомогою комп’ютерних програм

Приклад

Завдання N _____

на контрольну роботу з дисципліни

"Основи математичного моделювання"

1. Описати технічний зміст та розрахувати значення основних характеристик випадкових величин для значень діаметрів валів після механічної обробки, які отримано вимірюваннями (табл. Д.2.1).

Таблиця Д.2.1

Параметр, що контролюється	Результати вимірювання					
	1	2	3	4	5	6
Діаметр, мм	35,03	35,07	35,05	34,95	34,97	34,93

2. Розрахувати параметри емпіричної математичної моделі, використовуючи методи математичної статистики для опрацювання експериментальних даних (табл. Д.2.2), що характеризують залежність між складовою сили різання (залежна змінна) і режимами різання (незалежні змінні).

Таблиця Д.2.2

№ п/п	Незалежні змінні			Експериментальні дані – залежна змінна, Н					
	***t*,** мм	***s***, мм/об	***V***, м/мин	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	2,4	0,5	200	276	271	273	276	279	270
2	2,4	0,5	100	351	360	350	353	352	358
3	2,4	0,1	200	460	453	455	461	458	462
4	2,4	0,1	100	492	490	501	493	491	500
5	0,6	0,5	200	176	171	173	176	179	170
6	0,6	0,5	100	251	260	250	253	252	258
7	0,6	0,1	200	360	353	355	361	358	362
8	0,6	0,1	100	392	390	201	393	391	400

Одержати лінійну математичну модель виду: $\boldsymbol{P = a + b \cdot t + c \cdot s + d \cdot v.}$

Додаток 3

Значення розподілу Фішера $F_т(g\text{-}1, n\text{-}g)$

n-g	*g*-1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21

ЗМІСТ

Підписано до друку 09.01.07. Формат 60х84 $_{1/16.}$ Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 1,88. Умов. друк. арк. 1,86. Тираж 150 пр. Замовлення № 2.

Національна металургійна академія України
49600, Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ