МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

В.Л. КОПОРУЛІН, І.В. ЩЕРБИНА,
І.В. ПАСІЧНИК, Т.П. БАС

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 5
Навчальний посібник

Друкується за Планом видань навчальної та методичної літератури,
затвердженим Вченою радою НМетАУ
Протокол № від

Дніпропетровськ НМетАУ 2016

УДК 517(07)
Вища математика. Частина 5: Навч. посібник / В.Л. Копорулін, І.В. Щербина, І.В. Пасічник, Т.П. Бас. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2016. – 62 с.

Наведені докладні теоретичні відомості до вивчення розділу «Диференціальні рівняння». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів зі спеціальності 136 – «Металургія» (за спеціалізаціями «Ливарне виробництво чорних і кольорових металів і сплавів» та «Литво (за видами)»)

Іл. 8. Бібліогр.: 4 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд.тех.наук, доц.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (ДВНЗ НГУ)
А.В. Сясєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ЗМІСТ

ВСТУП

Оновлення програми для студентів зі спеціальності 131 – «Металургія» (за спеціалізаціями «Ливарне виробництво чорних і кольорових металів і сплавів» та «Литво (за видами)») і особливо, зменшення часів аудиторних занять передбачає новий підхід до викладання матеріалу з дисципліни "Вища математика".

У п'ятій частині навчального посібника викладено матеріал розділу вищої математики: "Диференціальні рівняння першого порядку". Основні теоретичні положення, формули та теореми ілюструються докладним розв'язанням великої кількості задач різного ступеня складності з їх повним аналізом. Для ефективності засвоєння матеріалу пропонуються завдання для самостійної роботи.

Посібник складено згідно з робочою програмою дисципліни, матеріал подається у звичній для студентів формі – спочатку теорія, а потім практичні завдання. Кожна частина посібника відповідає матеріалу дисципліни однієї чверті аудиторних занять, що робить посібник більш зручним у використанні.

Автори посібника сподіваються, що ця робота буде корисною для кожного студента

ЛЕКЦІЯ 17. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ: ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ. ЗАДАЧІ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

17.1. Загальні відомості про диференціальні рівняння

При дослідженні різноманітних фізичних явищ, технологічних процесів у багатьох галузях науки і техніки, а також деяких процесів, які виникають в екології, економіці та соціальних науках, часто не вдається безпосередньо знайти закон, що зв’язує величини, які характеризують певний процес чи явище. Натомість у багатьох випадках достатньо легко виявити функціональні залежності між визначальними характеристиками процесу (функціями) та швидкостями їх зміни, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та їх похідні або диференціали.

Рівняння, що пов’язують незалежні змінні, невідому функцію цих змінних і похідні (або диференціали) цієї функції, називаються ***диференціальними***.

Якщо невідома функція залежить від однієї змінної, то рівняння називається ***звичайним***, якщо незалежних змінних дві або більше – ***рівнянням*** із ***частинними похідними***.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної чи диференціала, що входить в рівняння.

Приклад 17.1. Диференціальними є такі рівняння:

а) $xy' + 2\ln xy + 7 = 0$, б) $x^2 dy + y dx = 0$,

в) $y'' + y' tg y = 0$, г) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

А саме, рівняння а), б) є звичайними диференціальними рівняннями першого порядку, рівняння в) – звичайне другого порядку. Рівняння г), де x, y – незалежні змінні, $z = f(x, y)$ – невідома функція двох змінних, a – константа, – рівняння з частинними похідними другого порядку.

Надалі розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння, причому як незалежну змінну, так і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Нагадаємо, що задача диференціального числення полягає в тому, щоб за заданою функцією знайти її похідну. Натомість зворотна задача, яка розглядається вже в інтегральному численні, має таке формулювання: дана функція $f(x)$, знайти її первісну. Така задача може бути записана у формі рівняння:

$$y' = f(x). \tag{17.1}$$

Отже, маємо найпростіше диференціальне рівняння, розв'язок якого відомий з інтегрального числення:

$$y = \int f(x)dx + C. \tag{17.2}$$

Згідно з формулою (17.2) диференціальне рівняння може мати безліч розв'язків, кожний з яких можна одержати, якщо довільний сталій C надати певне числове значення.

Таким чином, предметом теорії диференціальних рівнянь є розробка методів їх інтегрування і дослідження властивостей одержаних розв'язків.

17.2. Задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння, одержане у процесі дослідження фізичного явища або процесу, називають диференціальною моделлю цього явища або процесу. Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища, дають можливість встановити якісні і кількісні характеристики їх станів. Використання цих моделей дає можливість описати динаміку розвитку процесу, а також передбачити його подальший розвиток.

У процесі побудови диференціальних рівнянь важливе значення має знання законів тієї області науки, з якою пов'язана природа задачі. Наприклад, у механіці це може бути другий закон Ньютона ($F = ma$, де m – маса тіла, a – прискорення руху, F – сума сил, що діють на тіло); у електротехніці – закон Кірхгофа (алгебраїчна сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю); у хімії – закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу) тощо.

Розглянемо декілька прикладних задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

Задача 1. Відомо, що швидкість розпаду радію прямо пропорційна його кількості. Знайти закон зміни маси речовини від часу, якщо q_0 – кількість радію в момент часу $t = t_0$.

Розв'язання. Нехай $q(t)$ – кількість радію в момент часу t. Швидкість розпаду радію, як швидкість зміни функції, це похідна від цієї функції. Отже, закон розпаду можна записати так:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -kq(t), \tag{17.3}$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус означає, що маса радію з часом зменшується. Задача полягає в знаходженні функції $q(t)$, яка є розв'язком рівняння (17.3) і задовольняє умові $q(t_0) = q_0$.

Задача 2. Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища. Знайти закон залежності температури тіла від часу.

Розв'язання. Нехай в момент часу t температура тіла дорівнює $T(t)$. Припустимо, що нагріте до температури T_0 тіло помістили в середовище, температура якого стала і дорівнює $T_1 (T_0 > T_1)$. За умовою

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1), \tag{17.4}$$

де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності, $T(0) = T_0$. Рівняння (17.4) описує закон охолодження тіла в залежності від часу та температури навколишнього середовища.

Задача 3. Визначити диференціальну модель задачі, яка дозволяє знайти форму дзеркала, що збирає спрямований на нього потік паралельних променів в одну точку.

Розв'язання. Зробимо переріз дзеркала площиною $0xy$, щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат, а вісь Ox –

паралельною до променів, які падають на дзеркало. У перерізі одержуємо деяку криву $y = f(x)$ (рис. 17.1).

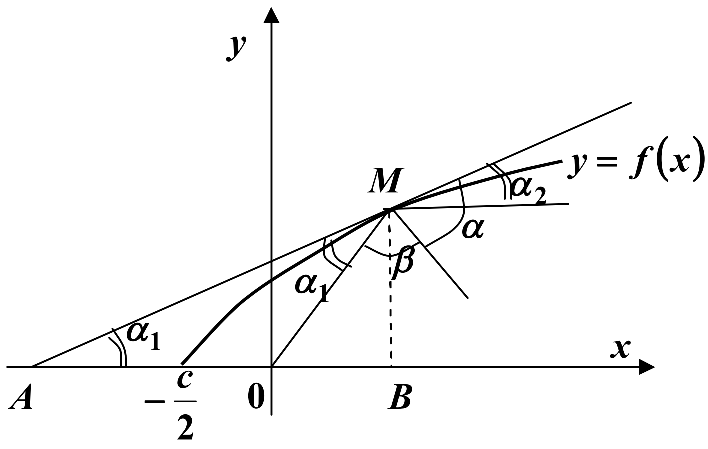

Рис. 17.1

Нехай $M(x, y)$ є довільною точкою кривої $y = f(x)$. Проведемо в цій точці дотичну MA та нормаль MN до кривої. Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя α дорівнює куту його відбиття β. Звідки випливає, що $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$. Трикутник MOA рівнобедрений, отже $AO = MO$, де $MO = \sqrt{OB^2 + MB^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Оскільки $y' = tg\alpha_1$ (геометричний зміст похідної), то, вважаючи, що $y > 0$, одержуємо

$$y' = tg\alpha_1 = \frac{MB}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

Домножимо чисельник та знаменник дробу на $\sqrt{x^2 + y^2} - x$, тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right). \qquad (17.5)$$

Диференціальне рівняння (17.5) є диференціальною моделлю задачі.

Задача 4. Підприємство реалізує продукцію b, про яку в момент часу t з числа N_0 потенційних покупців знає лише $x = x(t)$ покупців. Для прискорення збуту продукції дано рекламні оголошення по радіо і телебаченню. Наступна інформація про продукцію розповсюджується серед покупців засобом спілкування один з одним. Вважатимемо, що після рекламних оголошень швидкість зміни числа тих, хто знає про продукцію, прямо пропорційна добутку числа покупців, які знають про товар, на число тих, хто про нього не знає. Знайти залежність між змінними x і t, якщо в початковий момент часу $t=0$ (після рекламних оголошень) про товар знали $\frac{N_0}{a}$ чоловік (***закон ефективності реклами***).

Розв'язання. Якщо $x(t)$ – кількість покупців, яка знає про продукцію підприємства в момент часу t, то, враховуючи умову задачі, дістаємо наступне диференціальне рівняння

$$x'(t)=kx(N_0-x), \tag{17.6}$$

де $k>0$ – коефіцієнт пропорційності, $x'(t)=\frac{dx}{dt}$ – швидкість зміни числа тих, хто знає про продукцію. Диференціальне рівняння (17.6) разом з початковою умовою $x(0)=\frac{N_0}{a}$ є математичною моделлю закону ефективності реклами.

Зауваження 17.1. Отже, перший етап розв'язування задач з практичним змістом закінчується складанням диференціального рівняння для шуканої функції. Це творча й найважча частина розв'язку, тому що не існує будь-яких загальних правил для складання диференціальних рівнянь за умовами конкретної задачі. Наприклад, якщо це задача геометричного характеру, то наявність у її даних дотичної чи деяких зв'язаних з нею відрізків дає можливість написати співвідношення між координатами точок кривої і кутовим коефіцієнтом дотичної. У задачах фізичного характеру часом можна відразу написати відповідне диференціальне рівняння, якщо задана швидкість зміни будь-якого процесу. В інших випадках необхідно попередньо встановити співвідношення між збільшенням змінних, потім переходом до границі одержати диференціальне рівняння.

Математична зрілість інженера характеризується в основному тим, наскільки правильно він може математично формулювати практичні задачі, які пов'язані з його спеціальністю. Якщо задача зведена до диференціального рівняння, методи розв'язування якого відомі, то другий етап розв'язку, тобто інтегрування рівняння, не викликає труднощів.

17.3. Основні поняття та означення

Звичайним диференціальним рівнянням n***-го порядку*** відносно функції $y = f(x)$ називається співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0. \tag{17.7.}$$

між незалежною змінною x, шуканою функцією $y = f(x)$ і похідними $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Зауваження 17.2. Позначення, використані у наведеному означенні, не є суттєвими, незалежна змінна може позначатися через t, шукана функція – через s, f, φ тощо.

Вважається також, що похідна n-го порядку шуканої функції обов'язково входить в це рівняння, тоді як наявність решти аргументів необов'язкова.

Рівняння (17.7), не розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$, називається ***неявним*** диференціальним рівнянням.

Натомість рівняння, розв'язане відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{17.8}$$

називається ***нормальним*** або ***явним***.

Розв'язком рівняння (17.8) на деякому інтервалі (a, b) називається функція $y = \varphi(x)$, що має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно, яка при підстановці в дане рівняння обертає його в тотожність.

Приклад 17.2. Перевірити, чи є функції $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = 4\sin 3x$ розв'язками диференціального рівняння $y'' + 9y = 0$.

Розв'язання. Знайдемо похідні наведених функцій та підставимо кожну функцію та її похідні в дане рівняння. Отримаємо:

а) $y_1 = \cos 3x$, $y_1' = -3\sin 3x$, $y_1'' = -9\cos 3x$

$$-9\cos 3x + 9\cos 3x \equiv 0;$$

б) $y_2 = \cos 2x$, $y_2' = -2\sin 2x$, $y_2'' = -4\cos 2x$

$$-4\cos 2x + 9\cos 2x = 5\cos 2x \neq 0, \text{ якщо } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in z,$$

тому функція y_2 не є розв'язком даного рівняння;

в) $y_3 = 4\sin 3x$, $y_3' = 12\cos 3x$, $y_3'' = -36\sin 3x$

$$-36\sin 3x + 36\sin 3x \equiv 0.$$

Отже, тільки функції y_1 та y_3 є розв'язками рівняння $y'' + 9y = 0$ на інтервалі $(-\infty,+\infty)$. Розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є взагалі всі функції $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

З геометричної точки зору графік розв'язку диференціального рівняння (17.7) або (17.8) є деяка крива, яку називають ***інтегральною кривою***. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають ***сім'єю інтегральних кривих***.

В загальному випадку розв'язок диференціального рівняння n-го порядку знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань, тому загальний розв'язок такого рівняння містить n довільних сталих, тобто має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{17.9}$$

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають ***інтегруванням*** цього рівняння. Якщо всі розв'язки рівняння можна виразити через елементарні функції або у ***квадратурах*** (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння проінтегроване ***у скінченному вигляді***. Розглядатимемо надалі переважно саме такі рівняння, хоча клас таких рівнянь надзвичайно вузький. Значно більше диференціальних рівнянь не інтегруються у скінченному вигляді й для отримання їх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат [1].

ЛЕКЦІЯ 18. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ: ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ, ЗАДАЧА КОШІ, ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ. ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

18.1. Загальні поняття та означення

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{18.1}$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну $y' = \frac{dy}{dx}$.

Якщо рівняння (18.1) можна розв'язати відносно y', то воно набуває виду

$$y' = f(x, y). \tag{18.2}$$

Таке рівняння називають рівнянням в ***нормальній формі***.

Рівняння (18.2) можна записати ще у вигляді $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ або $dy - f(x, y)dx = 0$, який є окремим випадком рівняння:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{18.3}$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – відомі функції.

Розв'язком диференціального рівняння (18.2) на інтервалі (a, b) називається диференційована на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює рівняння (18.2) на тотожність, тобто $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$.

Вже зазначалось (лекція 17, п. 17.3), що диференціальне рівняння має безліч розв'язків. Однак у багатьох задачах теоретичного або прикладного характеру серед усіх розв'язків рівняння (18.2) потрібно знайти такий розв'язок, що задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0, \tag{18.4}$$

де x_0, y_0 – задані числа. Така умова, згідно з якою розв'язок $y = \varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0, називають ***початковою умовою***. Задача знаходження розв'язку рівняння (18.2), який задовольняє початкову умову (18.4), називається ***задачею Коші***.

З геометричної точки зору задача Коші (18.2), (18.4) полягає у відшуканні інтегральної кривої рівняння (18.2), яка проходить через задану точку (x_0, y_0) площини Oxy.

Основною теоремою, яка забезпечує не тільки існування, але й єдинність розв'язку задачі Коші, є теорема Коші [3].

Теорема Коші (про існування і єдинність розв'язку). Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені та неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0; y_0) \in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (18.2), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0 \text{ або } y(x)|_{x=x_0} = y_0. \tag{18.5}$$

Геометричний зміст теореми полягає в тому, що при виконанні її умов існує єдина інтегральна крива диференціального рівняння, яка проходить через точку (x_0, y_0).

18.2. Класифікація розв'язків

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію

$$y = \varphi(x, C), \tag{18.6}$$

яка залежить від однієї довільної сталої C, якщо:

1) вона є розв'язком рівняння (18.2) при будь-якому значенні сталої C;

2) для довільної початкової умови (18.5) існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє умову (18.5), тобто $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

При цьому передбачається, що значення x_0, y_0 належать до тієї області G зміни змінних, у якій виконуються умови теореми існування і єдності розв'язку.

Зауваження 18.1. Якщо в процесі знаходження загального розв'язку одержують рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, не розв'язане відносно y, то загальний розв'язок залишається в неявному вигляді. Така рівність називається ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння (18.2).

Частинним розв'язком рівняння (18.2) називають функцію $y = \varphi(x, C_0)$, утворену з загального розв'язку (18.6) при певному значенні сталої $C = C_0$.

Співвідношення $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називають у цьому випадку ***частинним інтегралом*** рівняння.

Зауваження 18.2. Кількість констант у загальному розв'язку та кількість початкових умов у задачі Коші завжди дорівнює порядку диференціального рівняння.

Приклад 18.1. Для рівняння $y' = 2x + 2$ загальним розв'язком буде сім'я функцій $y = x^2 + 2x + C$. Знайдемо частинний розв'язок, що задовольняє таку початкову умову: $y(1) = 2$. Підставляючи в загальний розв'язок $x = 1$, $y = 2$, одержимо $2 = 1 + 2 + C$, звідки $C = -1$. Отже, шуканим частинним розв'язком (розв'язком задачі Коші) буде функція $y = x^2 + 2x - 1$.

Зауваження 18.3. Якщо у точці (x_0, y_0) порушуються умови теореми Коші, то через цю точку проходить декілька інтегральних кривих (розв'язок не єдиний) або не проходить жодної інтегральної кривої (розв'язок не існує). Такі точки називаються ***особливими точками*** диференціального рівняння. Шукати особливі точки потрібно серед точок, у яких мають розрив функція $f(x, y)$ або її частинна похідна $f'_y(x, y)$.

Якщо кожна точка розв'язку $y = \varphi(x)$, який не може бути отриманий із загального розв'язку ні за яких значень параметру C, є особливою точкою диференціального рівняння, то розв'язок $y = \varphi(x)$ називають ***особливим***.

Приклад 18.2. Рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$ має, як легко перевірити, загальний розв'язок $y = Cx$ – це сім'я прямих, які всі проходять через точку $(0;0)$. Точка $(0;0)$ є особлива точка цього диференціального рівняння. Права частина рівняння $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ задовольняє умови теореми Коші, якщо $x \neq 0$. Отже, особливими будуть також точки $(0; y_0)$, де $y_0 \neq 0$. Через ці точки не проходить жодної інтегральної кривої (рис. 18.1).

Графіком особливого розв'язку є інтегральна крива, яка у кожній своїй точці має спільну дотичну з однією з інтегральних кривих. Таку інтегральну криву називають ***обвідною*** сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв'язком.

Приклад 18.3. Рівняння $y' = \sqrt{y}$ має сім'ю інтегральних кривих, а саме парабол $y = \left(\dfrac{x}{2} + C\right)^2$. Крім того, очевидно, що це рівняння має також розв'язок $y = 0$. Цей розв'язок є особливим, бо функція $f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ при $y = 0$ розривна. Пряма $y = 0$ дотикається до сім'ї парабол і є її обвідною (рис.18.2).

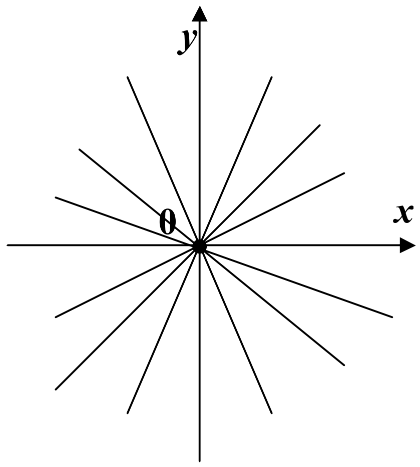

Рис. 18.1

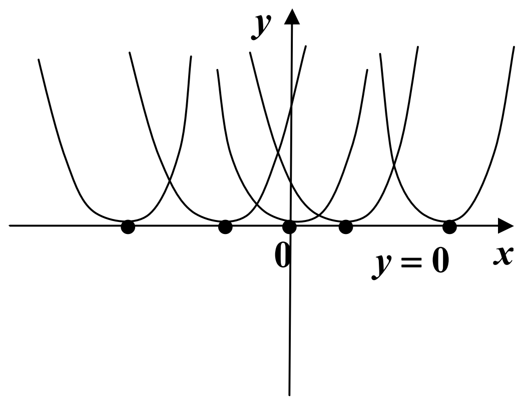

Рис. 18.2

Зауваження 18.4. Якщо розглядати x і y як декартові координати точки, то диференціальне рівняння (18.2) встановлює зв'язок між координатами довільної точки $M(x, y)$ площини і кутовим коефіцієнтом дотичної $y'|_M = f(x, y) = tg\alpha$ до інтегральної кривої у цій точці. Отже, якщо функція $f(x, y)$ визначена в області G, то кожній точці $M(x, y) \in G$ диференціальне рівняння (18.2) ставить у відповідність значення кута $\alpha = arctg(x, y)$. Вказуючи цей напрям одиничним вектором з початком в точці M, одержимо в області G ***поле напрямів***, визначене рівнянням (18.2). Отже, з погляду геометрії, розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$ визначає інтегральну криву, яка в кожній своїй точці дотикається до поля напрямів.

18.3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Існує декілька типів диференціальних рівнянь першого порядку, які інтегруються в квадратурах (або зводяться до них). Одним із таких типів є диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Найпростішим диференціальним рівнянням першого порядку є рівняння вигляду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{18.7}$$

де один доданок залежить тільки від x, а другий – від y. Такі рівняння називають рівняннями з ***відокремленими змінними***. Проінтегрувавши почленно це рівняння, одержимо його загальний інтеграл:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \tag{18.8}$$

де кожен з коефіцієнтів біля диференціалів є добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а інша – тільки від y. Рівняння (18.8) називають ***рівнянням з відокремлюваними змінними***.

Для інтегрування рівняння (18.8) потрібно домогтися того, щоб коефіцієнт біля dx залежав тільки від x, а коефіцієнт біля dy – тільки від y. Це досягається діленням обох частин рівняння на добуток $M_2(x)N_1(y)$. Після цього одержуємо

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{18.9}$$

Рівняння (18.9) має вигляд (18.7), його можна розглядати як рівність диференціалів, отже, відповідні невизначені інтеграли відрізняються собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C. \tag{18.10}$$

Співвідношення (18.10) є загальним інтегралом рівняння (18.8).

Зауваження 18.5. При діленні рівняння (18.8) на $M_2(x)N_1(y)$ можна втратити розв'язки, при яких $M_2(x)=0$ та $N_1(y)=0$. Тому слід окремо розв'язати рівняння $M_2(x)=0$ та $N_1(y)=0$, знайти їх розв'язки (якщо вони існують) та перевірити, які з них не можуть бути одержані з загального розв'язку, тобто, є особливими розв'язками.

Рівняння з відокремлюваними змінними можна записати також у вигляді

$$y' = f(x)\varphi(y). \tag{18.11}$$

Щоб розв'язати це рівняння, треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (18.11) на $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx. Тоді рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx, \tag{18.12}$$

тобто у вигляді рівняння з відокремленими змінними. В загальному випадку рівняння (18.12) є частковим випадком рівняння (18.7). Отже, його розв'язок має вигляд

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Тут, як і для рівняння (18.8), якщо $\varphi(y_0) = 0$, то $y = y_0$ є розв'язком рівняння (18.11).

Приклад 18.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xdx + ydy = 0$.

Розв'язання. Це рівняння з відокремленими змінними (18.7). Інтегруючи знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$$\int xdx + \int ydy = C \text{ або } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Геометрично загальний розв'язок представляє собою сім'ю концентричних кіл $x^2 + y^2 = 2C$.

Приклад 18.5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2x \sin ydx + (x^2 + 3)\cos ydy = 0$, що задовольняє умові $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Розв'язання. Поділимо кожний член рівняння на $(x^3 + 3)\sin y$, одержимо рівняння вигляду (18.9):

$$\frac{2xdx}{x^2 + 3} + \frac{\cos ydy}{\sin y} = 0.$$

Інтегруючи способом підстановки, знаходимо

$$\int \frac{2xdx}{x^2+3} + \int \frac{\cos y dy}{\sin y} = C_1,$$

$$\int \frac{d\left(x^2+3\right)}{x^2+3} + \int \frac{d(\sin y)}{\sin y} = C_1,$$

$$\ln\left(x^2+3\right) + \ln(\sin y) = \ln C, \text{ де } C_1 = \ln C.$$

Після потенціювання отримаємо загальний розв'язок рівняння $\left(x^2+3\right)\sin y = C$.

Оскільки $\left(x^2+3\right)\sin y = 0$ при $\sin y = 0$, і при цьому значенні диференціальне рівняння не втрачає числового змісту, то $\sin y = 0$ – розв'язок рівняння. Цей розв'язок міститься в загальному розв'язку при $C = 0$.

Підставимо $x = \frac{\pi}{6}$ і $y = 1$ в загальний інтеграл рівняння $\sin y = \frac{C}{x^2+3}$, одержимо $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{C}{1+3}$, звідки $\frac{1}{2} = \frac{C}{4}$ або $C = 2$. Таким чином, шуканий частинний інтеграл має вигляд $\sin y = \frac{2}{x^2+3}$.

18.4. Однорідні диференціальні рівняння

До рівняння з відокремлюваними змінними зводяться однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Функція $f(x,y)$ називається ***однорідною функцією*** виміру k, якщо для будь-яких x, y, t справджується тотожність $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$.

Наприклад, функція $f_1(x,y) = x^3 + 6xy^2$ є однорідна функція виміру 3, оскільки

$$f_1(tx,ty) = (tx)^3 + 6tx(ty)^2 = t^3\left(x^3 + 6xy^2\right) = t^3 f_1(x,y).$$

Функція $f_2(x,y) = \arccos\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ – однорідна функція виміру $k = 0$, так як $f_2(tx,ty) = \frac{(tx)^2+(ty)^2}{(tx)^2-(ty)^2} = \arccos\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = t^0 \arccos\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = t^0 f_2(x,y)$.

Диференціальне рівняння (18.2) $y' = f(x, y)$ називається ***однорідним*** відносно змінних x та y, якщо $f(x, y)$ є однорідною функцією виміру $\mathbf{0}$.

Покажемо, що коли диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ однорідне, то його завжди можна подати у вигляді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (18.13)$$

Дійсно, якщо $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру, то, за означенням, $f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$. Поклавши $t = \frac{1}{x}$, одержуємо:

$$f(x, y) = f\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однорідне рівняння (18.13) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінної (підстановки) $\frac{y}{x} = u$ або, що те саме, $y = ux$, де $u = u(x)$ – нова шукана функція. Тоді $y' = u'x + u$, і рівняння (18.13) буде мати вигляд

$$u'x + u = \varphi(u),\ u'x = \varphi(u) - u \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u. \qquad (18.4)$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Поділяючи змінні і інтегруючи, одержимо загальний його інтеграл

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x},\ \varphi(u) \neq u,\ x \neq 0 \Rightarrow \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = ln|x| + C.$$

Після обчислення інтеграла підставимо замість u відношення $\frac{y}{x}$ і дістанемо загальний інтеграл рівняння (18.13).

Зауваження 18.6. При відокремлюванні змінних ми ділимо отримане рівняння на $f(u) - u$, припускаючи, що цей вираз відмінний від нуля. Якщо $f(u) - u = 0$, то рівняння (18.14) запишеться у вигляді $x\frac{du}{dx} = 0$. У цьому випадку рівняння (18.13) може мати розв'язки $y = Cx\ (x \neq 0)$ та $x = 0\ (y \neq 0)$. Ці розв'язки можуть бути особливими.

Приклад 18.6. Розв’язати рівняння $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Розв’язання. Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, тому що $f(tx, ty) = \dfrac{2txty}{(tx)^2 - (ty)^2} = \dfrac{t^2 \cdot 2xy}{t^2\left(x^2 - y^2\right)} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2} = f(x, y)$.

Отже, диференціальне рівняння є однорідним. Застосуємо підстановку $y = ux$, тоді $y' = u'x + u$. Підставимо y, y' у задане рівняння, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними, звідки дістанемо загальний інтеграл. Процес розв’язання виглядає так:

$$u'x + u = \frac{2x \cdot ux}{x^2 - (ux)^2} \quad \Rightarrow \quad u'x = \frac{2x^2 u}{x^2\left(1 - u^2\right)} - u \quad \Rightarrow$$

$$u'x = \frac{2u - u\left(1 - u^2\right)}{1 - u^2} \quad \Rightarrow \quad u'x = \frac{u\left(1 + u^2\right)}{1 - u^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{u\left(1 + u^2\right)}{1 - u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - u^2}{u\left(1 + u^2\right)} du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{\left(1 + u^2\right) - u^2 - u^2}{u\left(1 + u^2\right)} du = \int \frac{dx}{x} + ln\, C,$$

$$\int \frac{\left(1 + u^2\right) du}{u\left(1 + u^2\right)} - \int \frac{2u^2 du}{u\left(1 + u^2\right)} = ln|x| + ln\, C,$$

$$ln|u| - ln\left(1 + u^2\right) = ln|xC|.$$

Остаточно, загальний інтеграл рівняння відносно функції $u(x)$ має вигляд

$$\frac{u}{1 + u^2} = xC.$$

Підставляючи значення $u = \dfrac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл заданого рівняння $\left(x^2 + y^2\right)C = y$.

При відокремленні змінних ми ділимо на x і на u, що можливо при $x \neq 0$ та $u \neq 0$. Нехай $u = 0$, тобто $y = 0$. Ця функція перетворює дане рівняння в тотожність, тому є його розв’язком. Цей розв’язок є особливим і його слід вказати додатково до знайденого інтегралу. Точки, в яких $x = 0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння $\left(x^2 - y^2 \neq 0\right)$, тому пряма $x = 0$ не може бути інтегральною кривою цього рівняння.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 21. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Диференціальне рівняння першого порядку називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними***, якщо його можна записати у вигляді (лекція 17):

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (21.1)$$

або

$$y' = f(x)\cdot \varphi(y), \qquad (21.2)$$

де кожен з коефіцієнтів біля диференціалів в (21.1) і права частина в (21.2) є добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а інша – тільки від y. Для інтегрування рівняння потрібно домогтися того, щоб коефіцієнт біля dx залежав тільки від x, а коефіцієнт біля dy – тільки від y.

Приклад 21.1. Довести, що функції: а) $y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$; б) $y = \frac{1}{2}\ln^2 x$; в) $y = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)$ є розв'язками відповідних рівнянь: а) $y' = \sin^3 x$; б) $y' = \frac{\ln x}{x}$; в) $y' = x^2 e^x$.

Розв'язання. Розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ називається така неперервна диференційовна функція, яка при підстановці у дане рівняння перетворює його на тотожність.

а) $y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x \Rightarrow y' = \sin x - \frac{1}{3}\cdot 3\cos^2 x \cdot \sin x$.

Підставимо y' в рівняння $y' = \sin^3 x$:

$$\sin x - \cos^2 x \sin x = \sin x\left(1 - \cos^2 x\right) = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin^3 x \equiv \sin^3 x.$$

Таким чином, $y = -\cos + \frac{1}{3}\cos^3 x$ є розв'язком даного рівняння, оскільки в результаті підстановки отримано тотожність.

б) $y=\frac{1}{2}ln^2 x \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\cdot 2ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{ln x}{x}$. Підставляючи в рівняння $y'=\frac{ln x}{x}$, отримуємо тотожність $\frac{ln x}{x}\equiv\frac{ln x}{x}$. Отже, $y=\frac{1}{2}ln^2 x$ є розв'язком даного рівняння.

в) $y=e^x\left(x^2-2x+2\right)\Rightarrow y'=e^x\left(x^2-2x+2\right)+e^x\left(2x-2\right)=e^x\left(x^2-2x+2+\right.$ $\left.+2x-2\right)=e^x\cdot x^2$. Після підстановки цього виразу в рівняння $y'=x^2e^x$ отримуємо тотожність: $e^x\cdot x^2\equiv x^2\cdot e^x$. Функція $y=e^x\left(x^2-2x+2\right)$ є розв'язком даного рівняння.

Приклад 21.2. Розв'язати рівняння: $y'=cos 2x\cdot\left(y^2+9\right)$.

Розв'язання. Для того, щоб відокремити змінні, запишемо замість $y'=\frac{dy}{dx}$, домножимо обидві частини рівняння на dx та поділимо їх на $\left(y^2+9\right)$:

$$\frac{dy}{dx}=cos 2x\cdot\left(y^2+9\right)\Rightarrow dy=cos 2x\cdot\left(y^2+9\right)dx \Rightarrow \frac{dy}{y^2+9}=cos 2xdx.$$

Отримане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Проінтегруємо його:

$\int\frac{dy}{y^2+9}=\int cos 2x+C \Rightarrow \frac{1}{3}arctg\frac{y}{3}=\frac{1}{2}sin 2x+C$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад 21.3. Розв'язати рівняння: $y'=\frac{y}{\sqrt{x^2-9}}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{x^2-9}}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}+$ $+ln C\Rightarrow ln|y|=ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+ln C$.

Тут для зручності сталу інтегрування C записано в логарифмічній формі. Після потенціювання дістаємо загальний розв'язок рівняння: $y=C\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)$.

Через те, що функція $y = 0$ також задовольняє задане рівняння, вона теж є його розв'язком. Вона міститься у загальному розв'язку (її можна отримати, якщо $C = 0$).

Приклад 21.4. Розв'язати рівняння $\left(y - x^2 y\right)dy = \left(x - xy^2\right)dx$.

Розв'язання. Для того, щоб відокремити змінні, треба спочатку винести за дужки співмножники в кожній з частин рівняння:

$y\left(1 - x^2\right)dy = x\left(1 - y^2\right)dx$.

Далі поділимо обидві частини рівняння на $\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)$. Тоді

$$\frac{y}{1 - y^2}dy = \frac{x}{1 - x^2}dx \qquad \left(x \neq \pm 1;\ y \neq \pm 1\right) \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1 - y^2\right)}{1 - y^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1 - x^2\right)}{1 - x^2} +$$

$$+ \ln C \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1 - y^2\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|1 - x^2\right| + \ln C \;\Rightarrow\; \ln\left|1 - y^2\right| = \ln\left|1 - x^2\right| + \ln C^{-2} \Rightarrow$$

$1 - y^2 = \left(1 - x^2\right)\cdot C^{-2}$ або $1 - y^2 = C_1\left(1 - x^2\right)$, де, враховуючи довільність сталої C, перепозначено C^{-2} через C_1.

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є

$$y^2 = 1 + C_1\left(x^2 - 1\right). \tag{21.3}$$

З'ясуємо можливість появи особливих розв'язків заданого рівняння. Легко перевірити, що функції $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ є розв'язками рівняння, однак у загальному інтегралі міститься лише два останніх (їх можна отримати з формули (21.3), якщо $C = 0$). Функції $x = -1$ і $x = 1$ є особливими розв'язками.

Отже, розв'язок має вигляд: $y^2 = 1 + C\left(x^2 - 1\right)$, $x = -1$, $x = 1$.

Приклад 21.5. Розв'язати задачу Коші: $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}6$.

Розв'язання. Подамо дане рівняння у вигляді:

$$xy' = y^2 - y \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = y^2 - y \Rightarrow \frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y(y - 1)} = \int \frac{dx}{x} + \ln C$$

$\left(x \cdot \left(y^2 - y\right) \neq 0\right)$.

Обчислимо інтеграл:

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = -\int \frac{-1+y-y}{y(y-1)}dy = -\int \left(\frac{y-1}{y(y-1)} - \frac{y}{y(y-1)} \right) dy = -\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1} =$$

$$= -\ln|y| + \ln|y-1| + \overline{C} = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + \overline{C}.$$

Отже, маємо загальний розв'язок рівняння

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|xC| \Rightarrow \frac{y-1}{y} = xC \Rightarrow y(1-Cx) = 1 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{1-Cx}. \tag{21.4}$$

Застосовуючи початкову умову $y(1) = 0{,}6$, знаходимо значення довільної сталої C: $0{,}6 = \dfrac{1}{1-C} \Rightarrow C = -\dfrac{2}{3}$.

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = \dfrac{1}{1+\dfrac{2x}{3}}$.

Зауважимо, що загальний розв'язок знайдено за умови $x\left(y^2 - y\right) \neq 0$. Якщо $x\left(y^2 - y\right) = 0$, то або $x = 0$, або $y = 0$, або $y = 1$. Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що $x = 0$ не є розв'язком вихідного рівняння, $y = 1$ – частинний розв'язок, оскільки він є у загальному (21.4) при $C = 0$, а $y = 0$ – розв'язок рівняння, але у загальному його немає ні при якому значенні довільної сталої C.

Приклад 21.6. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y\ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0, \; y\left(-\frac{15}{16}\right) = e.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді:

$$y'\sqrt{x+1} = -y\ln^3 y \Rightarrow \frac{dy}{dx}\sqrt{x+1} = -y\ln^3 y \Rightarrow \frac{dy}{y\ln^3 y} = -\frac{dx}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y\ln^3 y} = -\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} + C.$$

Для обчислення інтеграла у лівій частині рівності застосуємо метод заміни змінної:

$$\int \frac{dy}{y\,ln^3\,y} = \left| \begin{matrix} ln\,y = t \\ \dfrac{dy}{y} = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} + \overline{C} = -\frac{1}{2\,ln^2\,y} + \overline{C}.$$

Отже, загальний інтеграл має вигляд: $-\dfrac{1}{2\,ln^2\,y} = -2\sqrt{x+1} + C$.

Застосовуючи початкову умову, знаходимо частинний розв'язок рівняння: $-\dfrac{1}{2\,ln^2\,e} = -2\sqrt{-\dfrac{15}{16}+1} + C \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{2}{4} + C \;\Rightarrow\; C = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{2\,ln^2\,y} =$ $= 2\sqrt{x+1}$.

Пропонуємо читачам перевірити самостійно, чи являються розв'язками рівняння значення x та y, при яких $y\,ln^3\,y \cdot \sqrt{x+1} = 0$.

Приклад 21.7. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку $(1;2)$, кутовий коефіцієнт дотичної до якої у кожній точці дорівнює $\dfrac{x}{y}$. Побудувати криву.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у кожній точці є значенням похідної y' у цій точці.

Отже, $y' = \dfrac{x}{y}$. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \;\Rightarrow\; ydy = xdx \;\Rightarrow\; \int ydy = \int xdx + C \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C.$$

Підставимо в загальний інтеграл рівняння координати точки, через яку проходить шукана крива: $\dfrac{2^2}{2} - \dfrac{1^2}{2} = C \;\Rightarrow\; C = \dfrac{3}{2}$.

Тоді рівняння кривої має вигляд $y^2 - x^2 = 3$, графік кривої наведено на рис. 21.1.

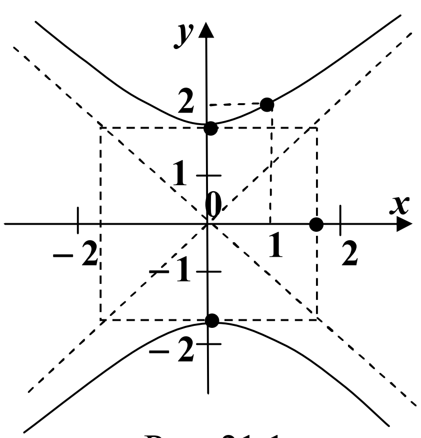

Рис. 21.1

Завдання для самостійної роботи

1. Перевірити, чи буде функція $y = f(x)$ розв'язком відповідного рівняння:

а) $y = e^{2x}$, $\quad y = e^{\frac{xy'}{y}}$;

б) $y = \dfrac{1+x}{x^2}$, $\quad y' = y + x^2$;

в) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $\quad \left(1+y^2\right)dx + \left(1+x^2\right)dy = 0$;

г) $y = x \cdot e^{-3x}$, $\quad y' - \dfrac{y}{x} = 2xe^{-3x}$;

д) $y = e^{tg\frac{x}{2}}$, $\quad y' \sin x = y \ln y$.

2. Знайти загальні розв'язки (інтеграли) рівнянь:

а) $xy' = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y}$; $\quad$ б) $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2$; $\quad$ в) $y' \sin^2 x - y \cos x = 0$;

г) $xy' - y \ln y = 0$; $\quad$ д) $y' = e^{2x+y}$; $\quad$ є) $3e^x tgy dx + \left(2+e^x\right) sec^2 y dy = 0$.

3. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$, $\quad y(0) = 1$;

б) $y' tgx = y + 3$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

в) $y = y' \cos^2 x \ln y$, $\quad y(\pi) = 1$;

г) $x^2\left(y^3+5\right)dx + \left(x^3+5\right)y^2 dy = 0$, $\quad y(0) = 1$;

д) $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$, $\quad y(1) = 0$.

4. Напишіть рівняння, якому задовольняють:

а) усі точки екстремуму інтегральних кривих рівняння $y' = x^3 + y$;

б) усі точки перегину інтегральних кривих рівняння $y' = ye^{3x} - 9$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 22. ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Функція $f(x,y)$ є однорідною функцією k-го виміру відносно змінних x та y, якщо (лекція 18, п. 18.4) виконується тотожність $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$.

Диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ називається однорідним, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією ***нульового виміру***.

Однорідним диференціальним рівнянням називають також рівняння, яке можна записати у вигляді:

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{21.5}$$

або $f_1(x,y)dx+f_2(x,y)dy=0$, де $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ – однорідні функції, що мають однаковий вимір однорідності k.

Підстановкою $y=ux$, $y'=u'x+u$, де $u(x)$ – невідома функція, рівняння (21.5) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 22.1. Розв'язати рівняння $xy'-y=x\,e^{-\frac{2y}{x}}$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $y'-\dfrac{y}{x}=e^{-\frac{2y}{x}}$.

Отже, рівняння має вигляд $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, тобто є однорідним.

Зробимо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$, отримаємо:

$$u'x+u-u=e^{-2u}\Rightarrow\frac{du}{dx}x=e^{-2u}\Rightarrow\frac{du}{e^{-2u}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int e^{2u}\,du=\int\frac{dx}{x}+C\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}e^{2u}=ln|x|+C.$$

Підставляючи значення $u=\dfrac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл рівняння

$$\frac{1}{2}e^{\frac{2y}{x}}=ln|x|+C.$$

Приклад 22.2. Розв'язати рівняння $\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0$.

Розв'язання. Маємо $f_1(x,y)=y$; $f_2(x,y)=2\sqrt{xy}-x$.

Оскільки $f_1(tx,ty)=ty$, $f_2(tx,ty)=2\sqrt{tx\cdot ty}-tx=t\left(2\sqrt{xy}-x\right)$, то функції $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ є однорідними функціями першого виміру. Отже, задане рівняння є однорідним. Зробимо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$, яка зведе його до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=-ydx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-2\sqrt{xy}}\left(x\neq 0,\,y\neq\frac{x}{4}\right)\Rightarrow u'x+u=$$

$$=\frac{ux}{x-2\sqrt{ux^2}}\Rightarrow u'x+u=\frac{u}{1-2\sqrt{u}}\Rightarrow\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{2u\sqrt{u}}{1-2\sqrt{u}}\Rightarrow\frac{\left(1-2\sqrt{u}\right)du}{2u\sqrt{u}}=$$

$$=\frac{dx}{x}(u\neq 0)\Rightarrow\int\frac{\left(1-2\sqrt{u}\right)du}{2u\sqrt{u}}=\int\frac{dx}{x}+C.$$

$$\int\left(\frac{1}{2u\sqrt{u}}-\frac{2\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}}\right)du=\frac{1}{2}\int u^{-3/2}du-\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{u}}-ln|u|+C.$$

Отже, після інтегрування маємо: $-\dfrac{1}{\sqrt{u}}-ln|u|=ln|x|+C$.

Зробимо обернену підстановку $u=\dfrac{y}{x}$ і одержимо загальний інтеграл шуканого рівняння $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+ln|y|+C=0$.

Якщо $u=0$, то $y=0$ – особливий розв'язок рівняння; крім того, $x=0$ – теж особливий розв'язок заданого рівняння.

Приклад 22.3. Знайти загальний розв'язок $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$.

Розв'язання. Маємо: $f_1(x,y)=y^2-2xy;$ $f_2(x,y)=x^2$.

Функції $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$ є однорідними функціями другого виміру:

$$f_1(tx,ty)=(ty)^2-2(tx)(ty)=t^2y^2-2t^2xy=t^2\left(y^2-2xy\right)=t^2f_1(x,y);$$

$$f_2(tx,ty)=(tx)^2=t^2x^2=t^2f_2(x,y),$$

тобто початкове рівняння є однорідним.

Зробимо підстановку $y = ux; \quad y' = u'x + u; \quad u = \frac{y}{x}$, та зведемо це рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y^2 - 2xy + x^2 y' = 0,$$

$$(ux)^2 - 2x\,ux + x^2(u'x + u) = 0,$$

$$u^2x^2 - 2x^2u + x^2(u'x + u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 2u + u'x + u = 0, \text{ або}$$

$$u'x = u - u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}x = u - u^2.$$

Відокремимо змінні в останньому рівнянні: $\int \frac{du}{u - u^2} = \int \frac{dx}{x}$;

$$u - u^2 = -\left(u^2 - u\right) = -\left(u^2 - 2\cdot\frac{1}{2}u + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4} - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\int \frac{du}{\frac{1}{4} - (u - 1/2)^2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} ln\left|\frac{\frac{1}{2} + u - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - u + \frac{1}{2}}\right| = ln|x| + ln|C|, \text{ або}$$

$$ln\left|\frac{u}{1-u}\right| = ln|Cx| \Rightarrow \frac{u}{1-u} = Cx$$

$$\frac{u}{1-u} = Cx \Rightarrow \frac{y/x}{1 - y/x} = Cx, \Rightarrow \frac{y}{x-y} = Cx -$$ загальний інтеграл даного рівняння.

Знайдемо із цього виразу шукану функцію y:

$$-\frac{x - y - x}{x - y} = Cx, \; -\frac{x-y}{x-y} + \frac{x}{x-y} = Cx, \; \frac{x}{x-y} = Cx + 1 \Rightarrow$$

$$x = (Cx+1)(x-y) \Rightarrow x = Cx^2 + x - y(Cx+1), \; Cx^2 = y(Cx+1) \Rightarrow$$

$$y = \frac{Cx^2}{Cx+1}$$ – загальний розв’язок рівняння.

Приклад 22.4. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$, $y(1)=-3$.

Розв'язання. Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру:

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2x^2};\quad f(tx,ty)=\frac{t^2x^2+t^2y^2}{2t^2x^2}=t^0\cdot\frac{x^2+y^2}{2x^2},$$

отже, рівняння є однорідним.

Покладемо $y=ux$, $y'=u'x+u$. Підставимо y, y' в задане рівняння, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними, звідки дістанемо загальний інтеграл. Процес розв'язання виглядає так:

$$xu'+u=\frac{x^2+u^2x^2}{2x^2}\Rightarrow xu'=\frac{1+u^2}{2}-u\Rightarrow xu'=\frac{(u-1)^2}{2}\Rightarrow x\frac{du}{dx}=$$

$$=\frac{(u-1)^2}{2}\Rightarrow \frac{2du}{(u-1)^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow 2\int\frac{du}{(u-1)^2}=\int\frac{dx}{x}+ln|C|\Rightarrow -\frac{2}{u-1}=ln|xC|\Rightarrow$$

$$-\frac{2}{\frac{y}{x}-1}=ln|xC|\Rightarrow ln|xC|=\frac{2x}{x-y}.$$

Остаточно загальний інтеграл має вигляд: $Cx=e^{\frac{2x}{x-y}}$.

При відокремленні змінних ми поділили на $x\neq 0$ і на $(u-1)^2\neq 0$. Точки, в яких $x=0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння, тому $x=0$ не є розв'язком рівняння.

При $u-1=0$ маємо $y=x$. Функція $y=x$ перетворює задане рівняння в тотожність і є його особливим розв'язком, який слід вказати додатково до знайденого інтеграла.

Використуємо початкову умову $x=1$, $y=-3$ і знайдемо C:

$$C\cdot 1=e^{\frac{2\cdot 1}{1-(-3)}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

Тоді $\sqrt{e}x=e^{\frac{2x}{x-y}}$ або $x=e^{\frac{3x+y}{2(x-y)}}$ – частинний розв'язок рівняння.

Приклад 22.5. Розв'язати задачу Коші: $y^2+x^2y'=x\,y\,y'$, $y(1)=1$.

Розв'язання. Це рівняння є однорідним (перевірити самостійно), тому після підстановки $y = ux; \quad y' = u'x + u; \quad u = \dfrac{y}{x}$ отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(ux)^2 + x^2(u'x + u) = x\,ux(u'x + u),$$

$$u^2x^2 + x^2(u'x + u) = x^2u(u'x + u), \quad \text{або} \quad u^2 + u'x + u = u\,u'x + u^2,$$

$$u'x - u\,u'x = -u,$$

$$u'x(1 - u) = -u,$$

$$u'x(u - 1) = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} \cdot x(u - 1) = u.$$

Відокремимо змінні і проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{u-1}{u}\,du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad u - ln|u| = ln|x| + ln|C|,$$

або $u = ln|Cux|$, $\quad \dfrac{y}{x} = ln\left|C\,\dfrac{y}{x} \cdot x\right|$, $\quad y = x\,ln|Cy|$ $-$загальний інтеграл.

Використаємо початкові умови: $1 = 1\,ln|C| \;\Rightarrow\; ln\,C = 1 \;\Rightarrow\; C = e$.

Тоді $y = x\,ln|e \cdot y|$, або $y = x(ln\,e + ln\,y)$, або $y = x + x\,ln\,y$ $-$ розв'язок задачі Коші.

Приклад 22.6. Знайти частинний розв'язок рівняння: $x y' = y\left(1 + ln\,\dfrac{y}{x}\right)$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ при $x = 1$.

Розв'язання. Маємо $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + ln\,\dfrac{y}{x}\right)$. Це однорідне рівняння. Зробимо підстановку $y = ux, \quad y' = u'x + u, \quad u = {}^{y}\!/_{x}$ та аналогічно попереднім прикладам розв'яжемо отримане рівняння:

$$u'x + u = u\,(1 + ln\,u),$$

$$u'x = u + u\,ln\,u - u \quad \Rightarrow \quad u'x = u\,ln\,u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} \cdot x = u\,ln\,u,$$

$$\frac{du}{u\,ln\,u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u\,ln\,u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Для обчислення інтеграла, що знаходиться у лівій частині, використаємо заміну змінної $t = ln\,u;\quad dt = \frac{du}{u}$. Маємо $\int \frac{du}{u\,ln\,u} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|ln\,u| + C$.

Отже, $ln|ln\,u| = ln|x| + ln|C| \Rightarrow\ ln|u| = Cx$.

Загальний розв’язок рівняння має вигляд:

$$ln\left|\frac{y}{x}\right| = Cx.$$

Знайдемо C: $ln\left|\frac{1/\sqrt{e}}{1}\right| = C\cdot 1\ \Rightarrow\ C = ln\frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow\ C = ln\,e^{-1/2} \Rightarrow C = -1/2$.

$ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\frac{1}{2}x \Rightarrow y = xe^{-\frac{x}{2}}$ – частинний розв’язок рівняння.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальні розв’язки (інтеграли) рівнянь:

а) $xy' - y = x\,tg\frac{y}{x}$; б) $xy'\,sin\frac{y}{x} + x = y\,sin\frac{y}{x}$;

в) $y' = e^{\frac{-y}{x}} + \frac{y}{x} - 4$; г) $y' = \frac{x+y}{x-y}$;

д) $xy^2dy = \left(x^3 + y^3\right)dx$.

2. Знайти частинні розв’язки диференціальних рівнянь:

а) $xdy - ydx = ydy$, $y(-1) = 1$; б) $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xy = 0$, $y(1) = -2$;

в) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y(1) = 2$; г) $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$;

д) $xy = y\cos ln\frac{y}{x}$, $y(1) = e^{\pi}$.

ЛЕКЦІЯ 19. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

19.1. Лінійні диференціальні рівняння та методи їх розв'язування

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається таке рівняння, в якому величини y та y' знаходяться у першому степені і не перемножуються між собою. Загальний вигляд таких рівнянь

$$A(x)y' + B(x)y = C(x),$$

де $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – неперервні функції. В області, де $A(x) \neq 0$, це рівняння рівносильне рівнянню

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{19.1}$$

у якому позначено $p(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$, $q(x) = \dfrac{C(x)}{A(x)}$.

Якщо права частина (19.1) $q(x) = 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним***, а якщо функція $q(x)$ тотожно не дорівнює нулю, то ***лінійним неоднорідним***.

Зауваження 19.1. Якщо функція $p(x)$ і $q(x)$ у рівнянні (19.1) неперервні на деякому інтервалі (a, b), то згідно з теоремою Коші через кожну точку смуги $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ проходить єдина інтегральна крива. Насправді, якщо рівняння (19.1) записати у вигляді $y' = q(x) - p(x)y$, то його права частина $f(x, y) = q(x) - p(x)y$ є, очевидно, неперервною функцією, а частинна похідна $f'_y(x, y) = -p(x)$ обмежена у цій області. У цьому випадку рівняння (19.1) особливих розв'язків не має.

Лінійне неоднорідне рівняння (19.1) завжди інтегрується в квадратурах. Розглянемо два способи інтегрування таких рівнянь.

19.1.1. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Розв'яжемо спочатку відповідне рівнянню (19.1) однорідне рівняння

$$y' + p(x)y = 0, \tag{19.2}$$

яке є водночас рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -(p)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx\ (y \neq 0) \Rightarrow$$

$$ln|y| = -\int p(x)dx + ln\,C \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}\ . \tag{19.3}$$

Формула (19.3) описує всі розв'язки рівняння (19.2), оскільки розв'язок $y = 0$, який міг бути втраченим при відокремлюванні змінних, міститься у формі загального розв'язку (якщо $C = 0$).

Запишемо загальний розв'язок рівняння (19.1) у вигляді

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{19.4}$$

де $C(x)$ – нова невідома функція. Знайдемо функцію $C(x)$, підставивши для цього розв'язок (19.4) в рівність (19.1). Для цього знайдемо похідну $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Підставляємо значення y і y' в рівняння (19.1):

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

звідки $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$,

де C_1 – довільна стала. Підставляючи тепер отриману функцію $C(x)$ в рівність (19.4), одержуємо формулу для загального розв'язку лінійного рівняння (19.1):

$$y(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)dx}. \tag{19.5}$$

19.1.2. Метод пістановки (метод Й. Бернуллі)

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (19.1) шукатимемо у вигляді добутку двох диференційовних функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, тобто

$$y = uv, \tag{19.6}$$

де $u(x)$, $v(x)$ – невідомі функції, причому одна з цих функцій (наприклад, v) довільна (але не дорівнює тотожно нулю).

Знаходячи похідну $y' = u'v + uv'$ і підставляючи значення y та y' в рівняння (19.1), дістанемо

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \Rightarrow$$
$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \qquad (19.7)$$

Користуючись довільністю функції v, виберемо її такою, щоб вона була розв'язком рівняння $v' + p(x)v = 0$, звідки

$$v = e^{-\int p(x)dx}\ (C = 0). \qquad (19.8)$$

Знайдену функцію v підставимо в рівняння $u'v = q(x)$, яке отримано з рівняння (19.7) за умови, що вираз у дужках дорівнює нулю. Отже,

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C. \qquad (19.9)$$

Підставляючи знайдені функції u і v у (19.6), знаходимо загальний розв'язок рівняння (19.1) знову у вигляді формули (19.5), тобто

$$y(x) = \left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)dx}.$$

Приклад 19.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + \frac{3y}{x} = \frac{\sin 4x}{x^3}$.

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне рівняння виду (19.1), в якому $p(x) = \frac{3}{x}$, $q(x) = \frac{\sin 4x}{x^3}$.

Метод варіації довільної сталої. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$y' + \frac{3y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} + \ln C \Rightarrow \ln|y| = -3\ln|x| + \ln C \Rightarrow$$
$$y = \frac{C}{x^3}.$$

Розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = \frac{C(x)}{x^3}$, звідки $y' = \frac{C'(x)\cdot x^3 - 3x^2C(x)}{x^6} = \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4}$.

Підставляючи y і y' у початкове рівняння, одержуємо:

$$\frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4} + \frac{3C(x)}{x^3\cdot x} = \frac{\sin 4x}{x^3} \Rightarrow C'(x) = \sin 4x \Rightarrow C(x) = \int \sin 4x dx + C =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд $y = \frac{C(x)}{x^3} =$ $= \left(-\frac{1}{4}\cos 4x + C\right) \cdot \frac{1}{x^3}$.

Метод Бернуллі. Нехай $y = uv$. Тоді після підстановки рівняння має вигляд: $u'v + uv' + \frac{3uv}{x} = \frac{\sin 4x}{x^3} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{3v}{x}\right) = \frac{\sin 4x}{x^3}$.

Для знаходження функцій u і v одержуємо систему $\begin{cases} v' + \frac{3v}{x} = 0, \\ u'v = \frac{\sin 4x}{x^3} \end{cases}$.

Інтегруючи перше з цих рівнянь, дістаємо $\frac{dv}{v} = -\frac{3dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -3\ln|x| \Rightarrow$ $v = \frac{1}{x^3}\,(C = 0)$.

Підставимо значення v у друге рівняння, тоді $u' \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{\sin 4x}{x^3} \Rightarrow$ $u' = \sin 4x \Rightarrow u = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x + C$.

Отже, загальний розв'язок рівняння $y = uv = \left(-\frac{1}{4}\cos 4x + C\right) \cdot \frac{1}{x^3}$.

Зауваження 19.2. Наведені методи розв'язування лінійних рівнянь можна застосовувати також до рівняння вигляду

$$(p(y)x + q(y)) \cdot y' = 1, \tag{19.10}$$

якщо y прийняти за незалежну змінну, а x – за функцію цієї змінної. Наприклад, рівняння $\left(x - 2yx - y^2\right)dy + y^2 dx = 0$ є нелінійним відносно функції $y = y(x)$. Однак, якщо записати його у вигляді $\left(x - 2yx - y^2\right)y' = -y^2 \Rightarrow y' = \frac{y^2}{y^2 + 2yx - x} \Rightarrow \frac{1}{x'} = \frac{y^2}{y^2 + 2yx - x} \Rightarrow x' + \frac{1 - 2y}{y^2}x =$ $= 1$, $(y \neq 0)$, то маємо лінійне рівняння відносно функції $x = x(y)$. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $x = u(y) \cdot v(y)$.

19.2. Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in R \ (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1). \qquad (19.11)$$

Якщо у (19.11) $\alpha = 0$, то одержуємо лінійне рівняння, а при $\alpha = 1$ – рівняння з відокремлюваними змінними.

Поділимо рівняння (19.11) на $y^{\alpha} \neq 0$: $y^{-\alpha} y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$ і зробимо заміну $z = y^{1-\alpha}$. Тоді $z' = \dfrac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha} y'$, звідки знаходимо $y^{-\alpha} y' = \dfrac{z'}{1-\alpha}$. Отже, рівняння набуває вигляду

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + p(x)z = q(x). \qquad (19.12)$$

Останнє рівняння є лінійним відносно z. Розв'язок його відомий. Таким чином, підстановка $z = y^{1-\alpha}$ зводить рівняння Бернуллі до лінійного. Зауважимо, що при $\alpha > 0$ розв'язком рівняння (19.11) буде також функція $y = 0$.

На практиці розв'язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його до лінійного рівняння.

Приклад 19.2. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $y^2 \neq 0$: $xy'y^{-2} + y^{-1} = \ln x$.

Робимо заміну $z(x) = y^{-1}$, $z' = -\dfrac{1}{y^2} y'$. Тоді рівняння набуває вигляду

$$-xz' + z = \ln x \Rightarrow z' - \frac{1}{x} z = -\frac{\ln x}{x}.$$

Останнє рівняння є лінійним відносно функції $z(x)$ і його можна розв'язати методом Лагранжа (19.1.1) або методом Бернуллі (19.1.2). Застосуємо, наприклад, перший з них, а саме, виконаємо наступні дві дії:

1. $z' - \dfrac{1}{x} z = 0$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x}$, $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$, $\ln|z| = \ln|Cx|$, $z = Cx$.

2. $z=C(x)x$, $\quad z'=C'(x)+C(x)\Rightarrow C'(x)x+C(x)-\frac{1}{x}C(x)x=-\frac{\ln x}{x}$,

$$C'(x)x=-\frac{\ln x}{x},\qquad C'(x)=-\frac{\ln x}{x^2},\qquad C(x)=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\begin{vmatrix} u=\ln x & dv=\dfrac{dx}{x^2}\\ du=\dfrac{1}{x}dx & v=-\dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=$$

$$=-\left(\ln x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+\int\frac{dx}{x^2}\right)=\ln x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+C_1.$$

Отже, $z=\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+C_1\right)\cdot x=\ln x+1+C_1x$. Тоді загальний розв’язок рівняння матиме вигляд $y=z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{\ln x+1+C_1x}$; $y=0$.

Приклад 19.3. Знайти розв’язок задачі Коші: $y'-\frac{y}{x}=x^2y^2$, $y(1)=1$.

Розв’язання. Загальний розв’язок рівняння Бернуллі будемо шукати у вигляді $y=uv$. Тоді $y'=u'v+v'u$. Маємо

$$u'v+v'u-\frac{uv}{x}=x^2(uv)^2,$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=x^2u^2v^2\Rightarrow\begin{cases} v'-\dfrac{v}{x}=0,\\ u'v=x^2u^2v^2.\end{cases}$$

Розв’яжемо перше рівняння системи: $v'-\frac{v}{x}=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}\Rightarrow\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}\Rightarrow$ $\ln|v|=\ln|x|\Rightarrow v=x\ (C=0)$.

Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$$u'v=x^2u^2v^2\Rightarrow\quad u'x=x^2u^2x^2\Rightarrow\quad u'=u^2x^3\Rightarrow\quad\frac{du}{dx}=u^2x^3\Rightarrow\quad\frac{du}{u^2}=$$

$$=x^3dx\Rightarrow-\frac{1}{u}=\frac{x^4}{4}+C\Rightarrow\ u=-\frac{4}{x^4+4C}.$$

Отже, загальний розв’язок рівняння Бернуллі має вигляд:

$$y=uv=-\frac{4}{x^4+4C}\cdot x=-\frac{4x}{x^4+4C}.$$

Для визначення частинного розв'язку рівняння накладемо початкову умову: якщо $x = 1$, то $y = 1$. Тоді $-\dfrac{4}{1+4C} = 1$, звідки $-4 = 4C + 1 \Rightarrow C = -\dfrac{5}{4}$. Підставимо отримане значення C у загальний розв'язок рівняння і отримаємо частинний розв'язок $y = -\dfrac{4x}{x^4 - 5} = \dfrac{4x}{5 - x^4}$.

19.3. Розв'язування задач за допомогою диференціальних рівнянь

19.3.1. Побудова диференціальних моделей природничих наук

Як уже говорилося (лекція 17, п. 17.2), диференціальні рівняння є одним з найбільш ефективних засобів математичного моделювання багатьох прикладних задач.

Розв'язуючи задачі фізики, теоретичної механіки, хімії чи інших природничих наук за допомогою диференціальних рівнянь, виділяють такі три етапи: а) побудова диференціального рівняння; б) інтегрування цього рівняння; в) дослідження отриманого розв'язку.

У багатьох випадках побудова диференціального рівняння ***першого порядку*** ґрунтується на так званій «лінійності процесу у малому», тобто на диференційовності функцій, які виражають залежність величин. Як правило, можна рахувати, що всі величини, які беруть участь у певному процесі протягом малого проміжку часу, змінюються зі сталою швидкістю. Це дозволяє застосовувати відомі закони, які описують явища, що протікають рівномірно, для утворення співвідношення між значеннями $(t, t + \Delta t)$, тобто величинами, які беруть участь у процесі, та їх приростами. Якщо перейти в одержаній рівності до границі, коли $\Delta t \to 0$, то отримаємо точну рівність, а саме, диференціальне рівняння, яке описує задане явище.

Зауваження 19.3. Складаючи диференціальне рівняння, ми робимо ніби «миттєвий кадр» процесу у заданий момент часу, а потім, розв'язуючи рівняння, відновлюємо перебіг процесу. Отже, у процесі розв'язування прикладних задач наведеним методом лежить загальна ідея лінеаризації – заміни функцій на малих проміжках зміни аргументу лінійними функціями.

Розглянемо декілька конкретних прикладів розв'язування диференціальних рівнянь, що були складені в задачах прикладного характеру, умови яких наведені в лекції 17 (п.17.2).

Приклади.

1. (***Про радіоактивний розпад*** – лекція 17, задача 1).

Закон розпаду радію отримано у вигляді (17.3): $\frac{d\,q(t)}{dt} = -k\,q(t)$.

Інтегруючи це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, дістаємо:

$$\begin{gathered}\frac{dq}{q} = -kdt \Rightarrow ln|q| = -kt + ln\,C \Rightarrow \\ ln\left|\frac{q}{c}\right| = -kt \Rightarrow q = Ce^{-kt}.\end{gathered} \tag{19.13}$$

Нехай q_0 – кількість радію в момент часу $t = t_0$. Тоді $q_0 = Ce^{-kt_0}$, звідки $C = q_0 e^{kt_0}$. Підставимо знайдене значення C у (19.13): $q = q_0 e^{-k(t-t_0)}$. Якщо $t_0 = 0$, то $q = q_0 e^{-kt}$. Це і є закон зміни початкової маси радію.

2. (***Про охолодження тіла*** – лекція 17, задача 2).

Рівняння, що описує закон охолодження тіла, має вигляд (17.4):

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1)$$

і є також рівнянням з відокремлюваними змінними. Інтегруючи це рівняння, отримаємо:

$$\frac{dT}{T - T_1} = -kdt \Rightarrow ln|T - T_1| = -kt + ln\,C \Rightarrow$$

$$ln\left|\frac{T - T_1}{C}\right| = -kt \Rightarrow T = Ce^{-kt} + T_1. \tag{19.14}$$

Враховуючи початкову умову $T(0) = T_0$ з (19.14) знаходимо, що $C = T_0 - T_1$, а отже, остаточно виводимо закон зміни температури тіла залежно від часу:

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}.$$

3. (***Про форму дзеркала*** – лекція 17, задача 3).

Диференціальні рівняння (17.5)

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y},$$

одержане в лекції 17 у задачі 3 про форму дзеркала, яке збирає паралельні промені в одну точку, є однорідним. Розв'яжемо його за допомогою заміни $y = ux$. Тоді

$$u'x + u = \frac{\sqrt{x^2 + u^2x^2} - x}{ux} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+u^2} - 1}{u} - u \Rightarrow$$

$$\int \frac{udu}{\sqrt{1+u^2} - 1 - u^2} = \int \frac{dx}{x} + ln\, C_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+u^2\right)}{\sqrt{1+u^2} - \left(1+u^2\right)} = ln|x| + ln\, C_1.$$

Оскільки $\displaystyle\int \frac{d\left(1+u^2\right)}{\sqrt{1+u^2} - \left(1+u^2\right)} = \left|\begin{matrix} 1+u^2 = t^2 \\ 2udu = 2tdt \end{matrix}\right| = \int \frac{2tdt}{t - t^2} = 2\int \frac{dt}{1-t} - =$

$= -2\, ln|t-1| + \overline{C} = -2\, ln\left|\sqrt{1+u^2} - 1\right| + \overline{C}$, то $-\, ln\left|\sqrt{1+u^2} - 1\right| = ln|xC_1| \Rightarrow$

$$\sqrt{1+u^2} - 1 = \frac{C}{x}\ \left(C = \frac{1}{C_1}\right) \Rightarrow u^2 = \left(\frac{C}{x}\right)^2 + \frac{2C}{x} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C^2 + 2Cx}{x^2} \Rightarrow$$

$y^2 = 2Cx + C^2$.

Отже, маємо рівняння осьового перерізу дзеркала площиною Oxy: $y^2 = 2Cx + C^2$. Одержали сім'ю парабол з вершинами у точках $\left(-\frac{C}{2};0\right)$, а тому поверхня дзеркала як поверхня обертання осьового перерізу навколо осі Ox має вигляд $y^2 + z^2 = 2Cx + x^2$, тобто шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання.

4. (***Про закон ефективності реклами*** – лекція 17, задача 4).

Математична модель закону ефективності реклами має вигляд диференціального рівняння (17.5)

$$x'(t) = kx(N_0 - x).$$

Це рівняння є рівнянням Бернуллі (19.11):

$$x' = kxN_0 - kx^2 \Rightarrow x' - kN_0x = -kx^2.$$

Користуючись підстановкою $x = uv$, дістаємо два рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' - kN_0 v = 0 \\ u'v = -kx^2. \end{cases}$$

Перше з них має розв'язок $v = e^{kN_0 t}$. Тоді друге рівняння матиме вигляд $\frac{du}{dt} = -ku^2 e^{kN_0 t}$. Інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$-\frac{1}{u} = -\frac{e^{kN_0 t}}{N_0} - \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{Ce^{kN_0 t} + N_0}{N_0 C} \Rightarrow u = \frac{N_0 C}{N_0 + Ce^{kN_0 t}}.$$

Отже, $x = uv = \dfrac{e^{kN_0 t} \cdot N_0 C}{N_0 + Ce^{kN_0 t}}$.

Враховуючи початкову умову $x(0) = \dfrac{N_0}{a}$, знаходимо $C = \dfrac{N_0}{a-1}$. Тоді

$$x = \frac{N_0}{1 + (a-1)e^{-kN_0 t}}.$$

Схематичний вигляд графіка цієї функції показано на рис. 19.1.

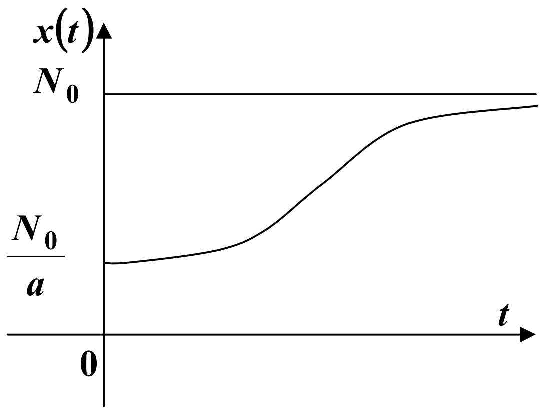

Рис. 19.1

Графік функції (19.15) нагадує видовжену літеру S, його називають ***логістичною кривою***. Пряма $x = N_0$ є асимптотою цієї кривої. Такою кривою зображують також динаміку чисельності популяції (населення, бактерій тощо). У цьому випадку відповідне диференціальне рівняння називають ***рівнянням Ферхюльста-Перла***. Воно описує залежність зростання чисельності популяції при регульованому розмноженні.

Зауваження 19.4. На сьогоднішній день є чимало спеціальних математичних комп'ютерних програм, які дозволяють розв'язувати різноманітні математичні задачі. Математичний пакет MathCad орієнтований, перш за все, на здійснення числових розрахунків, пакет MATLAB створений для роботи з числовими матрицями і векторами. Пакети Maple, Mathematical розраховані на здійснення символьних (тобто аналітичних) обчислень.

Практично всі ці пакети дозволяють розв'язувати диференціальні рівняння числовими (наближеними) методами. Остання група математичних пакетів дозволяє також знайти точний (аналітичний) розв'язок у тих випадках, коли рівняння інтегруються в скінченному вигляді.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №23. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

23.1. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x),$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – довільні неперервні функції.

Якщо $q(x) \neq 0$, то рівняння називають лінійним неоднорідним, а при $q(x) \equiv 0$ – лінійним однорідним.

Використовують два методи розв'язання лінійних диференціальних рівнянь: метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) і метод підстановки (метод Бернуллі) (Лекція 19).

Приклад 23.1. Методом варіації довільних сталих розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$.

Розв'язання. У даному рівнянні $p(x) = -\frac{2}{x}$, $q(x) = 2x^3$. Запишемо і розв'яжемо лінійне однорідне диференціальне рівняння $y' - \frac{2y}{x} = 0$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x},\quad \frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x},\quad \int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x},\quad ln|y|=2\,ln|x|+ln\,C\,,\quad ln|y|=ln\left|C\cdot x^2\right|,$$

$y=Cx^2$.

Будемо тепер розшукувати розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді $y=C(x)\cdot x^2$.

Звідки $y'=C'(x)\cdot x^2+C(x)\cdot 2x$.

Підставимо y і y' у задане рівняння

$$C'(x)\cdot x^2+2C(x)\cdot x-\frac{2C(x)\cdot x^2}{x}=2x^3,$$

$$C'(x)=2x,$$

$$C(x)=\int 2xdx=x^2+C_1\ .$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд: $y=\left(x^2+C_1\right)\cdot x^2$.

Приклад 23.2. Розв'язати методом Бернуллі диференціальне рівняння із приклада 1.

Розв'язання. У рівнянні $y'-\dfrac{2y}{x}=2x^3$ робимо підстановку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'-\frac{2uv}{x}=2x^3,$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x}\right)=2x^3.$$

Будемо вважати, що вираз у дужках у лівій частині рівняння дорівнює нулю. Тоді отримаємо систему диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v'-\dfrac{2v}{x}=0, \\ u'v=2x^3. \end{cases}$$

Знайдемо, спочатку, розв'язок першого рівняння:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x},\quad \frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x},\quad \int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x},\quad ln|v|=2\,ln|x|,\ ln|v|=ln\left|x^2\right|,\ v=x^2.$$

Ми вибрали за $v(x)$ частинний розв'язок, поклавши $C = 0$.

Підставимо знайдений розв'язок в друге рівняння системи:

$$u'x^2 = 2x^3, \quad u' = 2x, \quad u = \int 2xdx = x^2 + C.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = \left(x^2 + C\right) \cdot x^2$.

Приклад 23.3. Розв'язати рівняння $\left(x^2 + 1\right)y' + 4xy = 1$.

Розв'язання. Це рівняння є лінійним. Його можна записати у вигляді

$$y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Розв'яжемо його методом Бернуллі. Виконуємо підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{4xuv}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}, \qquad u'v + u\left(v' + \frac{4xv}{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{4xv}{x^2 + 1} = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{x^2 + 1}. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння:

$$v' + \frac{4xv}{x^2 + 1} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{4xv}{x^2 + 1}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{4xdx}{x^2 + 1}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{4xdx}{x^2 + 1},$$

$$ln|v| = -2\,ln\left|x^2 + 1\right|, \quad ln|v| = ln\left(x^2 + 1\right)^{-2}, \quad v = \frac{1}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

Підставимо знайдений розв'язок в друге рівняння системи:

$$\frac{u'}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{1}{x^2 + 1}, \qquad u' = x^2 + 1, \quad u = \int \left(x^2 + 1\right)dx = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

Отже, $y = \dfrac{x^3 + 3x + 3C}{3\left(x^2 + 1\right)^2}$.

Приклад 23.4. Розв'язати задачу Коші $y' + y \cdot tgx = cos^2 x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. Задане рівняння лінійне неоднорідне. Розв'яжемо його методом варіації довільної сталої. Відповідне йому лінійне однорідне рівняння має вигляд $y' + y \cdot tgx = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -ytgx, \qquad \frac{dy}{y} = -tgxdx, \qquad \int \frac{dy}{y} = -\int tgxdx, \qquad ln|y| = ln|cos\,x| + ln\,C,$$

$$ln|y| = ln|C\,cos\,x|, \quad y = C\,cos\,x.$$

Шукаємо розв'язок заданого рівняння у вигляді $y = C(x)cos\,x$. Звідки $y' = C'(x)cos\,x - C(x)sin\,x$.

Підставляємо y і y' в задане рівняння.

$$C'(x)cos\,x - C(x)sin\,x + C(x)cos\,x \cdot tgx = cos^2\,x,$$

$$C'(x)cos\,x = cos^2\,x, \quad C'(x) = cos\,x, \quad C(x) = \int cos\,xdx = sin\,x + C_1.$$

Таким чином, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = (sin\,x + C_1) \cdot cos\,x$.

Підставимо в цей вираз початкові умови:

$$\frac{1}{2} = \left(sin\frac{\pi}{4} + C_1 \right) \cdot cos\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + C_1 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad C_1 = 0.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд: $y = sin\,x \cdot cos\,x$, або $y = \frac{1}{2} sin\,2x$.

Приклад 23.5. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y' - \frac{y}{x\,ln\,x} = 2x\,ln\,x, \quad y(e) = 2e^2.$$

Розв'язання. Це лінійне рівняння, розв'яжемо його методом Бернуллі. Зробимо підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Тоді

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x\,ln\,x} = x\,ln\,x, \qquad u'v = u\left(v' - \frac{v}{x\,ln\,x} \right) = 2x\,ln\,x,$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x\,ln\,x} = 0, \\ u'v = 2x\,ln\,x. \end{cases}$$

Розв’яжемо переш рівняння системи:

$$v' = \frac{v}{x\,ln\,x}, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x\,ln\,x}, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x\,ln\,x}, \qquad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x\,ln\,x}, \quad ln|v| = ln|ln\,x|,$$

$v = ln\,x$. Підставимо отриманий розв’язок в друге рівняння $u'\,ln\,x = 2x\,ln\,x$, $u' = 2x$, $u = 2\int xdx = x^2 + C$.

$y = \left(x^2 + C\right)ln\,x$ – загальний розв’язок рівняння.

Підставляємо початкової умови:

$2e^2 = \left(e^2 + C\right)\cdot ln\,e$, $C = e^2$.

Отже, $y = \left(x^2 + e^2\right)\cdot ln\,x$ – частинний розв’язок.

Приклад 23.6. Розв’язати задачу Коші:

$$y'\sqrt{1 - x^2} + y = arcsin\,x, \quad y(0) = 0.$$

Розв’язання. Розділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{1 - x^2}$. Дістанемо: $y' + \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{arcsin\,x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Зробимо підстановку $y = uv;$ $\quad y' = u'v + uv'$,

$$u'v + uv' + \frac{uv}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{arcsin\,x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$u\left(v' + \frac{v}{\sqrt{1 - x^2}}\right) + u'v = \frac{arcsin\,x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{\sqrt{1 - x^2}} = 0, \\ u'v = \dfrac{arcsin\,x}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{cases}$$

Розв’язуємо перше рівняння:

$$v' = -\frac{v}{\sqrt{1 - x^2}} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{\sqrt{1 - x^2}} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \;\Rightarrow\; \int\frac{dv}{v} =$$

$$= \int\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \quad ln\,v = -arcsin\,x \quad \Rightarrow \quad v = e^{-arcsin\,x}.$$

Підставимо знайдене значення v у друге рівняння:

$$u' e^{-\arcsin x} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{e^{\arcsin x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\int du = \int \frac{\arcsin x \cdot e^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\int \frac{\arcsin x \cdot e^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \int t e^t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u_1 = t, & du_1 = dt, \\ dv_1 = e^t dt, & v_1 = \int e^t dt = e^t \ , \\ \int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1. & \end{array} \right| = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C =$$

$$= \arcsin x \, e^{\arcsin x} - e^{\arcsin x} + C.$$

Отже, $u = \arcsin x \, e^{\arcsin x} - e^{\arcsin x} + C$.

Тоді, загальний розв’язок лінійного рівняння має вигляд: $y = \left(\arcsin x \, e^{\arcsin x} - e^{\arcsin x} + C\right) e^{-\arcsin x}$ або $y = \arcsin x - 1 + C\, e^{-\arcsin x}$.

Підставимо в цей вираз початкові умови: $0 = \arcsin 0 - 1 + C\, e^{-\arcsin 0} \quad \Rightarrow \quad C = 1$.

Отже $y = \arcsin x - 1 + e^{-\arcsin x}$ – частинний розв’язок лінійного рівняння.

Зауваження 23.1. Може статися, що диференціальне рівняння буде лінійним тільки після того, як поміняти ролями незалежну змінну x і шукану функцію y, тобто записати це рівняння у вигляді $\dfrac{dx}{dy} + f(y)x = g(x)$.

Приклад 23.7. Розв’язати рівняння $\left(x + y^3\right) y' = y$.

Розв’язання. Відносно функції $y(x)$ рівняння не є лінійним (воно містить доданок y^3). Але відносно функції $x(y)$ це рівняння є лінійним.

Дійсно: $\left(x + y^3\right)\dfrac{dy}{dx} = y \Rightarrow x + y^3 = \dfrac{dx}{dy} \cdot y \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} \cdot y - x = y^3 \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} = y^2$.

Розв'яжемо отримане рівняння методом Бернуллі, тобто зробимо підстановку $x = uv$ (u і v тепер є функціями аргумента y) і $\frac{dx}{dy} = v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy}$.

$$v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy} - \frac{uv}{y} = y^2, \quad v\frac{du}{dy} + u\left(\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y}\right) = y^2,$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = 0, \\ v\frac{du}{dy} = y^2. \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dy}{y} \Rightarrow ln|v| = ln|y| \Rightarrow v = y.$$

$$y\frac{du}{dy} = y^2 \Rightarrow \frac{du}{dy} = y \Rightarrow u = \int ydy = \frac{y^2}{2} + C.$$

Тепер можна записати загальний розв'язок даного рівняння $(x = u \cdot v)$:

$$x = \left(\frac{y^2}{2} + C\right) \cdot y.$$

23.2. Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називають рівняння вигляду $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, де $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. Якщо $\alpha = 0$, то рівняння є лінійним неоднорідним, а при $\alpha = 1$ одержуємо лінійне однорідне рівняння, у якому завжди відокремлюються змінні.

При розв'язанні рівняння Бернуллі зручно використовувати метод підстановки (метод Бернуллі).

Приклад 23.8. Розв'язати рівняння $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Зробимо підстановку $y = u \cdot v$, тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2u^2v^2, \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^2u^2v^2.$$

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = x^2u^2v^2. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння: $v' + \dfrac{v}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x} \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} =$
$= -\int \dfrac{dx}{x} \Rightarrow ln|v| = -ln|x| \Rightarrow v = \dfrac{1}{x}$.

Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$$u'\frac{1}{x} = x^2u^2 \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow u' = x \cdot u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = x \cdot u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = xdx \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int xdx \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow -\frac{1}{u} = \frac{x^2 + 2C}{2} \Rightarrow u = -\frac{2}{x^2 + 2C}.$$

$$y = u \cdot v = -\frac{2}{x\left(x^2 + 2C\right)}.$$

Приклад 23.9. Розв'язати рівняння $y' - \dfrac{2y}{x} = x\sqrt{y}$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Зробимо підстановку $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = x\sqrt{uv}, \qquad u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = x\sqrt{uv}.$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2v}{x} = 0 \\ u'v = x\sqrt{uv}. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння:

$$v' = \frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow ln|v| = 2\,ln|x| \Rightarrow \; v = x^2.$$

Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$$u' \cdot x^2 = x\sqrt{ux^2} \Rightarrow u' = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = dx \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int dx \Rightarrow 2\sqrt{u} = x + C \Rightarrow$$

$$u = \frac{(x + C)^2}{4}.$$

$$y = u \cdot v = \frac{x^2(x + C)^2}{4}.$$

Приклад 23.10. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3 + 1} = \left(1 + x^3\right) y^2 \sin x$, $y(0) = 1$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Нехай $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{3x^2 uv}{x^3 + 1} = \left(1 + x^3\right) u^2 v^2 \sin x,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{3x^2 v}{x^2 + 1}\right) = \left(1 + x^3\right) u^2 v^2 \sin x.$$

$$\begin{cases} v' + \dfrac{3x^2 v}{x^3 + 1} = 0, \\ u'v = \left(1 + x^3\right) u^2 v^2 \sin x. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння:

$$v' = -\frac{3x^2 v}{x^3 + 1} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{3x^2 v}{x^3 + 1} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} \Rightarrow \ln|v| = -\ln\left|x^3 + 1\right| \Rightarrow$$

$$v = \left(x^3 + 1\right)^{-1} \Rightarrow v = \frac{1}{x^3 + 1}.$$

Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$$u' \cdot \frac{1}{x^3 + 1} = \left(1 + x^3\right) \cdot u^2 \cdot \frac{\sin x}{\left(x^3 + 1\right)^2} \Rightarrow u' = u^2 \cdot \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^2 \sin x \Rightarrow \frac{du}{u^2} =$$

$$= \sin x dx \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \sin x dx \Rightarrow -\frac{1}{u} = -\cos x - C \Rightarrow \frac{1}{u} = \cos x + C \Rightarrow u = \frac{1}{\cos x + C}.$$

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = \dfrac{1}{(\cos x + C)\left(x^3 + 1\right)}$.

Підставимо в цей вираз початкові умови:

$$1 = \frac{1}{(\cos 0 + C)(0 + 1)}, \quad 1 = \frac{1}{1 + C} \Rightarrow C = 0.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = \dfrac{1}{\left(x^3 + 1\right)\cos x}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння:

а) $y' - ytgx = \dfrac{1}{cos\, x}$; б) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^2$;

в) $y + y cos\, x = e^{-sin\, x}$; г) $xy' - 2y + x^2 = 0$.

2. Знайти розв'язок задачі Коші:

а) $xy' + y = ln\, x + 1$, $y(1) = 3$;

б) $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.

3. Розв'язати рівняння Бернуллі:

а) $xy^2 y' = x^2 + y^3$;

б) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$, $y(0) = \dfrac{9}{4}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 24. ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ НА СКЛАДАННЯ І ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Складання диференціального рівняння за умовою задачі (геометричної, фізичної або технічної) полягає у знаходженні математичної залежності між незалежною змінною, шуканою функцією та її похідною.

При складанні диференціальних рівнянь в геометричних задачах часто може бути використаний геометричний зміст похідної як кутовий коефіцієнт дотичної до кривої. Це дозоляє в багатьох випадках зразу знайти співвідношення між ординатою y шуканої кривої, її абсцисою x та кутовим коефіцієнтом дотичної y', тобто скласти диференціальне рівняння.

При розв'язуванні задач фізичного характеру, що приводять до диференціальних рівнянь, основна трудність полягає, як правило, у складанні самих диференціальних рівнянь. Кожна задача потребує свого підходу, що побудований на знаннях відповідних законів фізики.

Розглянемо деякі з цих задач.

Задача 24.1. Знайти та побудувати криву, яка проходить через точку $M(0;1)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює $-\dfrac{x}{4y}$.

Розв'язання. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці (x, y) дорівнює y', то маємо рівняння $y' = -\dfrac{x}{4y}$.

Це рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними.

$$y' = -\frac{x}{4y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \Rightarrow ydy = -\frac{x}{4}dx \Rightarrow \int ydy = -\frac{1}{4}\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} =$$

$$= -\frac{x^2}{8} + C.$$

З початкових умов $x = 0$, $y = 1$ знаходимо, що $C = \dfrac{1}{2}$.

Тоді $\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ – рівняння шуканої кривої. Це рівняння еліпса (рис. 24.1).

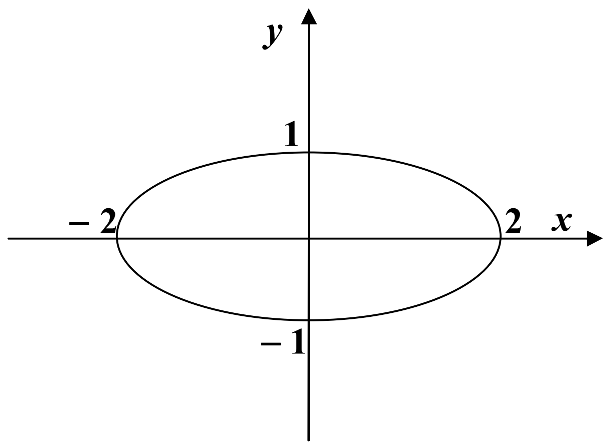

Рис. 24.1

Задача 24.2. Знайти криву, яка проходить через точку $(0;-3)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на 4.

Розв'язання. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці (x, y) дорівнює y', то маємо рівняння $y' = y + 4$.

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його.

$$\frac{dy}{dx} = y + 4, \quad \frac{dy}{y+4} = dx, \quad \int \frac{dy}{y+4} = \int dx, \quad ln|y+4| = x + C.$$

Враховуючи початкову умову $(x = 0, y = -3)$, дістаємо: $ln|-3+4| = C \Rightarrow$ $\Rightarrow C = 0$. Тоді $ln|y+4| = x \Rightarrow y = e^x - 4$ – рівняння шуканої кривої.

Задача 24.3. Знайти криву, що проходить через точку $(4;1)$, якщо відомо, що відрізок будь-якої дотичної до неї, розташований між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.

Розв'язання. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка кривої $y = f(x)$. Для визначеності будемо вважати, що крива розміщена в першій чверті.

Для складання диференціального рівняння використаємо геометричний зміст похідної: $tg\alpha$ є кутовий коефіцієнт дотичної, у точці $M(x, y)$ він дорівнює y', тобто $y' = tg\alpha$.

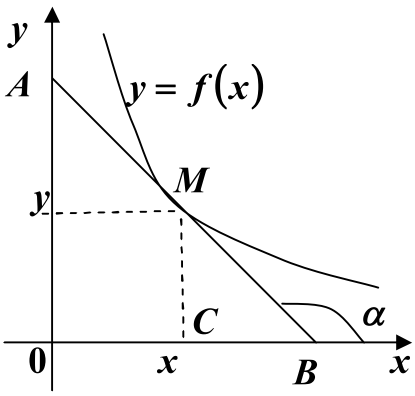

Рис. 24.2

Із рисунка 24.2 видно, що $tg(\angle MBC) = \frac{|MC|}{|BC|}$, але $tg(\angle MBC) = tg(180^\circ - \alpha) = -tg\alpha$.

$|MC| = y$. За умовою задачі $|AM| = |MB| \Rightarrow |OC| = |CB| = x$. Таким чином, отримуємо, що $tg\alpha = -\frac{y}{x}$ або $y' = -\frac{y}{x}$. Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln|y| = -ln|x| + ln\,C \Rightarrow y = \frac{C}{x}.$$

Враховуючи початкову умову $(x = 4, y = 1)$, отримаємо $1 = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4$.

$y = \frac{4}{x}$ – рівняння шуканої кривої (гіперболи).

Задача 24.4. У резервуарі знаходиться 100 л розчину солі. До нього вливається чиста вода зі швидкістю $q = 5$ л/хв., а розчин вибігає з цією ж швидкістю. У початковий момент часу розчин мав $m_0 = 10$ кг солі. Скільки солі буде знаходитися у резервуарі через 20 хвилин після початку процесу?

Розв'язання. Об'єм резервуара $V = 100$ л. В момент часу t в ньому знаходиться $m(t)$ кг солі, отже концентрація розчину дорівнює $\frac{m}{V}$ кг/л солі.

Об'єм, який має q літрів розчину вміщує $\frac{m}{V}q$ кг солі.

Рівняння процесу має вигляд $\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{V}q$.

Це є рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його.

$$\frac{dm}{m} = -\frac{q}{V}dt \Rightarrow \int\frac{dm}{m} = -\int\frac{q}{V}dt \Rightarrow ln|m| = -\frac{q}{V}\cdot t + ln\,C \Rightarrow m = Ce^{-\frac{q}{V}t}.$$

Якщо $t = 0$, то $m = m_0$, тобто $m_0 = Ce^{-\frac{q}{V}\cdot 0} \Rightarrow m_0 = C$, звідки $m = m_0 e^{-\frac{q}{V}t}$.

Таким чином, маса солі змінюється в залежності від часу за законом. $m = m_0 e^{-\frac{q}{V}t}$.

За час $t = 20$ хв. розчин буде вміщувати солі $m = 10e^{-\frac{5}{100}\cdot 20} = \frac{10}{e} \approx 3{,}68$ кг.

Задача 24.5. Визначати, за який час тіло, нагріте до 100°C, охолодиться до 25°C в кімнаті з температурою 20°C, якщо до 60°C воно охолоджується за 10 хвилин.

Розв'язання. Відомо, що швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та навколишнього середовища. Диференціальне рівняння, яке описує цей процес має вигляд

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20),$$

де T – температура тіла, t – час, k – коефіцієнт пропорційності $(k > 0)$. Знак "мінус" записано тому, що температура тіла знижується, а похідна спадної функції є від'ємною.

Відокремимо змінні в отриманому рівнянні та знайдемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dT}{T-20} = -k\,dt \Rightarrow ln|T-20| = -kt + C \Rightarrow T - 20 = e^{-kt+C} \Rightarrow T = 20 + C_1 e^{-kt},$$

де $C_1 = e^C$.

Використаємо умову, що при $t = 0$ температура тіла була 100°C і визначимо сталу C_1.

$$100 - 20 = C_1 e^{-k\cdot 0} \Rightarrow C_1 = 80.$$

Отже, частинним розв'язком рівняння є функція $T = 20 + 80e^{-kt}$.

Для визначення коефіцієнта k скористаємося другою умовою, а саме $T(10) = 60$. Тоді $60 = 20 + 80e^{-10k} \Rightarrow 40 = 80e^{-10k} \Rightarrow ln\frac{1}{2} = -10k \Rightarrow k = \frac{ln 2}{10}$.

Остаточно маємо такий розв'язок: $T = 20 + 80e^{-\frac{ln 2}{10}t}$.

Підставляючи сюди замість T значення 25°C, обчислимо шуканий час:

$$25 = 20 + 80e^{-\frac{ln 2}{10}t} \Rightarrow 5 = 80e^{-\frac{ln 2}{10}t} \Rightarrow \frac{1}{16} = -e^{-\frac{ln 2}{10}t} \Rightarrow -ln 16 = ln\, e^{-\frac{ln 2}{10}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\,ln 2 = \frac{ln 2}{10}t \Rightarrow t = 40 \text{ хв.}$$

Задача 24.6. Ізольованому проводу надається електричний заряд $Q = Q_0$. Внаслідок поганої ізоляції провід втрачає цей заряд. Швидкість втрати заряду за час t пропорційна наявному заряду. Знайти закон змінювання заряду.

Розв'язання. $\frac{dQ}{dt}$ – швидкість зміни заряду проводу. Згідно з умовою задачі $\frac{dQ}{dt} = -kQ \quad (k > 0)$, де k – коефіцієнт пропорційності. Початкові дані $Q|_{t=0} = Q_0$.

Розв'язуємо рівняння:

$$\frac{dQ}{Q}=-k\,dt\Rightarrow\int\frac{dQ}{Q}=-k\int dt\Rightarrow ln|Q|=-kt+ln\,C\Rightarrow ln|Q|-ln|C|=-kt\Rightarrow$$

$$ln\left|\frac{Q}{C}\right|=-kt\Rightarrow\frac{Q}{C}=e^{-kt},\ \ Q=Ce^{-kt}.$$

З початкової умови випливає, що $C=Q_0$. Таким чином, закон змінювання електричного заряду має вигляд

$$Q=Q_0e^{-kt}.$$

Задача 24.7. Циліндрична котушка вироблена з мідного дроту. При проходженні крізь котушку електричного струму виділяється теплота. Вивести формулу для температури $T=T(t)$ установленого режиму як функції часу.

Розв'язання. Нехай T_0 – температура середовища у якому знаходиться котушка, $T(0)=T_0$; C – питома теплоємкість міді, j – густина, V – обсяг, S – площина поверхні котушки, q – кількість тепла, що виділяється на протязі одиниці часу, k – коефіцієнт теплопровідності.

Кількість теплоти, що виділяється за час Δt дорівнює $q\cdot\Delta t$. Ця величина складається з двох частин: теплоти, яка йде на підвищення температури котушки та теплоти, яка надходить в навколишнє середовище, що оточує котушку. Перша частина дорівнює $cVj\Delta T$, а друга $kS(T-T_0)\Delta t$, звідки $q\Delta t=cVj\,\Delta T+kS(T-T_0)\Delta t$.

Поділивши обидві частини отриманої рівності на Δt та переходячи до границі при $\Delta t\to 0$, отримуємо диференціальне рівняння.

$$q=cVj\frac{dT}{dt}+kS(T-T_0),\ \frac{dT}{dt}=-\alpha(T-T_0)+\beta,\text{ де }\alpha=\frac{kS}{cVj},\ \beta=\frac{q}{cVj}.$$

Розділяючи змінні та інтегруючи одержимо:

$$\frac{dT}{-\alpha(T-T_0)+\beta}=dt\Rightarrow\int\frac{dt}{-\alpha(T-T_0)+\beta}=\int dt\Rightarrow-\frac{1}{\alpha}ln\left|T-T_0-\frac{\beta}{\alpha}\right|=t+$$

$$+C.$$

Оскільки $T(0)=T_0$, $C=-\frac{1}{\alpha}ln\frac{\beta}{\alpha}$, тому $-\frac{1}{\alpha}ln\left|T-T_0-\frac{\beta}{\alpha}\right|=t-\frac{1}{\alpha}ln\frac{\beta}{\alpha}$,

$$ln\left|T-T_0-\frac{\beta}{\alpha}\right|=ln\frac{\beta}{\alpha}-t\alpha.$$

$$T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha} = e^{ln\frac{\beta}{\alpha} - t\alpha}, \qquad T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} e^{-t\alpha},$$

$$T = T_0 + \frac{\beta}{\alpha}\left(1 + e^{-t\alpha}\right), \text{ або } T = T_0 + \frac{q}{kS}\left(1 + e^{-\frac{kS}{CVj}\cdot t}\right).$$

Задача 24.8. Електричне коло складається з послідовно ввімкнених джерел постійного струму, що має напругу E, опору R, самоіндукції L та вимикача, який вмикається при $t = 0$. Визначити залежність $I(t)$ сили струму від часу.

Розв'язання. Для визначення сили струму в електричному колі з самоіндукцією використовують формулу $L\frac{dI}{dt} + RI = E$.

Це рівняння є лінійним відносно функції $I(t)$. Треба знайти його частинний розв'язок за умови $I(0) = 0$.

Зробимо підстановку $I(t) = u(t)\cdot v(t)$, тоді $I' = u'v + uv'$.

$$L(u'v + uv') + Ruv = E \Rightarrow Lu'v + Luv' + Ruv = E \Rightarrow Lu'v + u(Lv' + Rv) = E$$

$$\begin{cases} Lv' + Rv = 0, \\ Lu'v = E. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння.

$$L\frac{dv}{dt} = -Rv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{R}{L}dt \Rightarrow ln|v| = -\frac{R}{L}t \Rightarrow v = e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Тоді друге рівняння матиме вигляд

$$Le^{-\frac{R}{L}t}u' = E \Rightarrow u' = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow u = \int\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}dt = \frac{E}{L}\cdot\frac{L}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t} + C,$$

тобто $u = \frac{E}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t} + C$. Тоді $I = \left(\frac{E}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t} + C\right)\cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$.

Підставимо сюди початкову умову $I(0) = 0$ і обчислимо $C = -\frac{E}{R}$. Тоді $I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Оскільки функція $e^{-\frac{R}{L}t}$ практично спадає дуже швидко, то, відкидаючи її, отримаємо відомий з фізики закон Ома $I = \frac{E}{R}$.

Задача 24.9. Куля входить в дошку товщиною 10 см зі швидкістю 200 м/с, а вилітає з дошки, пробивши її, зі швидкістю 50 м/с. Знайти скільки часу тривав рух кулі через дошку, якщо опір дошки руху кулі пропорційний квадрату її швидкості.

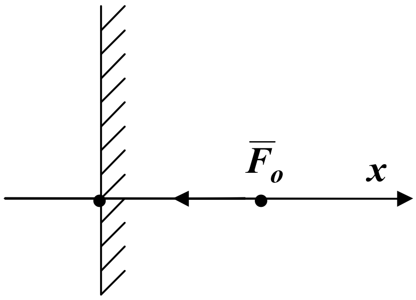

Рис. 24.3.

Розв'язання. Розглянемо кулю як матеріальну точку. Введемо систему координат, сумістивши її початок з точкою поверхні дошки, у яку влучає куля. Вісь x спрямована вздовж руху кулі. На матеріальну точку діє сила опору, яка спрямована проти руху кулі (іншими силами можна знехтувати) (рис 24.3).

Рівняння руху кулі вздовж осі Ox має вигляд $m\dfrac{d^2s}{dt}=-k\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$, де m – маса кулі, s – шлях, який проходить куля за час t, котрий відраховується від входу її у дошку.

Враховуючи, що $\dfrac{ds}{dt}=v$, перейдемо до рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними $m\dfrac{dv}{dt}=-kv^2$ або $\dfrac{dv}{dt}=-av^2$, де $a=\dfrac{k}{m}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{dv}{dt}=-av^2 \quad \Rightarrow \frac{dv}{v^2}=-adt \Rightarrow \int\frac{dv}{v^2}=-a\int dt \Rightarrow -\frac{1}{v}=-at-c_1 \Rightarrow v=\frac{1}{at+c_1}.$$

З початкових умов $v=200$ м/с при $t=0$, знайдемо сталу c_1: $200=\dfrac{1}{c_1}$, $c_1=\dfrac{1}{200}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти та побудувати криву, яка проходить через точку $M\ (x,y)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює $k=f(x,y)$.

а) $M(1,1)$, $k = 2\dfrac{y}{x}$;

б) $M\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$, $k = y\,ctg\,x$;

в) $M(0,1)$, $k = -2xy$.

2. За 1600 років маса радіоактивної речовини зменшилась на 50%. Через який час залишиться 1% початкової кількості цієї речовини, якщо відомо, що швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна її кількості?

3. Нехай температура повітря T залежно від висоти H змінюється за законом $\dfrac{dt}{dH} = -kT_0$, де T_0 – температура повітря на землі, k – стала. Визначити температуру повітря на висоті H.

4. У кімнаті, об'єм якої 200 м^3, міститься 0,15% вуглекислоти. З 1 хв. в кімнату вентилятор подає 20 м^3, що містить 0,04% вуглекислоти. Через який час місткість вуглекислоти в кімнаті зменшиться вдвічі?

5. У воді с температурою 20°С за 10 хвилин тіло охолоджується від 100°С до 50°С. За який час тіло охолодиться до 30°С, якщо за законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і охолоджуючої середи?

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2009. – 648 с.
2. Дубовик В. П. Вища математика : збірник задач : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003. – 480 с.
3. Овчинников П. П. та ін. Вища математика : підручник / П. П. Овчинников та ін. – К. : Техніка, 2003. – Ч. 2. – 600 с.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2000. – Ч. 2. – 252 с.

Навчальне видання

Щербина Ірина Володимирівна
Пасічник Ірина Володимирівна
Бас Тетяна Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 5

Навчальний посібник

Тем. план 2016, поз.

Підписано до друку . Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. . Умов. друк. арк. . Тираж 100 пр. Замовлення № 231.

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ