МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

**А.В. ПАВЛЕНКО, І.В. ПАСІЧНИК, А.Г. МОНЯ,
О.Є. ЗАПОРОЖЧЕНКО, О.А. ДИСКОВСЬКИЙ**

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина VI. Випадкові події

**Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 30.01.2012**

Дніпропетровськ НМетАУ 2012

УДК 517(07)
Вища математика в прикладах та задачах. Частина VI. Випадкові події: Навч. посібник /Укл.: А.В. Павленко, І.В. Пасічник, А.Г. Моня та ін. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 79 с.

Наведені докладні рекомендації до вивчення дисципліни «Вища математика», а саме, розділу «Теорія ймовірностей». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями та ілюстраціями, а також розв’язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання.

Іл. 6. Бібліогр.: 12 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Ю.Я. Годес, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)
Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)

ВСТУП

Відомо, що в основу сучасного промислового виробництва покладено масове виготовлення стандартних виробів із строго визначеними властивостями. До таких галузей, без сумніву, відноситься металургія. Проведення контролю якості одержаних виробів за допомогою серії випробувань пов'язано з дослідженням або кількісною оцінкою явищ, що формуються в результаті одночасного впливу багатьох чинників, перебіг яких неможливо передбачити. Вивчаючи такі явища, спостерігач може лише фіксувати той чи інший наслідок спостереження. Такі явища, перебіг яких при неодноразовому відтворенні одного і того ж досліду (експерименту) передбачити неможливо, називають *випадковими*. Та якщо провести велику кількість спостережень за випадковим явищем в одних і тих самих умовах, то можна помітити деякі закономірності.

Теорія ймовірностей – це математична наука, що вивчає об'єктивні закономірності масових випадкових явищ. Вона, як і будь-яка інша наука, виникла з практичної життєвої необхідності і є, на наш погляд, найбільш «експериментальною» з усіх математичних наук.

Мовою *теорії експерименту* є, безумовно, мова математичної статистики – математичної науки, яка вивчає методи збору та обробки результатів спостережень випадкових явищ для визначення їхніх закономірностей і характеристик.

Математична статистика, що опирається у своєму апараті на теорію ймовірностей, виникла і розвивалась паралельно з останньою. Предмет дослідження цих наук – випадкові явища або, як правило, випадкові величини – кількісні ознаки явищ. Водночас вихідні положення кожної науки істотно відрізняються. Так в теорії ймовірностей імовірнісна модель явища є відомою, і мова йде про прогнозування на її основі поводження цього явища в експерименті. На відміну від цього в математичній статистиці вихідними є дані спостережень досліджуваного явища, а кінцевим результатом – побудова його імовірнісної моделі.

Теорія ймовірностей та математична статистика складають методологічну основу таких нових наукових напрямків, як теорія випадкових процесів, економетричне моделювання, теорія планування експерименту, які інтенсивно розвиваються у останні десятиріччя. В цих дисциплінах, якщо абстрагуватися від конкретних прикладів, розглядаються теоретичні моделі, що можуть бути застосовані до будь-яких масових явищ у природі, суспільстві і техніці. В той же час знання загальних законів дає змогу зробити висновки про закономірності, що мають місце у кожному конкретному випадку. Уміння передбачати хід виробничого процесу або досліду, в яких присутні елементи випадковості, дає змогу впливати на його результати. Отже, опанування законів теорії ймовірностей та статистичних методів у наш час необхідне для кожного фахівця.

На жаль, названі розділи вищої математики входять у відповідний базовий курс для бакалаврів у дуже обмеженому обсязі. Автори посібника ставили за мету організацію позааудиторної самостійної роботи студентів з теорії ймовірностей та надання їм відповідної допомоги при виконанні домашніх завдань та підготовці до модульного контролю. Посібник написаний відповідно до програм дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для студентів інженерних спеціальностей, зокрема для студентів, які навчаються за професійним спрямуванням «Металургія» у вищих навчальних закладах.

Основне завдання посібника – допомогти студентам денної та заочної форм навчання опанувати цей достатньо складний матеріал, отримати навички з розв'язування типових задач та застосування основних ідей та методів теорії ймовірностей та математичної статистики для розв'язування професійних задач.

Посібник охоплює необхідний матеріал дисципліни і містить 10 тем. Він є шостою частиною навчального посібника «Вища математика в прикладах та задачах». У ньому розглядаються випадкові події та операції над ними, елементи комбінаторики, означення ймовірності, основні теореми теорії ймовірностей та їх наслідки (частина «Випадкові події»), випадкові величини та їх розподіли (частина «Випадкові величини»).

Структура кожної теми має єдину схему: надання теоретичного матеріалу, приклади розв'язання типових задач, завдання для самостійної роботи. Деякі з прикладів мають професійну спрямованість, що змінює представлення студентів молодших курсів про майбутню професію, розкриває її як наукоємну область, яка потребує володіння ймовірносно-статистичним апаратом. Розв'язання типових задач розраховане на використання їх при проведенні практичних занять в аудиторії, при виконанні індивідуальних домашніх завдань та контрольних робіт студентами заочної форми навчання. Відзначимо, що частина прикладів розв'язана за допомогою пакетів Mathcad та Excel. У кінці посібника наведені додатки і список рекомендованої літератури для самостійного вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей».

Автори виражають щиру подяку Лук'янець О.І. і Вишневській О.М. за допомогу у редагуванні рукопису, бажають успіхів студентам при вивченні навчального матеріалу і будуть вдячні усім, хто в тій чи іншій формі висловить свою думку стосовно змісту посібника та зауваження і пропозиції щодо його удосконалення.

1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. АЛГЕБРА ПОДІЙ. ФОРМУЛИ КОМБІНАТОРИКИ

1.1. Випадкові події, простір подій

Випробуванням (або ***дослідом, експериментом***) називають здійснення певного комплексу умов або дій, що можуть бути відтворені будь-яке число разів. Наприклад: а) однократне підкидання монети і фіксування грані, яка буде верхньою після падіння; б) підкидання грального кубика та фіксування числа очок, що випали; в) хімічний експеримент; г) випробування сортів сталі на здатність до глибокого відпускання за методом Еріксона; д) вибір випадкової точки на відрізку $[0,1]$ тощо.

Кожна подія, що може відбутися в результаті випробування і не розкладається на простіші, називається ***елементарною подією*** або ***елементарним виходом*** ω. Множину всіх елементарних виходів $\{\omega_i\}$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ позначають Ω і називають ***простором елементарних подій***, а самі елементарні події – точками цього простору.

Елементарні події взаємно виключають одна одну, і в результаті експерименту обов'язково відбувається одна з них.

Випадкова подія A (або просто ***подія***) – результат випробування, який при реалізації даного комплексу умов може відбутися чи не відбутися. Прикладами подій можуть бути: а) A - поява цифри при підкиданні монети; б) B - випадання трьох очок на верхній грані грального кубика; в) C - вибір точки $x = 0,2$, що належить відрізку $[0,1]$.

Елементарні події, при яких дана подія A настає, називаються ***подіями, сприятливими*** цій події A. Таким чином, випадкова подія A визначається відповідним їй набором сприятливих елементарних подій і є підмножиною простору Ω (наприклад, $A = A(\omega_i)$, $i = \overline{1,m}$, $m < n$).

1.2. Операції з випадковими подіями. Алгебра подій

Подія називається ***складною***, якщо її можна представити у вигляді суми або добутку інших подій. Якщо прості події, що утворюють складну, можна з'єднати сполученням « або », то ця складна подія є сумою простих подій, якщо ж прості події з'єднуються сполученням « і », то складна подія є їхнім добутком.

Сума (або ***об'єднання***) подій A та B ($A\bigcup B$, або $A+B$) – це подія, яка полягає в тому, що в результаті експерименту відбувається принаймні одна з подій A або B.

Добуток (або ***перетин***) подій A та B ($A\bigcap B$, або $A\cdot B$) – це подія, яка полягає в здійсненні в результаті експерименту і A , і B одночасно.

$A\setminus B$ - ***різниця*** подій A і B - це подія, яка полягає в тому, що відбувається A і не відбувається B.

Дві події називаються ***несумісними***, якщо $A\bigcap B=\varnothing$, тобто вони одночасно не відбуваються. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють ***повну групу*** подій, якщо: а) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$; б) $A_i\bigcap B_j=\varnothing,\ i\neq j$.

Кожній події A можна поставити у відповідність ***протилежну*** подію $\overline{A}$ (доповнення події A), яка відбувається тоді, коли A не відбувається. Очевидно, $A\bigcup\overline{A}=\Omega$, $A\bigcap\overline{A}=\varnothing$, тобто події A та $\overline{A}$ утворюють повну групу подій.

1.3. Формули комбінаторики

Комбінаторика вивчає методи підрахунку кількості можливих комбінацій, що відповідають певним умовам, які можна утворити з елементів заданої скінченої множини будь-якого походження.

Основний принцип комбінаторики. Нехай певну дію (вибір) можна виконати за l послідовних кроків. Якщо кількість способів, якими можна виконати перший, другий, третій і так до l-го етапу вибору, відповідно дорівнюють $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_l$ і не залежать від того, як виконувались попередні етапи, то кількість різних способів виконання всієї дії дорівнює добутку $r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot\ldots\cdot r_l$.

Перестановками з k елементів називаються такі групи елементів (сполуки), які відрізняються тільки порядком слідування цих елементів.

Формула для кількості ***перестановок*** з k ***елементів***:

$$P_k=k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=k!.$$

Формула для кількості ***перестановок з повторенням*** (коли переставляють k елементів, з яких k_1 елементів одного типу, k_2 - другого, …, k_l - l-го типу, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = k$):

$$\overline{P}_k\left(k_1, k_2, \ldots, k_l\right) = \frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_l!}.$$

Розміщеннями з s елементів по k елементів в кожному називаються такі сполуки, кожна з яких містить k елементів, і які відрізняються одна від одної або порядком слідування, або самими елементами.

Формула для кількості ***розміщень без повторень***:

$$A_s^k = \frac{s!}{(s-k)!} \quad (0 \le k \le s).$$

Якщо ж вибрані елементи можуть повторюватися, то ***розміщення з повтореннями*** обчислюються за формулою:

$$\overline{A}_s^k = s^k.$$

Сполученнями з s елементів по k в кожному називаються такі комбінації, з яких кожна складається з k елементів, і що відрізняються одна і від одної хоча б одним елементом.

Формула для кількості ***сполучень без повторень***:

$$C_s^k = \frac{s!}{(s-k)!\cdot k!} \quad (0 \le k \le s).$$

Якщо ж один і той самий елемент може входити в комбінацію більше ніж один раз, а порядок елементів значення не має, то число сполучень з повтореннями обчислюється за формулою:

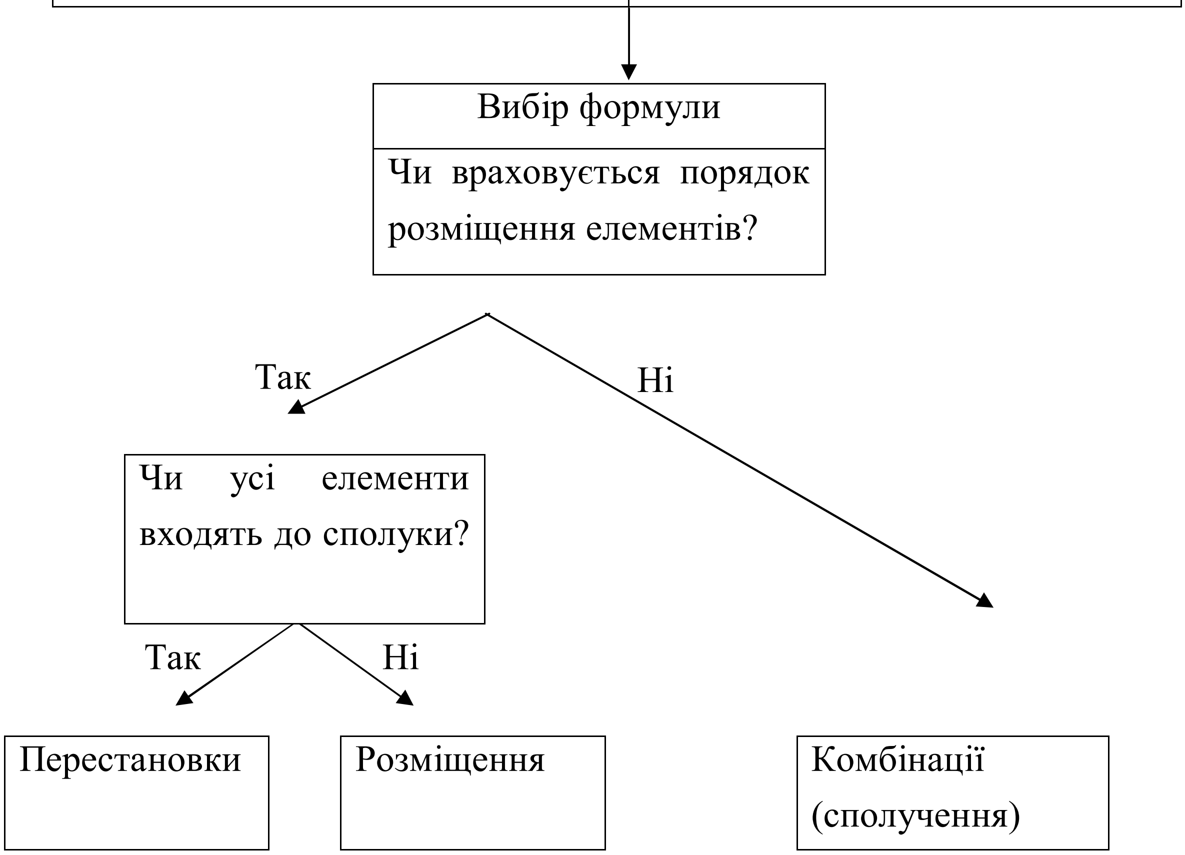
$$\overline{C}_s^k = C_{s+k-1}^k.$$

Зауваження 1. Слід пам’ятати, що $0! = 1$; $C_s^0 = 1$; $C_s^1 = s$; $C_s^k = C_s^{s-k}$.

Зауваження 2. Розміщення, перестановки та сполучення пов’язані між собою рівністю $A_s^k = P_k \cdot C_s^k = k!\dfrac{s!}{(s-k)!\cdot k!} = \dfrac{s!}{(s-k)!}$.

1.4. Схема розв’язування комбінаторних задач

Вибір правила	
Правило суми	Правило добутку
Якщо елемент $\boldsymbol{A}$ можна вибрати $\boldsymbol{n}$ способами, а після цього елемент $\boldsymbol{B}$ - $\boldsymbol{m}$ способами, то $\boldsymbol{A}$ або $\boldsymbol{B}$ можна вибрати $(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m})$ способами.	Якщо елемент $\boldsymbol{A}$ можна вибрати $\boldsymbol{n}$ способами, а елемент $\boldsymbol{B}$ - $\boldsymbol{m}$ способами, то $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ можна вибрати $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})$ способами.



Зразки розв’язування задач

1. Нехай експеримент полягає в однократному підкиданні грального кубика (кубик з однорідного матеріалу, грані якого перенумеровані $\mathbf{1,2,3,4,5,6}$). Записати простір елементарних подій цього експерименту. Описати події: а) $\boldsymbol{A}$ - поява парного числа очок; б) $\boldsymbol{B}$ - поява непарного числа очок; в) $\boldsymbol{C}$ - число очок, кратне $\mathbf{3}$; г) $\boldsymbol{D}$ - число очок, не більше $\mathbf{7}$; д) $\boldsymbol{F}$ - число очок, більше $\mathbf{6}$; є) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$; ж) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$; з) $\overline{\boldsymbol{B}}$; і) $\boldsymbol{G}$ - на верхній грані випало $\mathbf{2}$ очок.

Розв'язання. Простором елементарних подій цього експерименту є множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де елементарна подія ω_i - випадання конкретного числа i очок, $i = \overline{1,6}$. Простір Ω можна записати ще так: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Для стандартного грального кубика з однорідного матеріалу правильної кубічної форми кожна елементарна подія ***рівноможлива***. Крім того, елементарні виходи ω_i при одному киданні ***несумісні*** (вони не можуть відбутися разом в одному і тому ж досліді).

а) Сприятливими для події A є елементарні події $\omega_2, \omega_4, \omega_6$, тому $A = \{2,4,6\}$.

б) Сприятливими для події B є елементарні події $\omega_1, \omega_3, \omega_5$, тому $B = \{1,3,5\}$.

в) Сприятливими для події C є елементарні події ω_3, ω_6, тому $C = \{3,6\}$.

г) Сприятливими для події D є елементарні події $\omega_1, \omega_2 \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$, тому $D = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$. Отже, подія D є ***достовірною*** (така подія неодмінно здійснюється у кожному випробуванні).

д) Для події F жодна з елементарних подій не є сприятливою. Тому $F = \varnothing$ - ***неможлива*** подія.

є) Подія $A + B$ складається з елементарних подій, які складають і A і B, тобто $A + B = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$.

ж) Подія $A \cdot B$ складається із спільних елементарних подій, отже $A \cdot B = \varnothing$.

з) Подія $\overline{B}$ - ***протилежна*** події B і складається з тих елементарних подій, які не входять в B, тобто $\overline{B} = \{2,4,6\}$.

і) Сприятливою для події G є одна елементарна подія ω_2, тому $G = \{2\}$.

2. Нехай експеримент полягає в одночасному підкиданні двох монет. Записати простір елементарних подій. Описати подію A - випадання хоча б одного герба.

Розв'язання. Якщо позначити випадання герба – $\boldsymbol{\Gamma}$, випадання цифри – $\boldsymbol{Ц}$, то елементарних подій буде $\mathbf{4}$: $\omega_1 = \{\Gamma, \Gamma\}$, $\omega_2 = \{\Gamma, Ц\}$, $\omega_3 = \{Ц, \Gamma\}$, $\omega_4 = \{Ц, Ц\}$. Тоді події A сприяють три елементарних виходи $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

3. Стрілець виконує три постріли по мішені. Подія $A_i \, (i = 1,2,3)$ полягає в тому, що стрілець влучає у мішень при i-му пострілі. Записати у вигляді суми та добутку подій A_i такі події: а) B - три влучення; б) C - один промах; в) D - принаймні один промах; г) F - не більше одного промаху; д) G - хоча б два влучення.

Розв'язання. а) Подія B відбувається тоді, коли стрілець влучає в ціль при кожному пострілі, отже $B = A_1 A_2 A_3$.

б) Подія C відбувається тоді, коли стрілець влучає в мішень двічі. Нехай подія $\overline{A_i}$ - промах при i-му пострілі – ***протилежна*** події A_i (тобто поява однієї з них рівносильна непояві іншої). Отже, $C = \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3}$.

в) Подія D полягає в тому, що стрілець промахується або один раз, або двічі, або тричі. Отже, $D = \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 + A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

г) Подія F відбувається тоді, коли стрілець влучає або двічі, або тричі, отже $F = \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 A_2 A_3$.

д) Подія G, як і подія F, відбувається тоді, коли стрілець влучає або двічі, або тричі. Отже події F та G є ***рівносильними (еквівалентними)***: $F = G$.

Робимо висновок: $D + F = \Omega$, $DF = C$; $B + D = \Omega$, $BD = \varnothing$, $D = \overline{B}$.

4. За допомогою цифр $\mathbf{1,2,3}$ скласти всі можливі різні тризначні числа.

Розв'язання. Таких чисел буде шість: $\mathbf{123, 132, 213, 231, 312, 321}$. В цьому прикладі змінюється лише порядок цифр. Отже, $P_3 = 3! = 6$.

5. Скільки є різних речень з трьох слів: сьогодні, дощова, погода?

Розв'язання. Число речень дорівнює числу перестановок з трьох елементів: $\boldsymbol{P_3 = 3! = 6}$.

6. Скількома способами можна розмістити 12 осіб за столом, біля якого поставлено 12 стільців?

Розв'язання. Число способів дорівнює $\boldsymbol{P_{12} = 12! = 479\ 001\ 600}$. Цікаво, що коли розміщати 12 осіб за столом щохвилини, протягом 11 годин на добу, 365 днів на рік, з відпочинком на один день у високосні роки, то на це піде 1988 років і 140 днів!

7. Скільки шестизначних чисел, які діляться на $\mathbf{5}$, можна скласти з цифр $\mathbf{1,2,3,4,5,6}$ так, щоб цифри не повторювалися?

Розв'язання. Такі числа будуть мати на останньому місці цифру $\mathbf{5}$. Отже, на перших п'яти позиціях будуть розташовані п'ять цифр $\mathbf{1,2,3,4,6}$, тобто шукана кількість чисел складає $\boldsymbol{P_5 = 5! = 120}$.

8. Одного разу 10 друзів зайшли до ресторану «Каскадер». Хазяїн ресторану запропонував їм приходити до нього на бізнес-ланч щодня і кожного разу сідати за той самий стіл по - іншому. Після того, як усі способи розміщення будуть вичерпані, їх годуватимуть у ресторані безкоштовно. Коли настане цей день?

Розв'язання. Число різних способів розміщення десяти чоловік за столом, очевидно, $\boldsymbol{P_{10} = 10! = 3\ 628\ 800 \approx 3{,}6 \cdot 10^6}$. Отже, цей день настане через 9942 роки.

9. Скільки можна одержати перестановок з повтореннями, які можна отримати з букв, що складають слово *математика*?

Розв'язання. Шукане число дорівнює числу перестановок з повторенням, а саме числу перестановок з 10 елементів, серед яких буква $\boldsymbol{м}$ повторюється 2 рази, буква $\boldsymbol{а}$ повторюється три рази, буква $\boldsymbol{т}$ повторюється 2 рази. Тому загальна кількість перестановок дорівнює: $\overline{P}_{10}(2,2,3)=\dfrac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}=151200$.

10. Скількома способами можна виділити дитині по одному фрукту на день протягом дев'яти днів, якщо є 4 яблука, 3 апельсина і 2 банана?

Розв'язання. Маємо справу з перестановками з повтореннями: $k=9,\ k_1=4,\ k_2=3,\ \ k_3=2$.

Отже, $P_9(4,3,2)=\dfrac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}=9\cdot 4\cdot 7\cdot 5=1260$.

11. Скільки можна утворити різних трицифрових додатних цілих чисел у десятковій системі числення?

Розв'язання. З 10 цифр **0,1,2,3,4,5,6,7,8,9** можна утворити $A_{10}^3=\dfrac{10!}{(10-3)!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8=720$ трицифрових чисел. Але треба виключити ті числа, які починаються з нуля. Таких чисел (без нуля) буде $A_9^2=9\cdot 8=72$. Отже, різних трицифрових додатних чисел можна утворити $720-72=648$.

12. Студенти другого курсу вивчають 8 навчальних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на п'ятницю, якщо в цей день треба запланувати три лекції з різних предметів?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює $A_8^3=\dfrac{8!}{(8-3)!}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!}=336$.

13. Скільки є різних способів з 25 студентів обрати старосту, його заступника та профорга групи?

Розв'язання. Для розв'язання задачі треба скласти всі комбінації з 25 по 3 в кожній, які б відрізнялись або порядком, або самими елементами (хоча б одним). Тобто $A_{25}^3=\dfrac{25!}{(25-3)!}=\dfrac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22!}{22!}=25\cdot 24\cdot 23=13800$.

14. До семицифрових номерів телефонів входять цифри від 0 до 9. Скільки абонентів може обслуговувати телефонна станція?

Розв'язання. Оскільки цифри в номерах телефонів можуть повторюватися, то кількість усіх номерів телефонів є $\overline{A}_{10}^{7} = 10^{7} = 10\,000\,000$.

15. Скільки є способів поділити групу з 12 студентів на дві підгрупи порівну?

Розв'язання. Потрібно відібрати групи по 6 осіб з 12. Оскільки послідовність відбирання значення не має, то мова йде про сполучення, а саме $C_{12}^{6} = \dfrac{12!}{(12-6)!\cdot 6!} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 924$.

16. Скільки прямих можна провести через 8 точок, з яких жодні три не лежать на одній прямій?

Розв'язання. Пряма визначається двома точками. Тому шукане число дорівнюватиме числу різних пар точок, які можна скласти з даних 8 точок. При цьому, щоб прямі не збігалися, пари точок повинні відрізнятися хоча б однією точкою. Тому маємо комбінацію з 8 елементів по два, тобто $C_{8}^{2} = \dfrac{8!}{6!\cdot 2!} = \dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$.

17. Скількома способами можна скласти набір подарунків з шести предметів для дітей, якщо всього є чотири різних види предметів?

Розв'язання. Маємо сполучення з повтореннями з чотирьох елементів по шість. Отже, $\overline{C}_{4}^{6} = C_{4+6-1}^{6} = C_{9}^{6} = \dfrac{9!}{3!\cdot 6!} = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$.

18. Номер автомобільного причепа складається з двох літер і трьох цифр. Скільки різних номерів можна скласти, використовуючи 30 літер і 10 цифр?

Розв'язання. Кількість способів вибору літер $r_1 = \overline{A}_{30}^{2} = 30^{2}$, кількість способів вибору цифр $r_2 = \overline{A}_{10}^{3} = 10^{3}$. Отже, загальна кількість номерів складає за основним принципом комбінаторики: $r = r_1 \cdot r_2 = 30^{2}\cdot 10^{3} = 9\cdot 10^{5}$.

19. У чемпіонаті з футболу грає 16 команд. Команди, що зайняли три перших місця, отримують золоту, срібну та бронзову медалі, а дві останні команди вибивають з ліги. Скільки різних результатів закінчення чемпіонату може бути?

Розв'язання. Кількість варіантів отримати нагороди $r_1 = A_{16}^3 = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$. Після цього кількість варіантів зайняти два останніх місця в турнірній таблиці складає $r_2 = C_{13}^2 = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78$. Отже, загальна кількість результатів складає $r = r_1 \cdot r_2 = 3360 \cdot 78 = 26208$.

20. Скількома способами можна 15 шахістів поділити на три команди по 5 чоловік?

Розв'язання. Кількість способів вибрати першу команду $r_1 = C_{15}^5$, другу команду - $r_2 = C_{10}^5$, тоді третю команду можна скласти $r_3 = 1$ способом з п'яти чоловік, що залишилися. Отже,

$$r = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot 1 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11 \cdot$$
$$\cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 756\,756.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Монету підкидають чотири рази. Треба побудувати простір елементарних подій Ω для цього експерименту і такі випадкові події: A - поява герба 2 рази; B - поява хоча б одного герба.

2. Задано дві множини цілих чисел $\Omega_1 = \{1,2,4,c,5,6\}$ і $\Omega_2 = \{3,7,d,8\}$. Навмання з кожної множини беруть по одному числу. Побудувати простір елементарних подій Ω і такі випадкові події: A - сума чисел кратна 3; B - сума чисел кратна 5. З'ясувати, чи сумісні ці події (c - сума цифр номеру студента у журналі, d - кількість літер у прізвищі).

3. Скільки різних слів можна скласти з літер вашого а) імені; б) прізвища?

4. Скількома способами можуть розміститись 5 чоловік у черзі до каси?

Відповідь: **120**.

5. Скільки чотиризначних непарних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4,5 так, щоб цифри не повторювались?

Відповідь: **144**.

6. Скільки діагоналей у опуклому 8-кутнику?

Відповідь: **20**.

7. Під час зустрічі 10 чоловік потисли один одному руки. Скільки всього зроблено рукостискань?

Відповідь: **45**.

8. Скільки сигналів можна подати п'ятьма різними прапорцями, піднімаючи їх у будь-якій кількості і в довільному порядку?

Відповідь: **325**.

9. Скільки можна скласти дробів з чисел **4,7,9,11,19,23**? (У чисельнику і знаменнику кожного дробу повинно бути по одному числу).

Відповідь: **30**.

10. Скількома способами можна розподілити практичні заняття у шести студентських групах між трьома викладачами, якщо всі викладачі поділять навантаження порівну?

Відповідь: **90**.

11. В групі навчаються 32 студента. З них 16 займаються легкою атлетикою, 24 – в футбольній секції, 15 – в шаховій секції. 11 студентів займаються і атлетикою, і футболом, 8 – атлетикою і шахами, 12 – футболом і

шахами, а 6 студентів – в усіх трьох секціях. Решта студентів захоплюються тільки туризмом. Скільки студентів є туристами?

Відповідь: $\mathbf{4}$.

12. На обід у студентському кафе «Фрешка» пропонується 3 перших страви, 5 других страв та 4 різних соки. Скільки різних варіантів обіду з трьох страв можна скласти за цим меню?

Відповідь: $\mathbf{60}$.

13. Скільки є п'ятизначних чисел, які діляться на 5, якщо: а) цифри всі різні; б) цифри можуть повторюватись?

Відповідь: а) $\mathbf{5712}$*; б)* $\mathbf{18000}$.

14. Парламентська комісія складається з голови, його заступника і ще п'яти членів. Скількома способами вони можуть розподілити між собою обов'язки?

Відповідь: $\mathbf{42}$.

15. Скільки хорд можна провести через $\boldsymbol{n}$ різних точок, що лежать на одному колі, якщо $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{d}$ ($\boldsymbol{d}$ - кількість літер у прізвищі)?

16. Скільки різних варіантів хокейної команди можна скласти з восьми нападаючих, п'яти захисників та двох воротарів, якщо команда складається з трьох нападаючих, двох захисників та одного воротаря?

Відповідь: $\mathbf{1120}$.

17. Студентові потрібно здати 4 іспити протягом восьми днів. Скількома способами можна скласти розклад іспитів?

Відповідь: $\mathbf{1680}$.

18. Скількома способами можна розподілити 4 однакові папки у три ящики письмового столу, якщо кожен з них може вмістити всі папки?

Відповідь: $\overline{\boldsymbol{C}}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{4}}=\mathbf{15}$.

19. Три автори повинні написати посібник з вищої математики, який має вісім розділів. Скількома способами можна розподілити матеріал між авторами, якщо два з них писатимуть по три розділи, а один – два розділи?

Відповідь: **560**.

20. Є 10 молодих спеціалістів. Їх треба розподілити в 3 цехи: в перші два – по 4, в третій – 2. Скільки способів це зробити?

Відповідь: **3150**.

21. Три подруги вирішують вийти заміж. У кожної п'ять можливих кандидатів у женихи: а) всі різні; б) однакові у кожної. Скільки є можливих рішень?

Відповідь: а) **125***; б)* **60**.

22. Скільки є варіантів переставити літери в слові «математика», щоб воно не починалось з «мат»?

Відповідь: **14610**.

23. Задача жарт. В одній групі 29 студентів, в іншій 30. Декан вирішив залишити по 25 студентів в кожній групі та сів переглядати всі можливі варіанти, витрачаючи на кожний з них 10 секунд. Чи встигнуть студенти закінчити ВУЗ, поки декан прийме рішення?

2. ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ. ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ НАЙПРОСТІШИХ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Достовірною називають подію, яка відбувається при кожному випробуванні. ***Неможливою*** називають подію, яка не відбувається при жодному випробуванні. Кожна випадкова подія A інтерпретується як підмножина простору елементарних подій. Неможлива подія – це порожня множина $\varnothing$, достовірна подія – це весь простір Ω .

Кожна з подій має якусь ступінь можливості: для ***кількісної оцінки можливості*** появи випадкової події в експерименті вводиться ***поняття ймовірності***.

Ймовірність події позначається $P(A)$. За одиницю виміру ймовірності взята ймовірність достовірної події. Якщо покласти, що $P(\Omega)=1$, а $P(\varnothing)=0$, то всі інші ймовірні, але не достовірні події будуть характеризуватися ймовірностями, що лежатимуть між нулем і одиницею і складатимуть певну долю одиниці. Отже, ймовірність $P(A)$ задовольняє умові:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2.1. Класичне означення ймовірності

Якщо дане випробування може мати n різних наслідків і всі вони нерівноймовірні, а подія A настає в m з цих наслідків, то ймовірність A дорівнює:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Зауваження. Наслідки, в яких настає подія A, називають ***сприятливими*** для неї.

Наприклад, якщо $A=\{$ випадання герба на монеті $\}$, то $P(A)=\frac{1}{2}=0,5$, якщо $B=\{$ випадання 5 очок на верхній грані кубика $\}$, $P(B)=\frac{1}{6}\approx 0,1667$; якщо $C=\{$ випадання числа очок > 2 $\}$, $P(C)=\frac{4}{6}\approx 0,6667$.

Зауваження. Дане означення не відповідає на питання, що таке ймовірність випадкової події, а лише дає метод її обчислення у найпростіших випадках. Крім цього, це означення непридатне для недискретного простору елементарних подій і навіть для дискретного простору нерівноймовірних подій.

2.2. Геометрична ймовірність

Якщо стохастичний експеримент даної задачі можна розглядати або інтерпретувати як вибір однієї точки навмання з повної геометричної фігури Ω (відрізка; кривої; плоскої або об'ємної фігури, тобто нескінченної множини точок), а події A відповідає підмножина точок A цієї фігури, то ***геометричною ймовірністю*** A називають відношення $P(A)=\dfrac{mes\,A}{mes\,\Omega}$, де mes - довжина, або площа, або об'єм відповідно для ліній, плоских фігур або об'ємних фігур.

Зауваження. У двомірному випадку будемо писати $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}$, де S - площа (рис. 2.1)

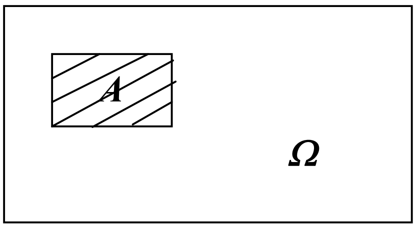


Рис. 2.1

2.3. Відносна частота та статистичне означення ймовірності

Відносна частота події A (або частість) визначається формулою

$$W(A)=\frac{m_1}{n_1},$$

де m_1 - кількість випробувань, в яких подія A з'явилася, n_1 - загальна кількість проведених випробувань.

<u>Статистичне означення ймовірності:</u> ймовірність події $P(A)$ - число, до якого прямує її відносна частота $W(A)$, якщо кількість повторень експерименту прямує до ∞.

Зразки розв'язування задач

1. В урні знаходиться 5 білих, 10 чорних та 3 червоні кулі. Яка ймовірність вийняти з урни білу кулю? Чорну кулю? Зелену кулю?

Розв'язання. Маємо три події: A - виймання білої кулі, B - виймання чорної кулі, C - виймання зеленої кулі. Усього в урні $n = 5 + 10 + 3 = 18$ куль. Отже, $P(A) = \frac{5}{18}$, $P(B) = \frac{10}{18}$, $P(C) = \frac{0}{18} = 0$. Подія $C = \varnothing$ - неможлива, бо зелених куль немає.

2. В урні знаходиться 5 білих, 10 чорних та 3 червоні кулі. З урни одночасно виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.

Розв'язання. Число рівноможливих незалежних наслідків дорівнює $n = C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2 \cdot 1} = 153$. Події A - виймання двох білих куль, сприяють $m = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ наслідків. Отже, $P(A) = \frac{10}{153} \approx 0{,}065$.

3. ***<u>Задача про вибірку.</u>*** В партії серед N виробів є M бракованих. Навмання беруть n виробів для перевірки. Яка ймовірність того, що серед них m бракованих $(m \le M)$? Яка ймовірність того, що серед них більш ніж m бракованих?

Розв'язання. Випробування полягає в випадковому виборі виробів та їх перевірці на брак. Поява кожного виробу є рівноймовірною. Число можливих варіантів вибору n виробів обчислюється за допомогою формули підрахунку сполучень C_N^n.

Випадкова подія A полягає в тому, що з n перевірених виробів m будуть бракованими.

Число подій, що сприяють події A, можна обчислити теж за формулою сполук. Враховуючи, що загальна кількість бракованих виробів дорівнює M, а виробів без браку буде $N-M$, одержимо число подій, що сприяють події: $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$.

Тоді шукана ймовірність буде:

$$P(A)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Ймовірність того, що серед n вибраних більше ніж m бракованих виробів, обчислюється за формулою:

$$P(A)=\sum_{k=m+1}^{min(M;n)}\frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

4. В урні 5 білих, 10 чорних та 3 червоні кулі. Навмання виймають 4 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них 3 чорних кулі.

Розв'язання. Застосовуємо до розв'язання схему задачі про вибірку. За умовою загальна кількість куль $N=5+10+3=18$, серед них є $M=10$ чорних куль. Виймають $n=4$ кулі. Отже, ймовірність події A - серед обраних є $m=3$ чорні кулі, становить

$$P(A)=\frac{C_{10}^3 \cdot C_{18-10}^{4-3}}{C_{18}^4}=\frac{C_{10}^3 \cdot C_8^1}{C_{18}^4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{8\cdot 7!}{7!\cdot 1!}\cdot\frac{14!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}\cdot$$

$$\cdot 8\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}\approx 0{,}31.$$

5. Існує 20 білетів для модульного контролю, кожен містить по 5 питань, що не повторюються. Студент може відповісти лише на 40 питань, а для того, щоб скласти модуль, необхідно відповісти не менш, ніж на 3 питання білета. Яка ймовірність того, що отриманий студентом білет містить відомі йому питання? Яка ймовірність того, що студент зможе скласти модуль?

Розв'язання. Загальна кількість питань у білетах $N=20\cdot 5=100$, студент знає з них 40. Число можливостей скласти білети зі 100 по 5 буде:

$n = C_{100}^{5} = \dfrac{100!}{95!\cdot 5!} = \quad = \dfrac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 75287520$. Число випадків, що сприяють події A - студент знає всі питання білету, буде: $m = C_{40}^{5} = \dfrac{40!}{35!\cdot 5!} = \dfrac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \ = 658008$.

Отже, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{658008}{75287520} = 0{,}0087$, або приблизно **1%**.

На друге питання задачі можна відповісти за допомогою схеми розв'язання задачі про вибірку.

Шукана ймовірність події B - студент складе модуль, обчислюється за формулою:

$$P(B) = \sum_{S=m}^{n} \frac{C_{M}^{S}\cdot C_{N-M}^{n-S}}{C_{N}^{n}},$$

де $N = 100$, $M = 40$, $n = 5$, $m = 3$, $S = 3;4;5$.

Тоді $P(B_1) = \dfrac{C_{40}^{3}\cdot C_{100-40}^{5-3}}{C_{100}^{5}} = 0{,}232$,

$$P(B_2) = \frac{C_{40}^{4}\cdot C_{60}^{1}}{C_{100}^{5}} = 0{,}073,$$

$$P(B_3) = \frac{C_{40}^{5}\cdot C_{60}^{0}}{C_{100}^{5}} = P(A) = 0{,}009.$$

Отже, $P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) = 0{,}232 + 0{,}073 + 0{,}009 = 0{,}314$, або **31%**.

6. Учасник лотереї «Спортлото» має назвати 6 з 49 назв видів спорту, які позначені числами від 1 до 49. Повний виграш отримує той, хто правильно вкаже всі шість назв. Виграш одержать і ті, хто вгадає не менш трьох назв. Обчислити ймовірність повного виграшу в «Спортлото». Обчислити ймовірність того, що учасник вгадає 3 назви.

Розв'язання. Розглянемо ймовірність двох подій: A - повний виграш (учасник вгадав 6 назв); B - учасник вгадав 3 назви. Тоді

$$P(A)=\frac{C_6^6\cdot C_{49-6}^{6-6}}{C_{49}^6}=\frac{1\cdot C_{43}^0}{\dfrac{49!}{(49-6)!\cdot 6!}}=\frac{43!\cdot 6!}{49!}=0{,}0000007151.$$

Ймовірність $P(B)=\dfrac{C_6^3\cdot C_{49-6}^{6-3}}{C_{49}^6}=\dfrac{C_6^3\cdot C_{43}^3}{C_{49}^6}=0{,}01765$.

7. На картках написані букви А, А, А, А, А, Б, Б, Р, Р, К, Д. Знайти ймовірність того, що при випадковому викладанні карток в ряд вийде слово «АБРАКАДАБРА».

Розв'язання. Тут $n=P_{11}(5,2,2,1,1)=\dfrac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!}=\dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 2\cdot 2}=$ $11\cdot 10\cdot 9\cdot 2\cdot 7\cdot 6=83160$. З усіх можливих перестановок тільки одна сприятиме появі слова «абракадабра». Отже, шукана ймовірність $P(A)=\dfrac{1}{83160}\approx 0{,}000012$.

8. Кидають три монети. Яка ймовірність того, що випаде два герба?

Розв'язання. Якщо позначити випадання герба – Г, а випадання цифри – Ц, то елементарних подій може бути 8: ГГГ, ЦЦЦ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, тобто $n=8$. Сприяють події A - поява двох гербів – 3 з цих елементарних виходів, тобто $m=3$. Отже, $P(A)=\dfrac{3}{8}$.

9. У ліфт десятиповерхового будинку на 1-му поверсі увійшли 4 чоловіка. Вважається, що кожний з них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність події: A - усі пасажири вийдуть на 7-у поверсі; B - усі пасажири вийдуть на одному й тому самому поверсі; C - усі пасажири вийдуть на різних поверхах.

Розв'язання. Кількість усіх можливих результатів дорівнює 9^4, тому що кожний із чотирьох пасажирів може вийти на будь-якому з дев'яти поверхів.

Події A сприяє тільки один результат, а саме, коли кожний пасажир вийде на 7-у поверсі, тобто $P(A)=\dfrac{1}{9^4}\approx 0{,}000152$.

Події B сприяють дев'ять результатів: усі пасажири можуть вийти або на 2-му, або на 3-му, …, або на 10-му поверсі. Отже, $P(A)=\frac{9}{9^4}=\frac{1}{9^3}\approx 0{,}00137$. Події C сприяє кількість результатів, що дорівнює кількості сполучень, яку можна скласти з 9 по 4. Отже, $P(C)=\frac{C_9^4}{9^4}=\frac{14}{729}\approx 0{,}0192$.

10. Після бурі на дільниці між 10-м і 100-м кілометрами телефонної лінії обірвався провід. Знайти ймовірність того, що обрив стався між 35-м і 40-м кілометрами.

Розв'язання. $m = mes\ A = 40 - 35 = 5$ (км); $n = mes\ \Omega = 100 - 10 = 90$ (км);

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}.$$

11. Точка кидається навмання у коло радіусом a. Яка ймовірність того, що вона поцілить у квадрат зі стороною $\sqrt{2}a$?

Розв'язання. $m = mes\ A = S_{квад.} = 2a^2$; $n = mes\ \Omega = S_{кола} = \pi a^2$;

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2a^2}{\pi a^2}=\frac{2}{\pi}\approx 0{,}64.$$

12. На одиничному колі вибирають точку. Знайти ймовірність того, що її абсциса по модулю не перевищує $\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Розглянемо коло одиничного радіуса (рис. 2.2):

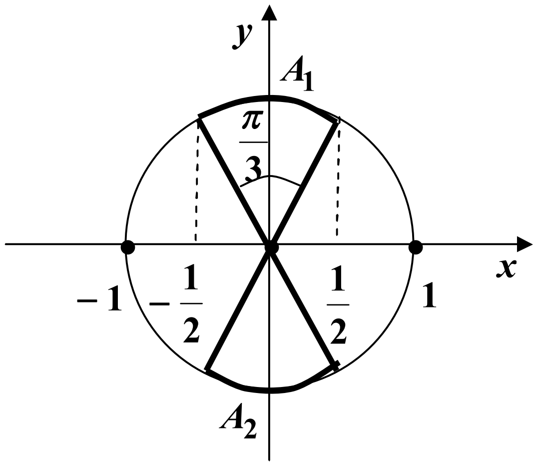


Рис. 2.2

Події A відповідають підмножини точок кола A_1: φ є $\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$ і A_2: $\varphi \in \left(\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$, тобто $A = A_1 + A_2$.

Шукана ймовірність обчислюється за формулою $P(A) = \dfrac{mes\,A}{mes\,\Omega}$, де $m = mes\,A = 2\cdot\dfrac{\pi}{3}$, $n = mes\,\Omega = 2\pi$. Отже $P(A) = \dfrac{2\pi}{3\cdot 2\pi} = \dfrac{1}{3}$.

13. У квадраті $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ вибрали навмання точку. Нехай її координати x, y. Яка ймовірність того, що $y > x^2$ (рис. 2.3) ?

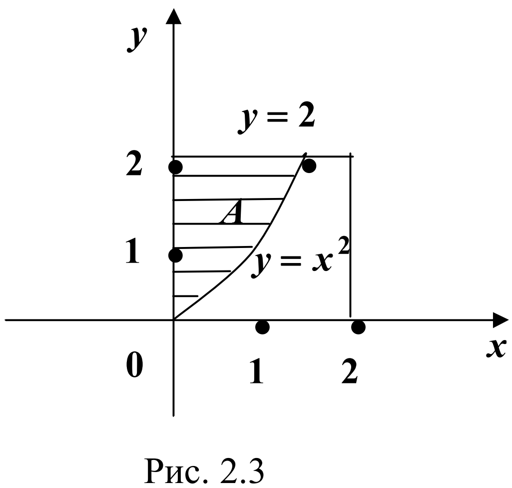


Рис. 2.3

Розв'язання. Обчислимо площу фігури A за допомогою визначеного інтеграла:

$$m = S(A) = \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right) dx = 2x \Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (кв. од.);}$$

$n = S(\Omega) = 2 \cdot 2 = 4$ (кв. од.), отже $P(A) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3 \cdot 4} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

14. За даними статистичних досліджень на сьогодні в Україні проживає біля 42 млн. громадян, серед них на території Дніпропетровської області – близько 4 млн. Визначити ймовірність того, що навмання обраний громадянин України проживає на території Дніпропетровської області.

Розв'язання. Відносна частота події A дорівнює $P(A) = \dfrac{4}{42} \approx 0{,}095$.

Завдання для самостійної роботи

1. В мартенівському цеху 7 завалочних машин, три з яких працюють більш продуктивно, ніж інші. Навмання завантажують 4 з них. Знайти ймовірність події A - серед обраних машин дві більш продуктивні.

Відповідь: $\dfrac{18}{35}$.

2. В урні 15 куль із номерами від 1 до 15. Яка ймовірність навмання витягти кулю з парним номером?

Відповідь: $\dfrac{7}{15}$.

3. Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що сума очок більша або дорівнює дев'яти, якщо на одному з кубиків випало 4 очка?

Відповідь: $\dfrac{4}{11}$.

4. Підкидують шість гральних кубиків. Обчислити ймовірність того, що сумарне число очок, що випало, дорівнює 7.

Відповідь: $\mathbf{\frac{1}{6^5}}$.

5. В групі 12 студентів, з яких 8 одержують стипендію. За списками навмання відібрано 9 студентів. Обчислити ймовірність того, що серед обраних студентів 5 одержують стипендію.

Відповідь: $\mathbf{\frac{14}{55}}$.

6. У туристів було вісім консервних банок: три з м'ясом, три з овочами і дві з фруктами. Під час дощу етикетки на банках відклеїлись, а всі банки однакові. Яка ймовірність того, що три банки, відкриті навмання, будуть відрізнятися вмістом?

Відповідь: $\mathbf{\frac{18}{35}}$.

7. У ряд, в якому 20 місць, випадково сідають 20 чоловік. Знайти ймовірність того, що два певних чоловіка опиняться поруч.

Відповідь: $\mathbf{\frac{2 \cdot 19!}{20!} = \frac{1}{10}}$.

8. Знайти ймовірність того, що точка, поставлена в будь-якому місці всередині кола, потрапить у вписаний у це коло правильний трикутник.

Відповідь: $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}$.

9. Відділ контролю виявив 5 бракованих виробів з випадково відібраних 100 однакових виробів. Знайти відносну частоту появи бракованих виробів.

Відповідь: $\mathbf{0{,}05}$.

10. 25 екзаменаційних білетів містять по 2 питання, що не повторюються. Студент може відповісти лише на 45 питань. З якою ймовірністю студент складе іспит на «відмінно»?

Відповідь: $\approx \mathbf{0{,}8}$.

11. При грі в бридж колода в 52 карти ділиться порівну між чотирма гравцями. Знайти ймовірність того, що кожен гравець отримає по одному тузу.

Відповідь: $\dfrac{\mathbf{2197}}{\mathbf{20825}}$.

12. У екзаменатора є 20 білетів відповідно кількості студентів, що складають іспит. Студенти розподілили між собою білети так, що різні учні вивчили різні білети. Яка ймовірність того, що вся група не складе іспиту?

Відповідь: $\approx \mathbf{0{,}368}$.

13. Відносна частота бракованих радіоприймачів деякої фірми дорівнює $\mathbf{0{,}1}$. Знайти кількість стандартних серед перевірених 200 радіоприймачів.

Відповідь: $\mathbf{180}$.

14. Лотерея випущена на загальну суму 10 000 грн. Вартість одного квитка 2 грн., а виграють 10 квитків. Студент віддає останні гроші на лотерейний білет. Знайти ймовірність його виграшу.

Відповідь: $\mathbf{0{,}002}$.

15. Стрижень довжини 3 м зламали в певній точці. Яка ймовірність того, що довжина коротшої частини менша за 1 м ?

Відповідь: $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.

16. Навмання вибирають два числа $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ такі, що $\mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \mathbf{1}$, $\mathbf{0} \le \boldsymbol{y} \le \mathbf{1}$. Знайти ймовірність того, що $\boldsymbol{y} \le \sqrt{\boldsymbol{x}}$.

Відповідь: $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.

17. Супротивник протягом години робить один 10-хвилинний наліт на дільницю шосе. Яка ймовірність позбутися нальоту, якщо час подолання цієї дільниці дорівнює 5 хвилинам?

Відповідь: $\approx \mathbf{0,77}$.

18. Пароль для входу в комп'ютерну базу даних складається з 7 цифр. Яка ймовірність правильного набору пароля з першого разу, якщо комбінація цифр є строго зростаючою послідовністю?

Відповідь: $\mathbf{0,00833}$.

19. В групі 20 студентів. На семінарі заплановано викликати 4 студентів. Яка ймовірність того, що Вовочку та Тарасика викличуть?

Відповідь: $\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{95}}$.

20. Троє грають в преферанс. Кожен отримує по 10 карт і ще дві ідуть у прикуп. Гравець бачить, що серед його карт нема жодного туза. Він бере прикуп. Яка ймовірність того, що там лежать два тузи, якщо колода містить 32 карти?

Відповідь: $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{77}}$.

21. Досліджується корозійна стійкість сталі 18Cr-10Ni-2Mo (сталь, що містить у вісових відсотках 18% хрому, 10% нікелю, 2% молібдену). Для дослідження було відібрано 10 зразків, вироблених на підприємстві $\boldsymbol{N}$ з партії у 100 зразків. Відомо, що брак в продукції $\boldsymbol{N}$ складає 5%. Знайти ймовірність того, що серед 10 вибраних буде 2 зразки з дефектами.

Відповідь: $\mathbf{0,07}$.

3. ЙМОВІРНІСТЬ СУМИ І ДОБУТКУ ПОДІЙ

3.1. Теореми додавання ймовірностей

Події називають ***несумісними***, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно.

Теорема (1) додавання ймовірностей несумісних подій. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Наслідки. 1. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, що складають повну групу, дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1.$$

2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Теорема (2) додавання ймовірностей сумісних подій. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Зауваження. Теорема (2) є узагальненням теореми (1). Для трьох подій:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

3.2. Умовні ймовірності. Теореми множення

Подію A називають ***незалежною*** від події B, якщо ймовірність здійснення події A не залежить від того, відбулася або ні подія B (у протилежному випадку події A і B ***залежні***).

Ймовірність $P_A(B)$ або $P\left(B/A\right)$ називається ***умовною ймовірністю*** події B при умові A, тобто це ймовірність настання події B, обчислена з припущенням, що подія A вже відбулася.

Події $A, B, C, \dots$ називаються ***незалежними*** в сукупності, якщо ймовірність кожної з них не змінюється в зв’язку з настанням або ненастанням інших подій.

<u>Теорема (3) множення ймовірностей незалежних подій.</u> Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

<u>Теорема (4) множення ймовірностей залежних подій.</u> Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї на умовну ймовірність іншої:

$$P(AB) = P(A) \cdot P\left(A/B\right).$$

3.3. Ймовірність появи події принаймні один раз

При розв'язанні багатьох практичних задач досить часто треба знайти ***ймовірність появи події принаймні один раз*** (або ***ймовірність настання хоча б однієї з незалежних в сукупності подій***).

З наслідку 2 теореми (1) маємо

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Ця формула використовується в тих випадках, коли ймовірність протилежної події $\overline{A}$ знайти легше, ніж ймовірність події A.

Позначимо ймовірність появи події принаймні один раз P_1. При розв'язанні задач корисні такі формули:

1. $P_1 = 1 - q^n$, де $q = 1 - p$, p - одна і та сама в усіх іспитах.

2. $P_1 = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$, де, $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2, ..., q_n = 1 - p_n$; $p_i\left(i = \overline{1, n}\right)$ - ймовірність появи події в кожному іспиті.

3. $P_1 = 1 - q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot ... \cdot q_n^{m_n}$, де m_i - кількість іспитів, в яких ймовірності появи події однакові.

Зауваження. За допомогою формули $P_1 = 1 - q^n$ можна одержати співвідношення, за яким обчислюють ***скільки потрібно провести іспитів*** для того, щоб подія відбулась хоча б один раз.

Нехай ймовірність появи події при одному іспиті дорівнює p. Треба знайти, скільки потрібно провести іспитів, щоб з ймовірністю не менш як P подія відбулась принаймні один раз.

Тобто треба знайти таке значення n, щоб $P \le 1 - q^n$, звідки $q^n \le 1 - P$. Прологарифмуємо обидві частини нерівності: $n\,lg\,q \le lg(1-P)$, звідки $n \ge \frac{lg(1-P)}{lg\,q}$, ($lg\,q < 0$ так як $0 < q < 1$) або $n \ge \frac{ln(1-P)}{ln\,q}$.

Зразки розв'язування задач

1. В урні є 12 куль – 8 білих та 4 червоних. Яка ймовірність того, що вийняті навмання дві кулі будуть одного кольору.

Розв'язання. Подія A - обидві кулі одного кольору. Нехай A_1 - обидві кулі білі, A_2 - обидві кулі червоні. Оскільки події A_1 і A_2 несумісні, то $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$. За формулою класичної ймовірності $P(A_1) = \frac{C_8^2}{C_{12}^2}$, $P(A_2) = \frac{C_4^2}{C_{12}^2}$.

Отже, $P(A) = \frac{C_8^2 + C_4^2}{C_{12}^2} = \left(\frac{8!}{2!\cdot 6!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!}\right)\cdot\frac{2!\cdot 10!}{12!} = \frac{28+6}{66} = \frac{34}{66} = \; = \frac{17}{33}$.

2. У лотереї 1000 білетів, з них на один білет випадає виграш 500 грн., на 10 білетів – виграші по 100 грн., на 50 білетів – виграші по 20 грн., на 100 білетів виграші по 5 грн. Решта білетів невиграшні. Знайти ймовірність виграшу на один білет не менш як 20 грн.

Розв'язання. Позначимо події: A - виграш не менш як 20 грн.; A_1 - виграш 20 грн., A_2 - виграш 100 грн., A_3 - виграш 500 грн. Подія A виражається через суму трьох несумісних подій A_1, A_2, A_3, тобто $A = A_1 + A_2 + A_3$. Застосовуючи теорему (1), дістанемо:

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{50}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = 0{,}061.$$

3. Ймовірність влучення в мішень одним стрільцем становить 0,8, іншим – 0,7. Стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що принаймні один стрілець влучить в мішень?

Розв'язання. Нехай подія A - влучення першого стрільця в ціль, подія B - другого, а подія C - шукана подія. Тоді $C = A + B$. Враховуючи, що події A і B - сумісні, проте незалежні, дістанемо:

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 =$$
$$= 0{,}94.$$

4. При перевірці готової деталі розрізняють брак за формою і за розмірами. Ймовірність браку за формою дорівнює 0,05, за розмірами – 0,01. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракованою і за формою і за розмірами? Яка ймовірність того, що деталь буде якісною?

Розв'язання. Нехай подія A - взята навмання деталь бракована; події A_1 - брак за формою, A_2 - брак за розмірами. Тоді $A = A_1 + A_2$, де A_1 і A_2 - сумісні і незалежні події. Згідно з теоремою (2):

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) -$$
$$- P(A_1 A_2) = 0{,}01 + 0{,}05 - 0{,}01 \cdot 0{,}05 = 0{,}0595.$$

Отже, поява якісної деталі дорівнює

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}0595 = 0{,}9405.$$

Ймовірність того, що взята деталь бракована і за формою і за розмірами, обчислювалась за теоремою (3): $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}01 \cdot 0{,}05 = 0{,}0005$.

5. Ймовірність того, що студент складе перший іспит дорівнює 0,6, другий – 0,9, третій – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе: а) тільки перший іспит; б) тільки один іспит; в) всі три іспити; г) хоча б один іспит; д) не менш ніж два іспити.

Розв'язання. а) Нехай подія A - студент складе тільки перший іспит; події $A_i (i = 1,2,3)$ - студент складе i-й іспит. Тоді $A = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$, тобто студент складе перший іспит, але не складає другий і третій іспити, де $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Згідно з теоремою (3) для незалежних подій

$$P(A) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}012.$$

б) Нехай подія B - студент складе тільки один іспит із трьох (або перший, або другий, або третій). За теоремою (1) для суми несумісних подій маємо: $P(B) = P(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = P(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3) +$

$+ P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}012 + 0{,}072 +$
$+ 0{,}032 = 0{,}116$.

в) Нехай подія C - студент складе всі три іспити, тобто $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Тоді $P(C) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}432$.

г) Нехай подія D - студент складе хоча б один іспит. Використовуючи формулу $P_1 = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$, одержимо $P_1 = 1 - q_1 q_2 q_3$, де $q_1 = P(\overline{A}_1)$, $q_2 = P(\overline{A}_2)$, $q_3 = P(\overline{A}_3)$, тобто $P_1 = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$.

д) Нехай подія E - студент складе не менш ніж два іспити. Ця подія означає складання будь-яких двох іспитів із трьох або усіх трьох іспитів, тобто: $E = E_1 + C$, де $E_1 = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. За теоремами (1) та (3) маємо: $P(E) = P(E_1 + C) = P(E_1) + P(C) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 +$
$+ 0{,}4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}444 + 0{,}432 = 0{,}876$.

Зауважимо, що події B, C, D_1, E_1, де D_1 - студент не складе жодного іспиту, E_1 - студент складе тільки два іспити ($P(D_1) = 0{,}008$; $P(E_1) = 0{,}444$), складають повну групу подій. Отже, ймовірність їх суми має дорівнювати одиниці: $P(B + C + D_1 + E_1) = 0{,}116 + 0{,}432 + 0{,}008 + 0{,}444 = 1$.

6. Прилад складається з n блоків (рис.3.1); надійність (ймовірність безвідмовної роботи) кожного блоку дорівнює p. Знайти надійність P приладу в цілому.

Розв'язання. Для рисунка (а) $P = p^n$, тобто всі блоки працюють.

Для рисунка (б) $P = 1 - (1 - p)^n$, тобто працює принаймні один блок.

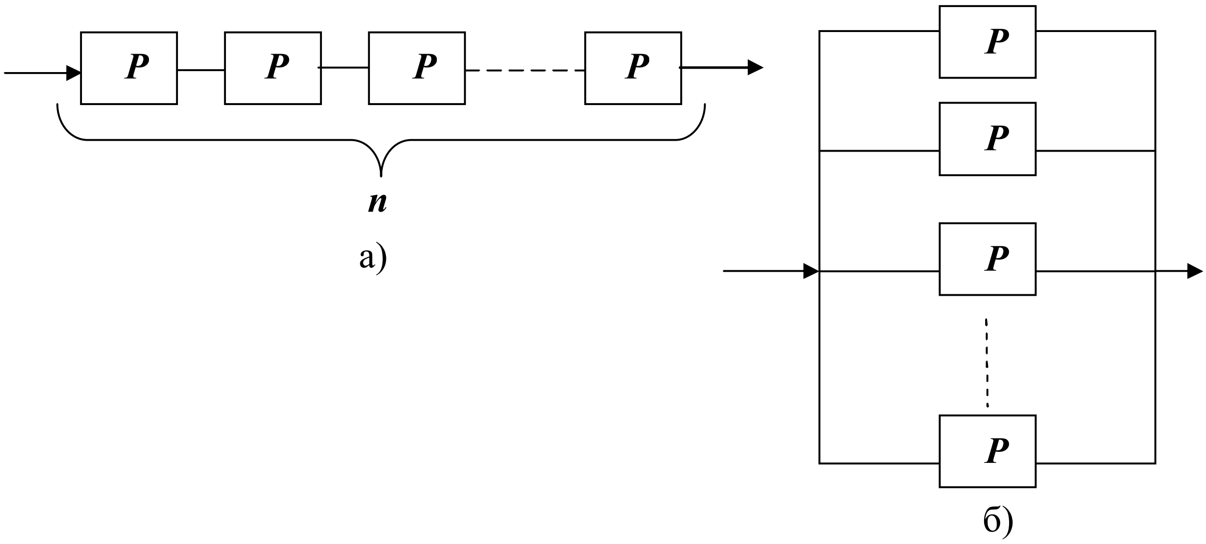


Рис. 3.1

7. Знайти надійність P приладу, зображеного на рисунку 3.2, якщо ймовірність безвідмовної роботи кожного з блоків приладу дорівнюють $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}8$, $p_4 = 0{,}9$.

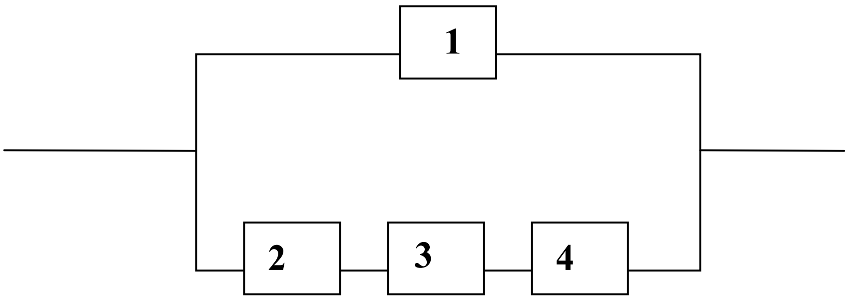


Рис. 3.2

Розв'язання. Нехай S - безвідмовна робота приладу. Для того, щоб прилад працював, достатньо, щоб працював або елемент 1 або ланцюг 2,3,4.

Знайдемо ймовірність роботи ланцюга 2,3,4:

$$P(A) = P(A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Тоді безвідмовна робота приладу дорівнює:

$$P = P(S) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}_1) = 1 - (1 - P(A)) \cdot (1 - P(A_1)) = 1 - (1 - 0{,}504) \cdot$$
$$\cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}1984.$$

8. Партію зі 100 деталей піддали вибірковому контролю. Умовою непридатності всієї партії є наявність принаймні однієї бракованої деталі з

п'яти, які обстежуються. Яка ймовірність для цієї партії бути прийнятою, якщо вона містить 5% непридатних деталей?

Розв'язання. Знайдемо ймовірність події A, яка полягає в тому, що партія деталей буде прийнята. Подія A є перетином подій A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, якщо A_k - подія, яка полягає в тому, що k-та деталь придатна ($k = 1,2,...,5$): $A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$.

Ймовірність події A_1 визначається, як $P(A_1) = \frac{95}{100}$, оскільки серед 100 деталей 5% браку, тобто п'ять бракованих деталей; $P(A_2/A_1)$ - ймовірність появи другої придатної деталі за умови, що подія A_1 відбулась (перша деталь виявилась придатною), тобто із загальної кількості деталей, що дорівнює 100, спочатку вибрали одну, залишилось 99, з яких 94 придатні. Тому $P(A_2/A_1) = P_{A_1}(A_2) = \frac{94}{99}$.

Аналогічно $P(A_3/A_1A_2) = \frac{93}{98}$; $P(A_4/A_1A_2A_3) = \frac{92}{97}$; $P(A_5/A_1A_2A_3A_4) = \frac{91}{96}$.

Отже, $P(A) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} \approx 0{,}77$.

9. Слово «машина» розрізали на літери, потім вибрали навмання 4 з них і приставили одна до одної. Яка ймовірність того, що при цьому утворилась послідовність літер: а) «шина»; б) «маша»?

Розв'язання. а) За теоремою множення ймовірностей (4) шукана ймовірність події A - появи слова «шина» складає:

$$P(A) = P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot P(A_4/A_1A_2A_3) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6-1} \cdot \frac{1}{6-2} \cdot \frac{2}{6-3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{180}.$$

б) Ймовірність події B - появи слова «маша» дорівнює:

$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6-1} \cdot \frac{1}{6-2} \cdot \frac{2-1}{6-3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{180}.$$

10. Двоє студентів по черзі кидають монетку, причому виграє той, у кого раніше з’явиться герб. Визначте ймовірність виграшу для кожного гравця.

Розв’язання. При першому киданні $P(Г)=P(Ц)=\frac{1}{2}$, отже, ймовірність виграшу для першого студента дорівнює $P_1=\frac{1}{2}$.

При другому киданні $P_2=P(ЦГ)=Г(Ц)\cdot P(Г)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$ тобто ймовірність виграшу для другого студента дорівнює $P_2=\frac{1}{4}$.

При третьому киданні $P_1=P(ЦЦГ)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$. Отже, ймовірність виграшу для першого студента тепер дорівнює ймовірності виграшу або при першому киданні або при третьому, тобто $P_1=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

При четвертому киданні $P_2=(ЦЦЦГ)=\left(\frac{1}{2}\right)^4$, а загальна ймовірність виграшу для другого студента тепер дорівнює: $P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Ймовірність виграшу для першого студента при тривалому процесі кидання складає геометричну прогресію $P_1=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\ldots$ $+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+\ldots$, сума членів якої $S_1=\frac{a_1}{1-q_1}=\frac{1/2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$.

Аналогічно ймовірність виграшу для другого студента також складає геометричну прогресію $P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+\ldots$, сума членів якої $S_2=\frac{a_2}{1-q_2}=\frac{1/4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$.

Отже, $S_1 : S_2 = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2$, тобто ймовірність виграти у першого студента у два рази більша, ніж у другого.

Завдання для самостійної роботи

1. На автомобілі встановлено два охоронні пристрої, які працюють незалежно. Ймовірність того, що при викраденні спрацює перший, дорівнює 0,95, а другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що при викраденні спрацює: а) тільки один пристрій; б) хоча б один.

Відповідь: **0,14; 0,995**.

2. Від гуртожитку до академії можна доїхати на трамваї або на маршрутному таксі. Ймовірність того, що протягом 3 хвилин прийде трамвай, дорівнює 0,6, а ймовірність того, що прийде маршрутне таксі, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом 3 хвилин можна буде виїхати до академії.

Відповідь: **0,96**.

3. Нехай ймовірність влучення в рухому мішень при одному пострілі дорівнює 0,05. Скільки пострілів треба зробити, щоб з ймовірністю 0,75 мати принаймні одне влучення?

Відповідь: **28**.

4. Ймовірність банкрутства для однієї фірми становить 0,4, а для іншої – на 25% менше. Визначити ймовірність того, що збанкрутує принаймні одна з них.

Відповідь: **0,58**.

5. Ймовірність ліквідації заборгованості за користування електроенергією першим підприємством становить 0,6, другим – є додатним коренем рівняння

$5p^2 - 4p = 0$, а третім – 50% від суми перших ймовірностей. Визначити ймовірність того, що лише два підприємства ліквідують заборгованість.

Відповідь: $\mathbf{0{,}452}$.

6. Оцінити надійність системи (рис. 3.3), якщо $p_1 = 0{,}9$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}k$; $p_4 = 0{,}l$ (k - номер студента за списками у журналі; l - сума літер у прізвищі студента).

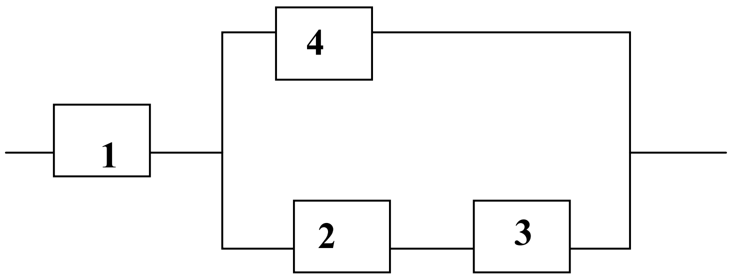


Рис. 3.3

7. Вакансія, запропонована безробітному біржею працевлаштування, задовольняє його з ймовірністю 0,01. Скільки необхідно обслужити безробітних, щоб ймовірність того, що хоча б один з них знайшов роботу, була не нижча 0,95?

Відповідь: $n \geq \dfrac{lg\,0{,}05}{lg\,0{,}99} \approx 298$.

8. З колоди карт (36 карт) навмання взято одну. Яка ймовірність того, що це король, якщо відомо, що взято карту червоної масті?

Відповідь: $\dfrac{1}{9}$.

9. Підкидають три гральні кубики. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випаде 6 очок, якщо на всіх трьох кубиках випали однакові грані.

Відповідь: $\dfrac{1}{6}$.

10. На змаганнях з біатлону стрілок із Дніпропетровська влучає в мішень з ймовірністю 0,6, стрілок із Донецька – з ймовірністю 0,5, а стрілок із Харкова

– з ймовірністю 0,4. Після залпу по мішені виявлено два влучення. Що більш ймовірно – влучив стрілок із Харкова чи ні?

Відповідь: **влучив.**

11. Хтось знайшов загублену банківську картку. Знайти ймовірність того, що двох спроб, які надаються банкоматом, вистачить для того, щоб відгадати невідомий йому секретний код.

Відповідь: $\mathbf{\dfrac{2}{10^4}}$.

12. Два баскетболісти, що мають ймовірності влучення в кільце при одному кидку відповідно 0,7 та 0,6, виконують по два кидки. Знайти ймовірність того, що: а) перший влучить більше разів, ніж другий; б) буде нічия; в) виграє другий.

Відповідь: $\mathbf{0{,}2296}$; $\mathbf{0{,}2412}$; $\mathbf{0{,}1296}$.

13. Модульна робота містить дві задачі з теорії ймовірностей та дві з математичної статистики. Ймовірність розв'язати задачу з першої теми 0,6, а з другої – 0,8. Яка ймовірність хоча б з однієї теми розв'язати обидві задачі?

Відповідь: $\mathbf{0{,}9936}$.

14. Одного разу викладач на заліку замислився над оцінкою студента: «добре» або «задовільно». Для вирішення цієї проблеми студентові було запропоновано розкласти по двох коробках 2 білі і 2 чорні кулі. Викладач обирає навмання коробку і з неї навмання вилучає кулю. Якщо куля буде чорна, то оцінка виставляється «задовільно», а якщо біла – «добре». Яким чином студент має розкласти кулі по коробках, щоб забезпечити собі кращу оцінку з максимальною ймовірністю?

4. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЙЄСА

4.1. Формула повної ймовірності

На практиці зустрічаються типові ситуації, коли випадкова подія A може відбутися тільки одночасно з однією з попарно несумісних подій $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$, що утворять повну групу. Тоді події $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$ називаються *гіпотезами*. Оскільки гіпотези утворять повну групу подій, то

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

Поява події A означає здійснення однієї з попарно несумісних подій H_1A, H_2A, H_3A, …, H_nA. Отже,

$$A = H_1A + H_2A + H_3A + \ldots + H_nA.$$

Ймовірність події A, що може наступити разом з однією з гіпотез $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих гіпотез на відповідні умовні ймовірності події A

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n)$$

або

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Ця формула називається *формулою повної ймовірності.*

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. У комерційному банку протягом одного кварталу 1000 вкладників відкрили депозит строком на 3 місяці, 300 вкладників – строком на 6 місяців і 100 вкладників – строком на 12 місяців. Дострокове розірвання договорів строком на 1 квартал у середньому робить 0,5% вкладників, строком на півроку – 1% вкладників і строком на 1 рік – 1,5% вкладників. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний вкладник зробить дострокове розірвання договору.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що навмання вибраний вкладник зробить дострокове розірвання договору. Введемо гіпотези: H_1 – подія, яка полягає в тому, що навмання вибраний вкладник відкрив депозит строком на 3 місяці; H_2 – подія, яка полягає в тому, що навмання вибраний вкладник відкрив депозит строком на 6 місяців; H_3 – подія, яка полягає в тому, що навмання вибраний вкладник відкрив депозит строком на 12 місяців. Події H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P(H_1)=\frac{1000}{1000+300+100}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7},\quad P(H_2)=\frac{300}{1400}=\frac{3}{14},\quad P(H_3)=\frac{100}{1400}=\frac{1}{14}.$$

Перевірка:

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=\frac{10}{14}+\frac{3}{14}+\frac{1}{14}=1.$$

Крім того, маємо умовні ймовірності $P(A/H_1)=0{,}005$, $P(A/H_2)=0{,}01$, $P(A/H_3)=0{,}015$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=\frac{5}{7}\cdot 0{,}005+$$

$$+\frac{3}{14}\cdot 0{,}01+\frac{1}{14}\cdot 0{,}015=\frac{1}{280}+\frac{3}{1400}+\frac{3}{2800}=\frac{10+6+3}{2800}=\frac{19}{2800}\approx 0{,}007.$$

Відповідь: $\approx 0{,}007$.

Приклад 2. У першій групі 20 студентів. З них 18 здали сесію в строк. У другій групі 10 студентів. З них 9 здали сесію в строк. Один студент перевівся із другої групи в першу. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний після цього студент із першої групи здав сесію вчасно.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що навмання вибраний студент із першої групи здав сесію вчасно. Введемо гіпотези: H_1 – подія, яка полягає в тому, що студент, який перевівся із другої групи в першу здав сесію в строк; H_2 – подія, яка полягає в тому, що студент, який перевівся із другої групи в першу не здав сесію в строк. Події H_1, H_2, утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P(H_1)=\frac{9}{10},\quad P(H_2)=\frac{1}{10}.$$

Перевірка:

$$P(H_1)+P(H_2)=\frac{9}{10}+\frac{1}{10}=1.$$

Крім того, маємо умовні ймовірності $P(A/H_1)=\frac{19}{21}$, $P(A/H_2)=\frac{18}{21}$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21}+$$

$$+\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21}=\frac{57}{70}+\frac{3}{35}=\frac{63}{70}=\frac{9}{10}.$$

Відповідь: $\frac{9}{10}$.

Приклад 3. У ящик, що містить 3 однакові деталі, кинута стандартна деталь, а потім навмання витягнута одна деталь. Знайти ймовірність того, що витягнуто стандартну деталь, якщо рівноймовірні всі можливі припущення про число стандартних деталей, що спочатку були в ящику.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що навмання витягнута деталь стандартна. Введемо гіпотези: H_1 – подія, яка полягає в тому, що спочатку в ящику не було стандартних деталей; H_2 – подія, яка полягає в тому, що спочатку в ящику була 1 стандартна деталь; H_3 – подія, яка полягає в тому, що спочатку в ящику було 2 стандартні деталі; H_4 – подія, яка полягає в тому, що спочатку в ящику було 3 стандартні деталі. Події H_1, H_2, H_3, H_4 утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=P(H_4)=\frac{1}{4}.$$

Перевірка:

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)+P(H_4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1.$$

Крім того, маємо умовні ймовірності $P(A/H_1)=\frac{1}{4}$, $P(A/H_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P(A/H_3)=\frac{3}{4}$, $P(A/H_4)=\frac{4}{4}=1$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)+$$
$$+P(H_4)P(A/H_4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1\right)=\frac{10}{16}=0{,}625.$$

Відповідь: $0{,}625$.

Приклад 4*. Знайти ймовірність того, що при підкиданні монети серія із двох «цифр» підряд з'явиться раніше, ніж серія із трьох «гербів» підряд.

Розв'язання. Введемо позначення. A – подія, яка полягає в тому, що серія із двох «цифр» підряд відбудеться раніше, ніж серія із трьох «гербів» підряд. C_i – подія, що полягає в появі «цифри» при i-ому підкиданні. G_i – подія, що полягає в появі «герба» при i-ому підкиданні.

$$P(C_i)=P(G_i)=\frac{1}{2}.$$

Введемо гіпотези C_1 і G_1.

Перевірка:

$$P(C_1)+P(G_1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=P(C_1)P(A/C_1)+P(G_1)P(A/G_1)$$

або

$$P(A)=\frac{1}{2}P(A/C_1)+\frac{1}{2}P(A/G_1). \tag{1}$$

Введемо гіпотези C_2 і G_2.

Перевірка:

$$P(C_2)+P(G_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A/C_1) = P(C_2)P(A/C_1C_2) + P(G_2)P(A/C_1G_2) \qquad (2)$$

Очевидно, що

$$P(A/C_1C_2) = 1, \quad P(A/C_1G_2) = P(A/G_1).$$

Тому формула (2) приймає вигляд

$$P(A/C_1) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}P(A/G_1) \qquad (3)$$

Введемо гіпотези $H_1 = C_2C_3$, $H_2 = C_2G_3$, $H_3 = G_2G_3$, $H_4 = G_2C_3$.

Оскільки події C_i і G_i незалежні в сукупності, то

$$P(H_1) = P(C_2C_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P(H_2) = P(C_2G_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(H_3) = P(G_2G_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P(H_4) = P(G_2C_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Перевірка:

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Знову застосуємо формулу повної ймовірності

$$P(A/G_1) = P(H_1)P(A/G_1H_1) + P(H_2)P(A/G_1H_2) + P(H_3)P(A/G_1H_3) + $$
$$+ P(H_4)P(A/G_1H_4). \qquad (4)$$

Очевидно, що

$$P(A/G_1H_1) = P(A/G_1C_2C_3) = 1, \quad P(A/G_1H_2) = P(A/G_1C_2G_3) = P(A/G_1),$$

$$P(A/G_1H_3) = P(A/G_1G_2G_3) = 0, \quad P(A/G_1H_4) = P(A/G_1G_2C_3) = P(A/C_1).$$

Тому формула (4) приймає вигляд

$$P(A/G_1) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}P(A/G_1) + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}P(A/C_1), \ \frac{3}{4}P(A/G_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}P(A/C_1),$$

$$P(A/G_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}P(A/C_1). \qquad (5)$$

Розв’яжемо систему рівнянь (3), (5). Підставимо (3) в (5)

$$P(A/G_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(A/G_1)\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}P(A/G_1), \quad \frac{5}{6}P(A/\Gamma_1) = \frac{3}{6},$$

$$P(A/G_1) = \frac{3}{5}.$$

Підставимо останній вираз в (3)

$$P\left(A/C_1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{5}{10}+\frac{3}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

Після підстановки $P\left(A/C_1\right)$ і $P\left(A/G_1\right)$ у формулу (1) остаточно одержимо

$$P\left(A\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{10}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}.$$

Відповідь: $\frac{7}{10}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Студент вивчив не всі білети модульного контролю. Що для нього краще: отримати білет першим чи другим?

Відповідь: ймовірність отримати «хороший» білет дорівнює відношенню білетів, які студент вивчив до загального числа білетів і не залежить від того, отримує він білет першим чи другим.

2. З повного набору **28** костей доміно навмання взята кість. Знайти ймовірність того, що другу навмання взяту кість можна приставити до першої.

Відповідь: $\frac{7}{18}$.

3. У першій урні **5** білих і **10** чорних куль, у другий – **3** білі та **7** чорних куль. Із другої урни в першу переклали **1** кулю, а потім з першої урни вийняли навмання одну кулю. Визначити ймовірність того, що вийнята куля – біла.

Відповідь: $\frac{53}{160}$.

4. Є **4** урни. У першій урні **1** біла і **1** чорна кулі, у другий – **2** білі і **3** чорні кулі, у третій – **3** білі і **5** чорних куль, у четвертій **4** білі і **7** чорних куль. Відомо, що ймовірність вибору першої урни $P\left(H_1\right)=\frac{1}{10}$, другої $P\left(H_2\right)=\frac{1}{5}$, третьої

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_3) = \frac{3}{10}$, четвертої $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}_4) = \frac{2}{5}$. Навмання вибирають одну з урн і з неї виймають кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла.

Відповідь: $\frac{\mathbf{1707}}{\mathbf{4400}}$.

5. Є два набори деталей. Ймовірність того, що деталь першого набору стандартна дорівнює **0,8**, а другого – **0,9**. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь (з навмання взятого набору) стандартна.

Відповідь: **0,85**.

6. У партії деталей, що надійшли в продаж, **50%** виготовлені першим заводом, **30%** – другим, **20%** – третім. Ймовірність дефекту для виробів першого заводу – **0,1**, другого – **0,05**, третього – **0,15**. Яка ймовірність того, що навмання вибраний виріб виявився з дефектом?

Відповідь: **0,095**.

7. У цеху працює **20** верстатів. З них **10** марки $\boldsymbol{A}$, **6** марки $\boldsymbol{B}$ і **4** марки $\boldsymbol{C}$. Всі верстати мають однакову продуктивність. Ймовірність того, що якість виготовленої деталі виявиться відмінною для кожного із цих верстатів відповідно дорівнює **0,9**, **0,8** і **0,7**. Який відсоток відмінних деталей випускає цех у цілому?

Відповідь: **83%**.

4.2. Формула ймовірностей гіпотез (формула Байєса)

Нехай подія $\boldsymbol{A}$ може наступити тільки разом з однієї з гіпотез $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3, ..., \boldsymbol{H}_n$. Допустимо, що проведено випробування, у результаті якого з'явилася подія $\boldsymbol{A}$. Її поява зумовить переоцінку *апріорних* (a priori (лат.) – до експерименту) ймовірностей гіпотез. Для обчислення умовної ймовірності гіпотези $\boldsymbol{H}_k$, $\boldsymbol{k} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}}$ в припущенні, що подія $\boldsymbol{A}$ уже відбулося, застосовується формула Байєса.

$$P\left(H_k/A\right)=\frac{P\left(H_k\right)P\left(A/H_k\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P\left(H_i\right)P\left(A/H_i\right)},\quad k=\overline{1,n},$$

де $P\left(H_k/A\right)$ – *апостеріорні* (a posteriori (лат.) – після експерименту) ймовірності гіпотез, тобто після випробування, результатом якого стала подія A.

Формула Байєса дає можливість переоцінити ймовірності гіпотез з урахуванням результату досліду.

Зауваження. Якщо ймовірності всіх гіпотез до появи події *A* однакові, то формула Байєса приймає вигляд

$$P\left(H_k/A\right)=\frac{P\left(A/H_k\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P\left(A/H_i\right)},\quad k=\overline{1,n}.$$

Якщо після досліду, що закінчився появою події *A* разом з однією з гіпотез $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$, проводиться ще один дослід, у результаті якого може відбутися або не відбутися подія *B*, то умовна ймовірність події *B* обчислюється за формулою повної ймовірності, у яку підставляються не колишні ймовірності гіпотез $P\left(H_i\right)$, а нові $P\left(H_i/A\right)$, тобто

$$P\left(B/A\right)=\sum_{i=1}^{n}P\left(H_i/A\right)P\left(B/H_iA\right).$$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. У магазині продаються годинники 3 заводів. Першим заводом виготовлені 30% годинників, що є в наявності, другим - 25% і третім - всі інші годинники. Ймовірність того, що через місяць після установки точного часу годинник буде показувати час із помилкою більше 10 секунд, для першого заводу складає 1%, для другого - 1,5% і для третього - 2%. Куплений покупцем годинник через місяць після установки точного часу показав час із помилкою більше 10 секунд. Знайти ймовірність того, що він виготовлений заводом 1.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що куплений покупцем годинник через місяць після установки точного часу показав час із помилкою більше 10 секунд. Введемо гіпотези: H_1 – подія, яка полягає в тому, що куплений покупцем годинник виготовлений першим заводом; H_2 – подія, яка полягає в тому, що куплений покупцем годинник виготовлений другим заводом; H_3 – подія, яка полягає в тому, що куплений покупцем годинник виготовлений третім заводом. Події H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P(H_1)=\frac{30}{100}=0{,}3,\quad P(H_2)=\frac{25}{100}=0{,}25,\quad P(H_3)=\frac{100-(25+30)}{100}=\frac{45}{100}=0{,}45.$$

Перевірка:

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=0{,}3+0{,}25+0{,}45=1.$$

Крім того, маємо умовні ймовірності $P(A/H_1)=0{,}01$, $P(A/H_2)=0{,}015$, $P(A/H_3)=0{,}02$.

За формулою Байєса

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}=$$

$$=\frac{0{,}3\cdot 0{,}01}{0{,}3\cdot 0{,}01+0{,}25\cdot 0{,}015+0{,}45\cdot 0{,}02}=\frac{0{,}003}{0{,}003+0{,}00375+0{,}009}=\frac{300}{1575}\approx 0{,}19.$$

Таким чином, із всіх «неточних» годинників, що є в наявності в магазині, **19%** виготовлені заводом **1**.

Неважко бачити, що після того, як стало відомо, що подія A відбулася, оцінка гіпотези H_1 суттєво змінилася: тоді як її апріорна оцінка $P(H_1)$ складала $0{,}3=30\%$ апостеріорна оцінка $P(H_1/A)$ складає вже $\approx 0{,}19=19\%$. Тобто оцінка гіпотези H_1 зменшилася майже на $30-19=11\%$.

Відповідь: $\frac{300}{1575}$.

Приклад 2. У піраміді встановлені 10 гвинтівок, з яких 4 мають оптичний приціл. Ймовірність того, що стрілок влучить у мішень із гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; із гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8.

Стрілок влучив у мішень із навмання взятої гвинтівки. Що ймовірніше: стрілок стріляв із гвинтівки з оптичним прицілом або без нього?

Розв'язання. Нехай $\boldsymbol{A}$ – подія, яка полягає в тому, що стрілець влучив у мішень із навмання взятої гвинтівки. Введемо гіпотези: $\boldsymbol{H_1}$ – подія, яка полягає в тому, що стрілок стріляв із гвинтівки з оптичним прицілом; $\boldsymbol{H_2}$ – подія, яка полягає в тому, що стрілок стріляв із гвинтівки без оптичного прицілу. Події $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$ утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P(H_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},\qquad P(H_2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Перевірка:

$$P(H_1)+P(H_2)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1.$$

Крім того, маємо умовні ймовірності $P(A/H_1)=0{,}95$, $P(A/H_2)=0{,}8$.

За формулою Байєса

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)}=$$

$$=\frac{\frac{2}{5}\cdot 0{,}95}{\frac{2}{5}\cdot 0{,}95+\frac{3}{5}\cdot 0{,}8}=\frac{1{,}9}{1{,}9+2{,}4}=\frac{1{,}9}{4{,}3}=\frac{19}{43}.$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\cdot 0{,}8}{\frac{2}{5}\cdot 0{,}95+\frac{3}{5}\cdot 0{,}8}=\frac{2{,}4}{1{,}9+2{,}4}=\frac{2{,}4}{4{,}3}=\frac{24}{43}.$$

Відповідь: $\frac{24}{43}>\frac{19}{43}$. Таким чином, ймовірніше, що гвинтівка була без оптичного прицілу.

Приклад 3. Два стрілки незалежно один від другого стріляють по одній мішені, роблячи кожний по одному пострілу. Ймовірність влучення в мішень для першого стрілка **0,8**. Для другого – **0,4**. Після стрілянини в мішені знайдена одна пробоїна. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив перший стрілок.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Нехай $\boldsymbol{A}$ – подія, яка полягає в тому, що у мішені виявлена одна пробоїна. Введемо гіпотези: $\boldsymbol{H_1}$ – подія, яка полягає в тому, що обидва стрілка промахнулися; $\boldsymbol{H_2}$ – подія, яка полягає в тому, що влучив тільки перший стрілець; $\boldsymbol{H_3}$ – подія, яка полягає в тому, що влучив тільки другий стрілець; $\boldsymbol{H_4}$ – подія, яка полягає в тому, що влучили обидва стрільці. Події $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$, $\boldsymbol{H_4}$ утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P(H_1)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12,\quad P(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48,\quad P(H_3)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08,$$

$$P(H_4)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32.$$

Перевірка:

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)+P(H_4)=0{,}12+0{,}48+0{,}08+0{,}32=1.$$

Крім того, маємо умовні ймовірності $P(A/H_1)=0$, $P(A/H_2)=1$, $P(A/H_3)=1$, $P(A/H_4)=0$.

За формулою Байєса

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{4}P(H_i)P(A/H_i)},$$

Тоді

$$P(H_2/A)=\frac{0{,}48\cdot 1}{0{,}12\cdot 0+0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1+0{,}32\cdot 0}=\frac{0{,}48}{0{,}48+0{,}08}=\frac{0{,}48}{0{,}56}=\frac{6}{7}.$$

Другий спосіб. Нехай $\boldsymbol{A}$ – подія, яка полягає в тому, що у мішені виявлена одна пробоїна. Введемо гіпотези: $\boldsymbol{H_1}$ – подія, яка полягає в тому, що перший стрілець влучив; $\boldsymbol{H_2}$ – подія, яка полягає в тому, що перший стрілець промахнувся. Події $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$ утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P(H_1)=0{,}8,\quad P(H_2)=0{,}2.$$

Перевірка:

$$P(H_1)+P(H_2)=0{,}8+0{,}2=1.$$

Крім того, маємо умовні ймовірності $P(A/H_1)=0{,}6$, $P(A/H_2)=0{,}4$.

За формулою Байєса

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)}{P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)+P\left(H_2\right)P\left(A/H_2\right)}=\frac{0{,}8\cdot 0{,}6}{0{,}8\cdot 0{,}6+0{,}2\cdot 0{,}4}=$$

$$=\frac{0{,}48}{0{,}48+0{,}08}=\frac{0{,}48}{0{,}56}=\frac{6}{7}.$$

Відповідь: $\frac{6}{7}$.

Приклад 4. Три мисливці одночасно вистрілили по ведмедю, який був убитий однією кулею. Знайти ймовірність того, що він був убитий першим мисливцем, якщо ймовірності вбити ведмедя при одному пострілі для кожного з мисливців відповідно дорівнюють: $0{,}3$, $0{,}4$, $0{,}5$.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Нехай A – подія, яка полягає в тому, що ведмідь убитий однією кулею. Введемо гіпотези: H_1 – подія, яка полягає в тому, що всі три мисливці промахнулися; H_2 – подія, яка полягає в тому, що влучив тільки перший мисливець; H_3 – подія, яка полягає в тому, що влучив тільки другий мисливець; H_4 – подія, яка полягає в тому, що влучив тільки третій мисливець; H_5 – подія, яка полягає в тому, що влучили тільки перший і другий мисливці; H_6 – подія, яка полягає в тому, що влучили тільки перший і третій мисливці; H_7 – подія, яка полягає в тому, що влучили тільки другий і третій мисливці; H_8 – подія, яка полягає в тому, що влучили всі три мисливці. Події H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8 утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P\left(H_1\right)=0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}21,\qquad P\left(H_2\right)=0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}09,$$

$$P\left(H_3\right)=0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}14,\qquad P\left(H_4\right)=0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}21$$

$$P\left(H_5\right)=0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}06,\qquad P\left(H_6\right)=0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}09,$$

$$P\left(H_7\right)=0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}14,\qquad P\left(H_8\right)=0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}06.$$

Перевірка:

$$P\left(H_1\right)+P\left(H_2\right)+P\left(H_3\right)+P\left(H_4\right)+P\left(H_5\right)+P\left(H_6\right)+P\left(H_7\right)+P\left(H_8\right)=$$

$$=0{,}21+0{,}09+0{,}14+0{,}21+0{,}06+0{,}09+0{,}14+0{,}06=1.$$

Крім того, маємо умовні ймовірності $P(A/H_1)=0$, $P(A/H_2)=1$, $P(A/H_3)=1$, $P(A/H_4)=1$, $P(A/H_5)=0$, $P(A/H_6)=0$, $P(A/H_7)=0$, $P(A/H_8)=0$.

За формулою Байєса

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{\sum_{i=1}^{8}P(H_i)P(A/H_i)},$$

Тоді

$$P(H_2/A)=$$

$$=\frac{0{,}09\cdot 1}{0{,}21\cdot 0+0{,}09\cdot 1+0{,}14\cdot 1+0{,}21\cdot 1+0{,}06\cdot 0+0{,}09\cdot 0+0{,}14\cdot 0+0{,}06\cdot 0}=$$

$$=\frac{0{,}09}{0{,}09+0{,}14+0{,}21}=\frac{9}{44}\approx 0{,}205.$$

Другий спосіб. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що ведмідь убитий однією кулею. Введемо гіпотези: H_1 – подія, яка полягає в тому, що перший мисливець влучив; H_2 – подія, яка полягає в тому, що перший мисливець промахнувся.

Події H_1, H_2 утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P(H_1)=0{,}3,\quad P(H_2)=0{,}7.$$

Перевірка:

$$P(H_1)+P(H_2)=0{,}3+0{,}7=1.$$

Крім того, маємо умовні ймовірності $P(A/H_1)=0{,}6\cdot 0{,}5{=}0{,}3$ (перший стрілець влучив, а другий і третій промахнулися), $P(A/H_2)=0{,}4\cdot 0{,}5{+}0{,}6\cdot 0{,}5{=}0{,}5$ (влучив тільки другий або тільки третій мисливець).

За формулою Байєса

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)}{P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)+P\left(H_2\right)P\left(A/H_2\right)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}3}{0{,}3\cdot 0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}5}=$$

$$=\frac{0{,}09}{0{,}09+0{,}35}\approx 0{,}205.$$

Відповідь: $\approx 0{,}205$.

Завдання для самостійної роботи

1. В автомагазині є в наявності **600** лампочок габаритних вогнів. З них **200** вироблені в Німеччині, **250** у Франції та інші в Росії. Ймовірність того, що німецька лампочка виявиться стандартною, дорівнює **0,97**, французька – **0,91** і російська – **0,93**. Знайти ймовірність того, що навмання взята лампочка, що виявилася стандартною, виготовлена в Німеччині.

Відповідь: $0{,}346$.

2. Батарея із трьох гармат зробила залп, причому два снаряди попалили в ціль. Знайти ймовірність того, що перша гармата дала влучення, якщо ймовірності влучення в ціль першою, другою і третьою гарматами відповідно дорівнюють **0,4**, **0,3** і **0,5**.

Відповідь: $\frac{20}{29}$.

3. Маємо **10** урн. В **9** з них є по **2** білі та по **2** чорні кулі, а в одній – **5** білих і **1** чорна. З навмання вибраної урни взята куля. Чому дорівнює ймовірність того, що ця куля взята з урни, що містить **5** білих і **1** чорну кулю, якщо вона виявився білою?

Відповідь: $\frac{5}{32}$.

4. У першій урні **1** біла і **2** чорні кулі, у другій – **100** білих і **100** чорних куль. Навмання із другої урни переклали в першу **1** кулю, а потім з першої урни вийняли одну кулю. Яка ймовірність того, що вийнята куля раніше була в другій урні, якщо відомо, що вона біла?

Відповідь: $\mathbf{\frac{1}{3}}$.

5. Ймовірність того, що новий модем D-Link буде працювати безвідмовно дорівнює **0,96**. Тестування модему проводиться за спрощеною схемою, що дає позитивний результат з ймовірністю **0,98** для справного модему та **0,05** для модему, що працює зі збоями. Яка ймовірність того, що модем, який успішно пройшов тестування, працює безвідмовно?

Відповідь: $\approx \mathbf{0{,}998}$.

6. Електронний прилад містить дві мікросхеми. Ймовірність виходу з ладу протягом одного року для першої мікросхеми дорівнює **0,2**, а для другої – **0,1**. Відомо, що протягом року з ладу вийшла одна мікросхема. Яка ймовірність того, що це перша мікросхема?

Відповідь: $\approx \mathbf{0{,}6923}$.

7. У групі з **16** стрільців є **4** відмінних, **10** добрих і **2** задовільних стрілка. При одному пострілі відмінний, добрий і задовільний стрілки попадають у мішень із ймовірностями **0,98**, **0,86** і **0,7** відповідно. Довільно вибраний стрілець вистрілив двічі; відзначено одне влучення та один промах. Яка ймовірність того, що це був відмінний стрілець?

Відповідь: $\approx \mathbf{0{,}04605}$.

5. ПОВТОРЕННЯ ВИПРОБУВАНЬ

5.1. Формула Бернуллі. Найймовірніше число появ події.

Нехай проводиться декілька випробувань, у результаті кожного з яких може наступити або не наступити деяка подія A. Якщо ймовірність появи події A у кожному випробуванні не залежить від наслідків інших випробувань, то такі випробування називаються *незалежними щодо події A*.

У загальному випадку в різних незалежних випробуваннях ймовірності появи події A можуть бути різними. Розглянемо незалежні випробування, у кожному з яких ймовірність появи події A та сама. Такі випробування називаються *незалежними випробуваннями Бернуллі.*

Нехай проводиться n незалежних випробувань, причому ймовірність появи події A у кожному випробуванні постійна і дорівнює p. Тоді ймовірність протилежної події $\overline{A}$ (непояви події A) у кожному випробуванні також постійна і дорівнює

$$q = 1 - p.$$

Складною подією називається поєднання, тобто спільне настання декількох окремих простих подій.

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A, ймовірність появи якої в кожному випробуванні постійна і дорівнює p, відбудеться рівно m раз можна обчислити за формулою Бернуллі

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де $q = 1 - p$.

Також використовується позначення $P_n(m)$.

Ймовірності того, що в n незалежних випробуваннях подія A наступить менше m раз, не більше m раз, не менше m раз, більше m раз, хоча б один раз можна обчислити відповідно за формулами

$$P_{<m,\,n} = P_{0,\,n} + P_{1,\,n} + P_{2,\,n} + \ldots + P_{m-1,\,n},$$

$$P_{\le m,\,n} = P_{0,\,n} + P_{1,\,n} + P_{2,\,n} + \ldots + P_{m,\,n},$$

$$P_{\ge m,\,n} = P_{m,\,n} + P_{m+1,\,n} + P_{m+2,\,n} + \ldots + P_{n,\,n},$$

$$P_{>m,\,n} = P_{m+1,\,n} + P_{m+2,\,n} + P_{m+3,\,n} + \ldots + P_{n,\,n},$$

$$P_{1\le m\le n,\,n} = 1 - P_{0,\,n} = 1 - q^n.$$

Також використовуються позначення $P_n(<m)$, $P_n(\le m)$, $P_n(\ge m)$, $P_n(>m)$, $P_n(1\le m\le n)$.

Найймовірнішим числом появ події A *в* n *незалежних випробуваннях* називається число m_0, якщо ймовірність того, що подія A наступить у цих n випробуваннях рівно m_0 раз не менше ймовірності появи цієї події будь-яке інше можливе число раз.

Якщо $p \ne 0$ і $p \ne 1$, то число m_0 можна визначити з подвійної нерівності

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Різниця правого і лівого граничних значень у цій нерівності дорівнює одиниці ($p + q = 1$). Тому числа $np - q$ і $np + p$ або одночасно дробові, або одночасно цілі. Якщо ці числа дробові, то найймовірніше число m_0 має одне значення, якщо ж вони цілі, то найймовірніше число m_0 приймає два значення $m_0' = np - q$ і $m_0'' = np + p$. У випадку, якщо np – ціле число, то $m_0 = np$.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Два рівносильних шахісти грають у шахи. Що ймовірніше: виграти дві партії з чотирьох або три партії з шести (нічиї до уваги не приймаються).

Розв'язання. Оскільки шахісти рівносильні, то ймовірність виграшу $p = \frac{1}{2}$ та ймовірність програшу $q = \frac{1}{2}$. У всіх партіях ймовірність виграшу постійна і байдуже в якій послідовності будуть виграні партії. Таким чином, можна застосувати формулу Бернуллі

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де $q = 1 - p$.

Ймовірність того, що будуть виграні дві партії із чотирьох

$$P_{2,4} = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} = \frac{6}{16}.$$

Ймовірність того, що будуть виграні три партії з шести

$$P_{3,6} = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Відповідь: оскільки $\frac{6}{16} > \frac{5}{16}$, то ймовірніше виграти дві партії з чотирьох, чим три з шести.

Приклад 2. У цеху **6** моторів. Для кожного мотора ймовірність того, що він у даний момент включений, дорівнює **0,8**. Знайти ймовірність того, що в даний момент: а) включені **4** мотори; б) включені всі мотори; в) виключені всі мотори; г) включений хоча б один з моторів.

Розв'язання. За умовою задачі для кожного мотора ймовірність того, що він у даний момент включений $p = 0{,}8$. Ймовірність того, що він у даний момент виключений

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Оскільки ймовірність бути включеним для всіх моторів однакова і байдуже в якій послідовності вони будуть включені, то можна застосувати формулу Бернуллі

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де $q = 1 - p$.

а) Ймовірність того, що в даний момент включені 4 мотори

$$P_{4,6} = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^{6-4} p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}246.$$

б) Ймовірність того, що в даний момент включені всі мотори

$$P_{6,6} = C_6^6 p^6 q^0 = 1 \cdot p^6 \cdot 1 = 0{,}8^6 \approx 0{,}262.$$

в) Ймовірність того, що в даний момент виключені всі мотори

$$P_{0,6} = C_6^0 p^0 q^6 = 1 \cdot 1 \cdot q^6 = 0{,}2^6 \approx 0{,}000064.$$

г) Ймовірність того, що в даний момент включений хоча б один з моторів

$$P_{1\le m\le 6,\,6}=1-P_{0,\,6}=1-C_6^0p^0q^6=1-1\cdot 1\cdot q^6=1-q^6=1-0{,}2^6\approx 0{,}999936.$$

Відповідь: а) $\approx 0{,}246$; б) $\approx 0{,}262$; в) $\approx 0{,}000064$; г) $\approx 0{,}999936$.

Приклад 3. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться в п'яти незалежних випробуваннях не менше двох раз, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події A дорівнює $0{,}3$.

Розв'язання. За умовою задачі ймовірність появи події A у кожному випробуванні $p=0{,}3$. Тоді ймовірність непояви події A у кожному випробуванні

$$q=1-p=1-0{,}3=0{,}7.$$

Оскільки ймовірність появи події A у кожному випробуванні однакова, то можна застосувати формулу Бернуллі

$$P_{m,\,n}=C_n^m p^m q^{n-m},$$

де $q=1-p$.

Ймовірність того, що подія A з'явиться в п'яти незалежних випробуваннях не менше двох раз

$$P_{2,5}+P_{3,5}+P_{4,5}+P_{5,5}=1-\left(P_{0,5}+P_{1,5}\right)=1-\left(C_5^0\cdot p^0\cdot q^5+C_5^1\cdot p^1\cdot q^4\right)=$$

$$=1-\left(1\cdot 1\cdot 0{,}7^5+\frac{5}{1}\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}7^4\right)=1-\left(0{,}16807+0{,}36015\right)=0{,}47178.$$

Відповідь: $0{,}47178$.

Приклад 3. В урні **3** кулі: **1** біла і **2** чорних. Навмання **5** раз виймають **1** кулю і кожного разу повертають. Знайти найймовірніше число появ білої кулі і його ймовірність.

Розв'язання. За умовою задачі ймовірність вийняти білу кулю при кожному випробуванні $p=\frac{1}{3}$, число випробувань $n=5$. Ймовірність не вийняти білу кулю при кожному випробуванні

$$q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Оскільки випробування незалежні та ймовірність вийняти білу кулю в кожному випробуванні однакова, причому $p \neq 0$ і $p \neq 1$, то найймовірніше число появ білої кулі можна визначити з подвійної нерівності

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Отже

$$5 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \leq m_0 \leq 5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3}; \quad 1 \leq m_0 \leq 2.$$

Таким чином, $m_0' = 1$, $m_0'' = 2$. Знайдемо ймовірності появи білої кулі в п'яти незалежних випробуваннях відповідно 1 і 2 рази. За формулою Бернуллі

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

маємо

$$P_{1,5} = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{81} = \frac{80}{243},$$

$$P_{2,5} = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{27} = \frac{80}{243}.$$

Відповідь: найймовірніше число появ білої кулі $m_0' = 1$, $m_0'' = 2$. Ймовірність найймовірнішого числа появ білої кулі $P_{1,5} = P_{2,5} = \frac{80}{243}$.

Приклад 4. Чому дорівнює ймовірність p появи події в кожному з 49 незалежних випробувань, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні однакова і найймовірніше число появ події в цих випробуваннях дорівнює 30?

Розв'язання. За умовою задачі число випробувань $n = 49$. Найймовірніше число появ події в цих випробуваннях $m_0 = 30$. Оскільки випробування незалежні та ймовірність появи події в кожному випробуванні однакова, причому $p \neq 0$ і $p \neq 1$, то найймовірніше число появ події може бути визначене з подвійної нерівності

$$np - q \leq m_0 \leq np + p,$$

де $q = 1 - p$.

Таким чином,

$$\begin{cases} 49p-(1-p)\le 30, \\ 49p+p\ge 30; \end{cases} \quad \begin{cases} 50p\le 31, \\ 50p\ge 30; \end{cases} \quad \begin{cases} p\le 0{,}62, \\ p\ge 0{,}6. \end{cases}$$

Відповідь: $0{,}6\le p\le 0{,}62$.

Приклад 5. Ймовірність влучення стрільцем у ціль дорівнює **0,7**. зроблено **25** пострілів. Визначити найймовірніше число влучень у ціль.

Розв'язання. За умовою задачі ймовірність влучення стрільцем у ціль при кожному пострілі $p=0{,}7$, число пострілів $n=25$. Ймовірність невлучення стрільцем у ціль при кожному пострілі

$$q=1-p=1-0{,}7=0{,}3.$$

Оскільки випробування незалежні та ймовірність влучення стрільцем у ціль при кожному пострілі однакова, причому $p\ne 0$ і $p\ne 1$, то найймовірніше число влучень можна визначити з подвійної нерівності

$$np-q\le m_0\le np+p.$$

Отже

$$25\cdot 0{,}7-0{,}3\le m_0\le 25\cdot 0{,}7+0{,}7; \quad 17{,}2\le m_0\le 18{,}2.$$

Оскільки m_0 – ціле число, то $m_0=18$.

Відповідь: **18**.

Завдання для самостійної роботи

1. Подія B з'явиться у випадку, якщо подія A з'явиться не менше двох раз. Знайти ймовірність того, що подія B наступить, якщо буде проведено **6** незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює **0,3**.

Відповідь: $\approx 0{,}767$.

2. Монету підкидають 6 раз. Знайти ймовірність того, що герб випаде: а) менше двох раз; б) не менше двох раз.

Відповідь: а) $\frac{7}{64}$; б) $\frac{57}{64}$.

3. **30%** виробів підприємства проходять тестовий контроль. Покупець придбав **6** виробів. Чому дорівнює ймовірність того, що з них **4** вироби проходили тестовий контроль.

Відповідь: $\mathbf{0{,}0595}$.

4. По каналу зв'язку передається **5** повідомлень. Кожне повідомлення незалежно від інших з ймовірністю **0,15** спотворюється перешкодами. Знайти ймовірності подій: а) з **5** повідомлень **3** спотворені; б) не менше **4** з **5** повідомлень передані спотвореними; в) не більше **2** переданих повідомлень спотворені; г) всі повідомлення прийняті без спотворень; д) не менше **2** повідомлень спотворені; е) спотворено хоча б одне повідомлення.

Відповідь: а) $\approx \mathbf{0{,}02438}$; б) $\mathbf{0{,}83521}$; в) $\approx \mathbf{0{,}97339}$; г) $\approx \mathbf{0{,}44371}$; д) $\mathbf{0{,}16479}$; е) $\approx \mathbf{0{,}55629}$.

5. Випробовується кожний з 15 елементів деякого пристрою. Ймовірність пройти випробування для кожного елемента однакова і дорівнює $\mathbf{0{,}9}$. Знайти найймовірніше число елементів, які пройдуть випробування.

Відповідь: **14**.

6. Батарея провела **6** пострілів по військовому об'єкту. Ймовірність влучення в об'єкт при одному пострілі дорівнює **0,3**. Знайти: а) найймовірніше число влучень; б) ймовірність найймовірнішого числа влучень; в) ймовірність того, що об'єкт буде зруйнований, якщо для цього досить хоча б двох влучень.

Відповідь: а) **2**; б) **0,324**; в) **0,58**.

7. В урні **100** білих і **80** чорних куль. З урни витягають $\boldsymbol{n}$ куль (з поверненням кожної вийнятої кулі). Найймовірніше число появ білої кулі дорівнює **11**. Знайти $\boldsymbol{n}$.

Відповідь: $\boldsymbol{n_1 = 19}$, $\boldsymbol{n_2 = 20}$.

5.2. Теорема Пуассона

Якщо проводяться незалежні випробування Бернуллі при $n \to \infty$, причому ймовірність появи події A в окремому випробуванні дорівнює $p \to 0$ і $np = \lambda$ (припускається, що $\lambda = const$, тобто середнє число появ події A у різних серіях випробувань або при різних досить великих фіксованих значеннях n залишається постійним), то ймовірність появи цієї події рівно m раз прямує до $\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

З теореми Пуассона випливає *наближена* (*асимптотична*) *формула Пуассона*

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

де $\lambda = np$ (λ не обов'язково ціле).

Формулою Пуассона можна користуватися замість формули Бернуллі, коли n велике, а p мале (при даному n, чим ближче p до нуля, тим краще наближення), тобто коли мова йде про рідкі події (звичайно її використовують, якщо $p < 0,1$). Якщо поміняти ролями p і q, то цією формулою можна також користуватися при малих значеннях q. Значення функції $\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ можна брати з таблиці (додаток 1).

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. На ткацькій фабриці робітниця обслуговує **1000** веретен. Ймовірність обриву пряжі на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює **0,004**. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив відбудеться на **5** веретенах.

Розв'язання. За умовою задачі число випробувань $n = 1000$ – велике; ймовірність появи події в кожному випробуванні однакова, причому $p = 0{,}004 < 0{,}1$, тобто має місце рідка подія; $m = 5$. Оскільки $p < 0{,}1$, то можна скористатися наближеною формулою Пуассона

$$P_{m,\,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

де $\lambda = np$.

У нашому випадку

$$\lambda = 1000 \cdot 0{,}004 = 4.$$

Тоді

$$P_{5,\,1000} \approx \frac{4^5 e^{-4}}{5!} = \frac{1024}{120e^4} \approx 0{,}1563.$$

Відповідь: $\approx 0{,}1563$.

Приклад 2. Сільська телефонна станція обслуговує **1000** абонентів. У даному інтервалі часу абонент може зробити виклик незалежно від інших з ймовірністю **0,005**. Знайти ймовірність того, що в даному інтервалі часу було не більше, ніж **7** викликів.

Розв'язання. За умовою задачі число випробувань $n = 1000$ – велике; ймовірність появи події в кожному випробуванні однакова, причому $p = 0{,}005 < 0{,}1$, тобто має місце рідка подія; $m_0 = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, …, $m_7 = 7$. Оскільки $p < 0{,}1$, то можна скористатися наближеною формулою Пуассона

$$P_{m,\,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

де $\lambda = np$.

У нашому випадку

$$\lambda = 1000 \cdot 0{,}005 = 5.$$

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що в даному інтервалі часу було не більше, ніж **7** викликів. Тоді

$$P(A) = P_{0,1000} + P_{1,1000} + P_{2,1000} + \ldots + P_{7,1000} \approx$$

$$\approx e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!}\right) \approx$$

$$\approx 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 + 0{,}1404 + 0{,}1755 +$$

$$+0{,}1755 + 0{,}1462 + 0{,}1044 = 0{,}8666.$$

Відповідь: $\approx 0{,}8666$.

Завдання для самостійної роботи

1. По каналу зв'язку передається помилковий сигнал в одному з **100** випадків. Яка ймовірність появи **5** помилок при передачі **200** незалежних сигналів?

Відповідь: $\approx 0{,}0361$.

2. За даними технологічного контролю в середньому **2%** годинників, що виготовляють на заводі, потребують додаткове регулювання. Знайти ймовірність того, що зі **100** годинників, виготовлених на заводі, додаткове регулювання потребують не більше **3** годинників.

Відповідь: $0{,}8571$.

5.3. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо ймовірність p появи події A у кожному випробуванні постійна та відмінна від нуля і одиниці ($0 < p < 1$), то ймовірність $P_{m,\,n}$ того, що подія A з'явиться в n незалежних випробуваннях рівно m раз, приблизно дорівнює (чим більше n, тим точніше)

$$P_{m,\,n} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

де $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Функція $\varphi(x)$ – парна, тобто $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Її значення можна брати з таблиці (додаток 2).

Локальна теорема Муавра-Лапласа застосовується, коли p і q не малі. Вона дає тим точніше наближення при даному n, чим ближче p до $0{,}5$. Звичайно її використовують, коли $npq \geq 9$.

Зразок розв'язування задач

Приклад. Стрілець влучає в мішень з ймовірністю **0,**2. Знайти ймовірність того, що **400** пострілах стрілець влучить в мішень рівно **80** раз.

Розв'язання. За умовою задачі число випробувань $n = 400$ – велике; ймовірність появи події в кожному випробуванні однакова $p = 0{,}2$; $m = 80$. Ймовірність не появи події в кожному випробуванні

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Знайдемо npq.

$$npq = 400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 64 > 9.$$

Якщо $npq \geq 9$, то можна скористатися локальною теоремою Муавра-Лапласа

$$P_{m,\,n} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

де $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

У нашому випадку

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{64}} = 0.$$

Функцію $\varphi(x)$ знайдемо за таблицею (додаток 2): $\varphi(0) \approx 0{,}3981$.

Тоді

$$P_{80,\,400} \approx \frac{0{,}3981}{\sqrt{64}} \approx \frac{0{,}3981}{8} \approx 0{,}04986.$$

Відповідь: $0{,}04986$.

Завдання для самостійної роботи

1. Ймовірність відхилення температури в реакторі від номінальної дорівнює **0,2** при кожному вимірі. Проведено **400** вимірів. Знайти ймовірність того, що в **50** вимірах буде відхилення від номінальної температури.

Відповідь: $\mathbf{0{,}00005}$.

2. У місті народилося за місяць **200** дітей. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться рівно **100** дівчинок, якщо ймовірність народження хлопчика **0,515**.

Відповідь: $\mathbf{0{,}051}$.

5.4. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Якщо ймовірність p настання події A у кожному випробуванні постійна та відмінна від нуля і одиниці ($0 < p < 1$), то ймовірність $P_n\left(m_1 \le m \le m_2\right)$ того, що подія A з'явиться в n незалежних випробуваннях від m_1 до m_2 (не менше m_1 і не більше m_2) раз, приблизно дорівнює (чим більше n, тим точніше)

$$P_n\left(m_1 \le m \le m_2\right) \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right),$$

де $\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функція Лапласа; $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Також використовується позначення $P_{m_1 \le m \le m_2,\, n}$

Функція Лапласа $\Phi\left(x\right)$ – непарна, тобто $\Phi\left(-x\right) = -\Phi\left(x\right)$. Її значення можна брати з таблиці (додаток 3). Для $x > 5$ припускають $\Phi\left(x\right) = 0{,}5$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа застосовуються, коли p і q не малі. Вона дає тим краще наближення при даному n, чим ближче p до $0{,}5$ Звичайно її використовують, коли $npq \ge 9$.

Зразок розв'язування задач

Приклад. Фабрика випускає в середньому **4%** нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з **4000** штук не більше **170**?

Розв'язання. За умовою задачі число випробувань $n = 4000$ – велике; ймовірність появи події в кожному випробуванні однакова $p = 0{,}04$; $m_1 = 0$, $m_2 = 170$, $m_1 \le m \le m_2$. Ймовірність не появи події в кожному випробуванні

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}04 = 0{,}96.$$

Знайдемо npq.

$$npq = 4000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 = 153{,}6 > 9.$$

Якщо $npq \ge 9$, то можна скористатися інтегральною теоремою Муавра-Лапласа

$$P_n\left(m_1 \le m \le m_2\right) \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right),$$

де $\Phi\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функція Лапласа; $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

У нашому випадку

$$x_1 = \frac{0 - 4000 \cdot 0{,}04}{\sqrt{153{,}6}} \approx -12{,}910, \qquad x_2 = \frac{170 - 4000 \cdot 0{,}04}{\sqrt{153{,}6}} \approx 0{,}807.$$

Функцію $\Phi\left(x\right)$ знайдемо за таблицею (додаток 3); для $x > 5$ припускають $\Phi\left(x\right) = 0{,}5$:

$$\Phi\left(x_1\right) = \Phi\left(-12{,}910\right) = -\Phi\left(12{,}910\right) = -0{,}5,$$

$$\Phi\left(x_2\right) = \Phi\left(0{,}807\right) \approx 0{,}291.$$

Тоді

$$P_{4000}\left(0 \le m \le 170\right) \approx 0{,}291 + 0{,}5 = 0{,}791.$$

Відповідь: $0{,}791$.

Завдання для самостійної роботи

1. На деякому підприємстві в середньому **2%** готових приладів потребують додаткового регулювання. Замовник перевіряє якість партії з **600** приладів. Якщо виявиться, що партія містить більше **15** виробів, що вимагають додаткового регулювання, то вся партія повертається. Визначити ймовірність того, що партія буде прийнята.

Відповідь: $\mathbf{0{,}809}$.

2. Ймовірність відхилення температури в реакторі від номінальної дорівнює **0,2** при кожному вимірі. Проведено **400** вимірів. Знайти ймовірність того, що відхилення температури буде не менше, ніж в **50** і не більше, ніж в **80** вимірах.

Відповідь: $\mathbf{0{,}4999}$.

5.5. Оцінка відхилення відносної частоти від постійної ймовірності

Ймовірність того, що в $\boldsymbol{n}$ незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події $\boldsymbol{A}$ постійна і дорівнює $\boldsymbol{p}$ ($\mathbf{0} < \boldsymbol{p} < \mathbf{1}$), абсолютна величина відхилення відносної частоти $\dfrac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$ появи події $\boldsymbol{A}$ від постійної ймовірності $\boldsymbol{p}$ не перевищить наперед заданого числа $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ приблизно дорівнює подвоєній функції Лапласа $\mathbf{2}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varepsilon}\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{pq}}}$, тобто

$$\boldsymbol{P}\left(\left|\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{p}\right| \le \boldsymbol{\varepsilon}\right) \approx \mathbf{2}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}),$$

де $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varepsilon}\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{pq}}}$.

Зразок розв'язування задач

Приклад. Ймовірність появи події в кожному з **625** незалежних випробувань дорівнює **0,8**. Знайти ймовірність того, що відносна частота появ події відхилитися від її ймовірності по абсолютній величині не більше, ніж на **0,04**.

Розв'язання. За умовою задачі число випробувань $\boldsymbol{n = 625}$; ймовірність появи події в кожному випробуванні однакова $\boldsymbol{p = 0{,}8}$; $\boldsymbol{\varepsilon = 0{,}04}$. Ймовірність не появи події в кожному випробуванні

$$\boldsymbol{q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2}.$$

Скористаємося формулою

$$\boldsymbol{P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi(x)},$$

де $\boldsymbol{x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}$.

Тоді

$$\boldsymbol{P\left(\left|\frac{m}{625} - 0{,}8\right| \le 0{,}04\right) \approx 2\Phi\left(0{,}04 \cdot \sqrt{\frac{625}{0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = 2\Phi(2{,}5) \approx 2 \cdot 0{,}4938 = 0{,}9876}.$$

Відповідь: $\boldsymbol{0{,}9876}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Ймовірність того, що деталь нестандартна дорівнює **0,1**. Скільки деталей потрібно відібрати, щоб з ймовірністю **0,9544** можна було стверджувати, що відносна частота появи нестандартних деталей відхиляється від постійної ймовірності $\boldsymbol{p = 0{,}1}$ по абсолютній величині не більше ніж на **0,03**.

Відповідь: **400**.

2. Ймовірність того, що деталь нестандартна дорівнює **0,02**. Серед випадково відібраних **3600** деталей знайти максимальне відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від ймовірності **0,02**, якщо ймовірність такого відхилення дорівнює **0,95**.

Відповідь: $\boldsymbol{\approx 0{,}0046}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: Высшая школа, 2001. – 80 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.Теория вероятностей: Сборник задач. – М.: Наука, 2003. – 392 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 2002. – 368 с.
4. Вища математика: основні розділи: Підручник. У двох книгах. Книга 1/ За ред. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1995. – 372 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2002. – 400 с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003. – 480 с.
7. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 2006. – 215 с.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000. – 416 с.
9. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2-х ч. – Ч. II. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.
10. Зайцев Е.П. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с индивидуальными заданиями и решениями типовых вариантов: Учебно-методическое пособие. – Кременчуг: Изд-во Кременчуг, 2008. – 484 с.
11. Овчинников П.Ф., Лисицин Б.М., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. Ч. 2. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
12. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова. М.: Наука, 2007. – 656 с.

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $P_{m,n} \approx \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0084	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	

m \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0227	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,2237
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 3

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$Ф(x)$	x	$Ф(x)$	x	$Ф(x)$	x	$Ф(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

З М І С Т

Навчальне видання

Павленко Анатолій Васильович
Пасічник Ірина Володимирівна
Моня Андрій Григорович
Запорожченко Олена Євгенівна
Дисковський Олександр Андрійович

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина VI. Випадкові події

Навчальний посібник

Тем. план 2012, поз.95

Підписано до друку 11.07.2012. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк.4,65. Умов. друк. арк. 4,58. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ