МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

РОБОЧА ПРОГРАМА,
методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 101 – екологія (бакалаврський рівень вищої освіти)

Дніпро НМетАУ 2017

УДК 517(07)

Робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 101 – екологія (бакалаврський рівень вищої освіти) / Укл.: В.Л. Копорулін, Л.В. Моссаковська, І.В. Пасічник. – Дніпро: НМетАУ, 2017. – 117 с.

Наведені робоча програма до вивчення дисципліни «Вища математика» у І семестрі, список рекомендованої літератури, методичні вказівки, супроводжені розв'язанням типових прикладів з докладними поясненнями, та варіанти контрольних завдань.

Призначена для студентів першого курсу спеціальності 101 – екологія заочної форми навчання (бакалаврський рівень вищої освіти).

Укладачі: В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.
Л.В. Моссаковська, ст. викл.
І.В. Пасічник, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП

Вища математика без перебільшення є однією з найважливіших складових практично усіх природознавчих і технічних дисциплін. Тому її вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера.

Лекції і практичні заняття, які проводяться для студентів заочної форми навчання, носять переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв’язання типових задач. Головною ж формою навчання студента-заочника є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв’язанням відповідних задач і лише після вироблення достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами академії згідно із затвердженим розкладом.

Сьогодні в Інтернеті неважко знайти величезну кількість літератури з будь-якої теми, в тому числі і з вищої математики. Тому до списку рекомендованої літератури увійшли лише деякі з найбільш уживаних на думку авторів джерел. Рекомендації щодо їх використання дані у методичних вказівках до виконання кожної контрольної роботи. Консультації відносно інших підручників студент може отримати у викладача.

Р О Б О Ч А   П Р О Г Р А М А

навчальної дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

І семестр

Розподіл навчальних годин

Кількість годин					Кількість контр. робіт	Форма звітності
УСЬОГО	Аудиторних занять			Самостійної роботи		
	Усього	Лекцій	Практичних занять			
180	**32**	**24**	**8**	**148**	**1**	**екзамен**

1. Матриці та визначники. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1. Поняття матриці. Види матриць. Визначник квадратної матриці. Обчислення визначників другого та третього порядків. Дії над матрицями та їх властивості.

2. Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь, сумісні і несумісні системи. Розв’язування сумісних систем за формулами Крамера.

2. Елементи векторної алгебри

3. Вектори (основні поняття). Лінійні операції над векторами та їх властивості. Довжина вектора. Проекція вектора на вісь. Зв’язок проекцій вектора з його координатами. Напрямні косинуси вектора.

4. Скалярний та векторний добутки двох векторів, їх властивості та фізичний зміст. Мішаний добуток трьох векторів, його властивості та геометричний зміст.

3. Основи аналітичної геометрії на площині

5. Пряма лінія на площині, основні рівняння. Кут між прямими. Умови перпендикулярності і паралельності прямих.

6. Криві другого порядку (коло, еліпс, гіпербола, парабола), їх рівняння та основні властивості.

4. Функції, їх границі та похідні

7. Поняття функції. Способи завдання функцій. Класифікація функцій. Основні елементарні функції.

8. Границя функції в точці та у нескінченності.

9. Похідна функції в точці, її геометричний та фізичний зміст. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Правила диференціювання.

5. Застосування похідної

10. Правило Лопіталя та його застосування при розкритті невизначеностей різних типів.

11. Локальний екстремум функції. Необхідна та достатні умови існування локального екстремуму функції.

12. Точки перегину. Необхідна та достатня умови існування точки перегину.

13. Асимптоти кривої.

6. Диференціальне числення функції декількох змінних

14. Поняття функції декількох змінних. Геометричний зміст функції двох змінних. Область визначення, границя і неперервність функції двох змінних. Частинні похідні першого порядку функції декількох змінних.

15. Частинні похідні другого порядку функції декількох змінних.

7. Скалярні поля

16. Основні поняття теорії поля: поле, скалярне і векторне, стаціонарне і нестаціонарне, плоске і просторове поля.

17. Скалярне поле: поверхні та лінії рівня, похідна за напрямом, градієнт та його властивості.

8. Невизначений інтеграл

18. Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла. Геометричний зміст невизначеного інтеграла, його основні властивості. Таблиця невизначених

інтегралів основних елементарних функцій. Найпростіші правила інтегрування. Безпосереднє інтегрування. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами.

9. Визначений та невласні інтеграли

19. Означення визначеного інтеграла, його геометричний і фізичний зміст, умови існування. Основні властивості визначеного інтеграла. Обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної і інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

20. Невласні інтеграли першого роду (від обмежених функцій, на нескінченному проміжку), дослідження їх збіжності за означенням.

21. Обчислення площі плоскої фігури та довжини дуги плоскої кривої за допомогою визначеного та невласних інтегралів. Застосування визначеного та невласних інтегралів при розв'язанні задач фізики та хімії.

10. Подвійний і криволінійні інтеграли та їх застосування

22. Означення подвійного інтеграла у декартових координатах, умови його існування, геометричний зміст і основні властивості. Обчислення подвійного інтеграла у декартових координатах.

23. Поняття криволінійного інтеграла першого роду, його геометричний зміст і обчислення для різних способів завдання кривої.

24. Поняття криволінійного інтеграла другого роду, його фізичний зміст, обчислення, зв'язок із подвійним інтегралом (формула Гріна).

11. Векторні поля

25. Векторне поле: векторні лінії, дивергенція (розбіжність) векторного поля та її властивості, соленоїдне поле.

26. Ротор (вихор) та його властивості, безвихрове і потенціальне поля.

27. Потік векторного поля, його тлумачення. Теорема Стокса.

12. Деякі відомості з теорії функцій комплексної змінної

28. Побудова системи комплексних чисел, їх зображення на площині. Дії над комплексними числами, заданими у алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

29. Поняття функції комплексної змінної та його геометричний зміст. Основні елементарні функції. Границя і неперервність функції комплексної змінної.

30. Похідна і диференціал. Умови Коші-Рімана.

31. Інтегрування функцій комплексної змінної.

13. Числові ряди

32. Поняття числового ряду. Збіжність і розбіжність ряду. Ряд геометричної прогресії, ряд Діріхле. Необхідна умова збіжності. Достатня умова розбіжності. Залишок числового ряду. Основні властивості збіжних рядів.

33. Достатні умови (ознаки) збіжності числових рядів з додатними членами: ознака порівняння у звичайному та граничному вигляді, ознака Д’Аламбера, “радикальна” ознака Коші, “інтегральна” ознака Маклорена-Коші.

34. Абсолютна і умовна збіжності знакозмінних числових рядів. Збіжність знакопочережних рядів (ознака Лейбніца). Ряди з комплексними членами та ознаки їх збіжності.

14. Диференціальні рівняння першого порядку

35. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Поняття звичайного диференціального рівняння першого порядку, загальний та частинний розв’язки, їх геометричний зміст. Задача Коші та її геометричний зміст. Теорема Коші (про існування і єдиність розв’язку задачі Коші). Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

36. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та такі, що до них приводяться. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.

15. Диференціальні рівняння вищих порядків

37. Поняття звичайного диференціального рівняння вищого порядку. Розв'язок рівняння.

38. Розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

39. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків: теорема про структуру загального розв'язку, принцип суперпозиції частинних розв'язків. Підбір частинного розв'язку та його відшукання методом невизначених коефіцієнтів для рівнянь з правими частинами «спеціального» вигляду.

16. Елементи операційного числення

40. Перетворення Лапласа: основні поняття і означення. Властивості перетворення Лапласа та їх застосування. Таблиця зображень деяких основних функцій.

41. Способи відновлення оригінала за зображенням. Розв'язання задач Коші для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами операційним методом.

17. Деякі відомості з теорії рівнянь математичної фізики

42. Поняття про рівняння математичної фізики. Моделі, що описуються хвильовими рівняннями, рівняннями теплопровідності. Рівняння механіки суцільних середовищ. Канонічні форми та класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.

43. Класифікація крайових задач. Метод Фур`є

18. Основи теорії ймовірностей випадкових подій

44. Елементи комбінаторики: переставлення, розміщення, сполучення, загальні правила.

45. Основні поняття теорії ймовірностей: випадкові події, їх види та дії над ними, ймовірність випадкової події. Класична ймовірність. Статистична та геометрична ймовірності.

46. Умовна ймовірність. Теореми додавання і множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Ймовірності гіпотез. Формули Байєса.

47. Повторення незалежних випробувань: біноміальна формула Бернуллі, локальна формула Муавра-Лапласа, формула Пуассона, інтегральна формула Муавра-Лапласа.

19. Основи теорії ймовірностей випадкових величин

48. Одновимірні випадкові величини, їх типи. Закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин: ряд та многокутник розподілу, інтегральна та диференціальна функції розподілу.

49. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

50. Деякі найважливіші закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин: геометричний, біномний, Пуассона, рівномірний, показниковий. Нормальний розподіл (закон Гаусса).

20. Елементи математичної статистики

51. Предмет і задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупності. Види вибірок. Простий випадковий вибір, види реальних виборів.

52. Варіаційний ряд. Дискретний та інтервальний (групований) статистичні розподіли виборки. Полігон і гістограма частот (відносних частот).

53. Емпірічна (вибіркова) функція розподілу та її властивості.

54. Вибіркова оцінка генеральної числової характеристики. Числові характеристики вибірки: вибіркові середня, моменти, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

55. Статистичне оцінювання параметрів розподілу. Точкове і інтервальне оцінювання. Вимоги до точкових оцінок: незміщеність, спроможність, ефективність. Точкове оцінювання генеральних числових характеристик за відповідними вибірковими.

56. Інтервальне оцінювання числових характеристик і параметрів розподілу генеральної сукупності. Довірчий інтервал, точність і надійність (довірча ймовірність) оцінки, рівень значущості.

57. Функціональна, статистична і кореляційна залежності. Основні задачі теорії кореляції. Кореляційна таблиця. Вибірковий парний коефіцієнт кореляції та його властивості. Оцінка тісноти кореляційного зв'язку між випадковими величинами за значенням вибіркового коефіцієнта кореляції. Шкала Чеддока.

58. Регресійний аналіз, регресія. Емпірічна лінія регресії $\boldsymbol{Y}$ на $\boldsymbol{X}$ ($\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{Y}$), теоретичне та емпірічне рівняння регресії. Проста лінійна регресія, побудова рівнянь прямих регресії $\boldsymbol{Y}$ на $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{Y}$ методом найменших квадратів та їх статистичний аналіз (оцінка адекватності лінійної моделі регресії експериментальним даним на підставі креслення й величин вибіркового парного коефіцієнта кореляції та залишкового середньоквадратичного відхилення). Застосування умовних варіант при побудові рівнянь прямих регресії.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

ПІДРУЧНИКИ І НАВЧАЛЬНІ ПОСІБНИКИ

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.

2. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / Под ред. B.C. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 228 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 304 с.

5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.

6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: Учеб. пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 176 с.

8. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.

9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

10. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

11. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев и др.; под ред. А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.

12. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комп-лексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с.

13. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

14. Эйдерман В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

ЗБІРНИКИ ЗАДАЧ

15. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.

16. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 405 с.

17. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / Под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.

18. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу и др.; под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Виконання контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв'язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після вироблення достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

– вивчити теоретичні положення за

[1], гл. 1, 2, 3 (§§ 3.1-3.4), 4, 5, 6 (§§ 6.1-6.3), гл. 7, §§7.1, 7.5-7.7, гл. 11, §§ 11.1-11.7;

[2], гл. 6;

[3], гл. 1-8, 10, 11, 12 (§§ 1-7), 13, 15, 16 (§§ 1-19), 17 (§§ 1-2, 4-7), 18 (§§ 1-9), 19 (§§ 1-7, 22-24);

[6], гл. 1, §§ 1, 2.1- 2.2, 3.1-3.2, гл.2, §§ 1, 2.1-2.3, 3-6, гл. 3, §§ 1.1-1.5, 3, 6, гл. 4, §§ 1-4, гл. 5, §§ 1, 2, 5.3, 6, гл. 6, §§ 1, 2.1, 3.2, гл. 7, §§ 1-3, гл. 8, §§1.1-1.5, 3.1-3.3, 4.1, 4.2, гл. 9, §§ 1.1-1.5, гл. 10, §§ 1.1-1.3, 1.5, 3.1-3.8;

[8], гл. 1, §§1.1-1.2, 2.1-2.6, 5.5-5.6, 5.9, 5.12, гл. 2, §§ 1-3, 7, гл. 3, §§ 2.1-2.2, 2.6, 2.12, 2.16, гл. 4, §§ 1-3, 6, гл. 6, §§ 1-5, 6.1, 7.1, 8, 10, 15.1-15.5;

[10], гл. 1, гл. 2, §§ 2.1-2.5, 2.7, гл. 7, 8;

[13], гл. 1, гл. 3, §§ 1, 2, 5-7, гл. 4, §§ 1-6, гл. 5, §§ 1-10, гл. 6, §§ 2, 4, гл. 7, §§ 1-4, гл. 8, §§ 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10.1, 10.3, 11.1, гл. 10, §§ 1-3, гл. 11, § 1, гл. 12, §§ 1, 2, 5, гл. 13, §§ 1-2, 5, 6, 7, 14, гл. 14, §§ 1-4, гл. 15, §§ 1.1-1.6, 4;

[14], гл. I, II, гл. III, § 6, гл.V, §§ 15-17, гл. VIII;

– розібрати розв'язання задач у

[4], гл. I-II, гл. IV, §§ 1, 2, гл. VI, гл.VII, §§ 1, 2, гл. VIII, §§ 1, 2, гл. IX, § 1, гл. X, §§ 1, 4;

[5], гл. I, §§ 1, гл. II, §§ 1-3, гл. III, §§ 1, 7, гл. IV, §§ 1-3, гл. V, §§ 1-6, 8-11, 14, 16-18, гл. VI, §§ 2-4, гл. VII, §§ 1-2, гл. VIII, §§ 1-4;

[7], гл. 1, § 1, пр. 1-24, § 2, пр. 1-3;

[11], гл. 1, §§ 1.1-1.5, гл. 2, §§ 2.1-2.12, гл. 5, § 5.1, гл. 6, §§ 6.1-6.15, 6.24, гл. 7, §§ 7.1-7.10, 7.13, 7.16, 7.17;

[12], гл. 1, §§ 1, 2, гл. 2, § 1, гл. 3, §§ 1-4, гл. 4;

[14], гл. IX, § 33, №№ 33.1, 33.2, 33.6, 33.7, 33.11, 33.12, 33.22, 33.23, 33.36-33.39;

– самостійно розв'язати задачі:

[4], №№ 210, 222, 225, 226, 248, 251, 252, 268, 269, 275, 280, 282, 284, 65, 68, 72, 74, 105, 111, 115, 134, 145, 155, 156, 169, 657, 658, 667, 671, 672, 692-694, 771, 773, 778, 780, 820, 821, 864, 951, 1024, 1025, 1030, 1036, 1041-1044, 1060, 1067, 1084, 1091, 1174, 1197, 1201, 1214, 1217, 1233, 1234, 1339, 1346, 1351, 1369, 1372, 1375, 1392, 1395, 1411, 1415, 1428, 1431, 1454, 1455, 1489, 1494, 1504, 1511, 1536, 1553, 1554, 1560, 1573, 1574, 1576, 1596, 1600, 1606, 1613;

[5], №№ 10-12, 186, 188, 191, 197, 214, 217, 301, 302, 304, 305, 307, 308, 310, 311, 314, 325, 515, 516, 523, 550, 551, 554, 603, 605, 611, 696, 697, 698, 703, 704, 721, 723, 725, 812-814, 832, 834, 837, 843, 846, 859, 866, 870, 871, 874, 883, 886, 898, 906, 912, 932, 1019, 1039, 1040, 1067, 1068, 1112, 1118, 1125, 1126, 1143, 1146, 1148, 1149;

[15], гл. 1, №№ 1, 15, 104, 111, 113, 127, 131, 152, 162, 165, гл. 2, №№ 4, 11, 59, 60, 81, 112, 128, 130, 161-1, 162-4, 173-2, 189-3, 190-5, гл. 3, №№ 123, 132, 137-3-а, 159, 280-3, 284-г, 300(2-6), 322(1-5), 344, 349-в, гл. 4, №№ 331-334, 343, 368, 384, 397, 437, 438, гл. 5, №№ 33, 39, 43, 69, 108, 124, 186, 199, 382, 455, 458, 461, 625, 630, 637, 661, 671, 711, 723, 740, 763, 766, 826, 829, 833, 858, 860, 871, гл. 6, №№ 17, 25, 115, 116, 120, 129, 132, 181, 184, 205, 206, гл. 7, №№ 3, 8, 11, 12, 27, 28, 33, 36, 72, 78, 82, 83, 101, 103, 124, 128, 143, 167, 194, 196, 205, 242, 263, 268, 275, 276, 297, 298, 318, 416, 424, 434, 436, 452, 456, 464, 472, 479, 511, 515, 518, 605, 609, 612, 615, 673, 675, гл. 8, №№ 2, 4, 43, 44, 48, 61, 66, 84, 86, 103, 105, 115, 121, 124, 133, 140, 270 – 273, 291, 308 – 310, 315, 322, 339, 345, 350, гл. 9, №№ 2, 4, 41, 43, 50, 52, 54, 56, 59, 64, 66, 68, 71, 75, 77, 80, 131, 136, 140, 143, 154, 161, 162, гл. 10, №№ 1, 3, 7, 9, 18, 24, 69, 71, 74, 76, 406 – 410, 471 – 472, 478, 491, 492, 537;

[16], №№ 5, 21, 28, 45, 51, 57, 82, 85, 93, 94, 99, 101, 112, 121, 126, 133, 171, 173, 180, 193, 211, 220, 257, 260, 269, 272, 276, 296, 309, 329, 351, 442, 445, 447, 449, 450, 459, 502, 509, 536-а;

[17], №№ 1.1.3, 6, 7, 17, 53, 70, 1.2.2, 13, 26, 2.2.8, 9, 3.1.5, 10, 23, 3.2.2, 6, 9, 3.3.2, 6, 7, 3.4.2, 5, 10, 4.1.7, 4.2.2, 7-а, 9, 53-1, 56-1, 4.3.2-1, 29, 30, 62, 107, 6.1.3, 24, 6.4.22, 26, 28, 35, 39, 43, 49, 50, 61, 65, 93, 7.1.7, 12, 19, 20, 30, 36, 46, 60, 63, 66, 84, 86, 160, 161, 179, 7.2.16, 17, 7.3.12-14, 20-22, 24-26, 46, 58, 63, 7.4.6, 9, 11, 8.2.8, 9, 14, 18, 19, 21-23, 9.1.4, 7, 11, 24, 48, 54, 87, 97, 8.1.5, 7, 17, 21, 39, 51, 59, 60, 72, 9.2.2, 5, 18, 9.3.2, 8, 88, 10.1.4-а, 6-а, 7-в, 14-а, 10.2.3-а, 4-а, 5-а, 6-а, 17, 25, 11.1.17, 19, 11.3.11-13, 15, 29, 30, 32, 11.5.7, 8, 12, 17, 18, 11.6.10;

[18], №№ 1.1.12, 13, 20, 21, 24, 25, 29, 30, 37, 39, 40, 42, 44, 46-49, 51, 53, 1.2.7, 8, 12, 14, 16, 18, 2.1.2 (а, б), 16, 19, 23, 25, 40, 64, 2.2.2, 4, 10, 27, 2.3.2, 3, 5, 12, 23, 2.7.4, 6, 19, 26, 34, 38 – 40, 44, 45, 49, 58, 61, 78, 79, 81, 86, 87, 3.1.9, 10, 11, 16, 17, 21, 24, 27 - 29, 64, 4.1.6, 9, 14, 25, 34, 4.2.3, 7, 16, 17, 42, 5.1.2-6, 5.2.5-6, 27-30, 5.5.3-6, 31-33, 6.1.4, 6, 12, 18, 23, 24, 6.3.4, 5, 6, 18, 6.4.4, 14, 16, 24, 35, 6.5.3, 5, 10, 6.6.5, 6.7.4, 10, 16, 6.8.4, 9, 6.9.4, 8, 6.10.3, 4, 6.11.2, 3, 4, 8, 59, 7.1.2-19, 7.2.5-16, 7.3.9-10, 8.1.2, 3, 6, 8, 10, 13, 23-31, 43, 54, 61, 62, 64, 67, 8.2.2-7, 10, 12-а,б, 13, 14, 8.3.4, 5, 9, 17, 38, 48, 49;

Приклад 1. Обчислити $3A+2B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$3A+2B=\begin{pmatrix}-9 & 12\\ -3 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 10\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9+4 & 12+10\\ -3+2 & 6-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 22\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти матрицю Y з рівняння $AB+Y=2B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. З рівняння знаходимо $\boldsymbol{Y} = 2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{AB}$. Оскільки

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 5\times1+(-1)\times(-2)+3\times3 & 5\times4+(-1)\times(-4)+3\times(-1) \\ 2\times1+(-2)\times(-2)+1\times3 & 2\times4+(-2)\times(-4)+1\times(-1) \\ 1\times1+3\times(-2)+(-3)\times3 & 1\times4+3\times(-4)+(-3)\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 9 & 15 \\ -14 & -5 \end{pmatrix},$$

то $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & -8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 9 & 15 \\ -14 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -13 \\ -13 & -23 \\ 20 & 3 \end{pmatrix}.$

<u>Приклад 3.</u> Обчислити $\boldsymbol{C}^T$, якщо $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $\boldsymbol{C}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$

<u>Приклад 4.</u> Обчислити $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами другого стовпця.

Розв'язання. $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot(9-4) + 5\cdot(-6+1) = -20 - 25 = -45.$$

<u>Приклад 7.</u> Знайти розв’язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 + 5x_2 &= -3 \end{aligned}$$

за допомогою правила Крамера.

Розв'язання. Оскільки головний визначник системи $\det A = \Delta = -2 \neq 0$, то система сумісна і має єдиний розв’язок. Отже, правило Крамера застосовне.

Знайдемо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -4, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= -2$.

Тоді розв’язок є $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1$. Зробимо перевірку, для чого підставимо знайдені значення до кожного з рівнянь:

$$A\,X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = B.$$

Таким чином, розв’язок системи $x_1 = -2, \ x_2 = -1, \ x_3 = 1$ знайдений вірно.

Приклад 5. Знайти довжину вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{-1, \ 2, \ -5\}$, а $\vec{b} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, де $M_1(3, \ -2, \ 0), \ \ M_2(4, \ 2, \ -3)$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\vec{\mathbf{b}}$:

$$X_b = 4 - 3 = 1, \ Y_b = 2 - (-2) = 4, \ Z_b = -3 - 0 = -3.$$

Тоді $3\vec{a} + 2\vec{b} = \{3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1, \ \ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4, \ \ 3 \cdot (-5) + 2 \cdot (-3)\} = \{-1, \ 14, -21\}$,

отже, $\left| 3\vec{a} + 2\vec{b} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 14^2 + (-21)^2} = \sqrt{638} \approx 25{,}26.$

Приклад 6. У трикутнику з вершинами в точках $A\ (-3, \ 4, \ 1)$, $B(2, -2, 3)$ та $C\ (7, \ -12, \ 3)$ знайти координати точки E, яка є серединою відрізка AD, якщо відомо, що точка D ділить сторону BC у відношенні **3:2**.

Розв'язання. Знайдемо координати точки D :

$$x_D = \frac{x_B + \frac{3}{2} x_C}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2 + \frac{3}{2} \cdot 7}{\frac{5}{2}} = 5, \quad y_D = \frac{y_B + \frac{3}{2} y_C}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-2 + \frac{3}{2} \cdot (-12)}{\frac{5}{2}} = -8,$$

$$z_D = \frac{z_B + \frac{3}{2} z_C}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{3 + \frac{3}{2} \cdot 3}{\frac{5}{2}} = 3$$. Тоді $x_E = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$, $y_E = \frac{y_A + y_D}{2} =$

$= \frac{4-8}{2} = -2$, $z_E = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$. Отже, $E\ (1,\ -2,\ 2)$.

<u>Приклад 7.</u> Задані координати вершин трикутної піраміди $ABCD$: $A(-1;\ 2;\ 1),\ B(-2;\ 2;\ 5),\ C(-3;\ 3;\ 1),\ D(-1;\ 4;\ 3)$.

Знайти:

1) координати векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{AD}$ та їх модулі;

2) координати вектора $2\vec{AC} + 3\vec{AD} - \vec{AB}$;

3) довжину медіани DM грані DBC;

4) проекцію вектора $\vec{AD}$ на вектор $\vec{AB}$;

5) величину $\angle A$ грані ABC в радіанах з точністю до $0{,}01$;

6) площу грані ABC;

7) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання.

1) $\overrightarrow{AB} = \{-2+1,\ 2-2,\ 5-1\} = \{-1,\ 0,\ 4\}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17} \approx 4.12\ (од)$,

$\overrightarrow{AC} = \{-3+1,\ 3-2,\ 1-1\} = \{-2,\ 1,\ 0\}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2.24\ (од)$,

$\overrightarrow{AD} = \{-1+1,\ 4-2,\ 3-1\} = \{0,\ 2,\ 2\}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2.83\ (од)$;

2) $2\vec{AC} + 3\vec{AD} - \vec{AB} = \{-4,\ 2,\ 0\} + \{0,\ 6,\ 6\} - \{-1,\ 0,\ 4\} = \{-3,\ 8,\ 2\}$;

3) оскільки точка M ділить сторону BC навпіл, то її координати є

$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}$, $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$,

$z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$.

Тоді $DM = \left|\overrightarrow{DM}\right| = \sqrt{(x_D - x_M)^2 + (y_D - y_M)^2 + (z_D - z_M)^2} =$

$$= \sqrt{\left(-1 + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 + (3-3)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.12\ (од);$$

4) $Пр_{\overline{\mathrm{AB}}}\overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{-1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 4\cdot 2}{\sqrt{17}} = \dfrac{8}{\sqrt{17}} \approx 1.94\ (од);$

5) Оскільки $\cos\angle A = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{(-1)(-2) + 0\cdot 1 + 4\cdot 0}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{85}}$, то

$\angle A = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{85}} \approx 1.35\ (рад);$

6) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}\left|-4\vec{i} - 8\vec{j} - \vec{k}\right| =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16 + 64 + 1} = 4.5\ (од^2);$$

7) $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{6}\left|-18\right| = 3\ (од^3).$

<u>**Приклад 8.**</u> Задані координати вершин трикутника ABC:
$A(-5;3),\ B(15;5),\ C(1;7)$. Знайти:

1) довжину сторони AB ;
2) координати точки M, яка ділить сторону AB у відношенні $4:1$;
3) загальні рівняння прямих AB і AC, нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;
4) рівняння прямої AB у відрізках;
5) напрямний вектор та канонічне рівняння прямої AE, яка містить медіану трикутника ABC;
6) внутрішній кут A в радіанах з точністю до $0,01$;
7) загальне рівняння висоти CD та її довжину;
8) рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно прямій AC.

Розв'язання. Трикутник зображений на рис. 1.

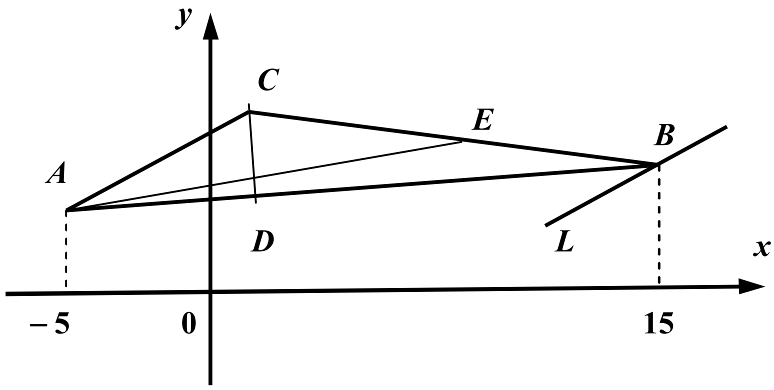

Рис. 1

1) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{20^2 + 2^2} \approx 20.6\ (од)$;

2) $x_M = \dfrac{x_A + 4x_B}{1+4} = \dfrac{-5 + 4\cdot 15}{5} = 11$, $y_M = \dfrac{y_A + 4y_B}{1+4} = \dfrac{3 + 4\cdot 5}{5} = \dfrac{23}{5}$. Отже, $M\left(11; \dfrac{23}{5}\right)$;

3) $AB: \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$. Отже, $AB: \dfrac{x-(-5)}{15-(-5)} = \dfrac{y-3}{5-3}$ або $x - 10y + 35 = 0$, звідки знаходимо нормальний вектор $\vec{n}_{AB} = \{1, -10\}$ та кутовий коефіцієнт $k_{AB} = \dfrac{1}{10}$. Аналогічно $AC: \dfrac{x - x_A}{x_C - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_C - y_A}$. Отже, $AC: \dfrac{x-(-5)}{1-(-5)} = \dfrac{y-3}{7-3}$ або $2x - 3y + 19 = 0$, звідки $\vec{n}_{AC} = \{2, -3\}$, $k_{AC} = \dfrac{2}{3}$;

4) перетворимо рівняння прямої AB до вигляду рівняння у відрізках:

$x - 10y = -35$, $\dfrac{x}{-35} + \dfrac{-10y}{-35} = 1$, $\dfrac{x}{-35} + \dfrac{y}{7/2} = 1$. Отже, пряма AB відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a = -35$ і $b = \dfrac{7}{2}$ відповідно;

5) знайдемо координати точки E, яка ділить навпіл сторону BC: $x_E = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{15+1}{2} = 8$, $y_E = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{5+7}{2} = 6$. Отже, E $(8;\ 6)$. Тоді

напрямний вектор прямої AE є $\vec{s}_{AE} = \overrightarrow{AE} = \{8-(-5), 6-3\} = \{13, 3\}$ і канонічне рівняння має вигляд $AE: \ \dfrac{x-x_A}{X_s} = \dfrac{y-y_A}{Y_s}$ або $AE: \ \dfrac{x+5}{13} = \dfrac{y-3}{3}$;

6) тангенс внутрішнього кута $\angle A$ обчислимо за формулою $tg\angle A = \dfrac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}}$, де $k_{AB} = \dfrac{1}{10}$, $k_{AC} = \dfrac{2}{3}$ (знайдені раніше у п. 3). Отже,

$$tg\angle A = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{10}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}} = \frac{17}{32}, \text{ звідки } \angle A = arctg\frac{17}{32} \approx 0.49 \ (\text{рад});$$

7) оскільки $CD \perp AB$, то $k_{CD} = -\dfrac{1}{k_{AB}} = -10$. Рівняння висоти CD будемо шукати у вигляді $y - y_C = k_{CD}(x - x_C)$. Отже, $CD: \ y-7 = -10(x-1)$ або $10x + y - 17 = 0$. Довжину CD знайдемо як відстань від вершини C до сторони AB: $d = \dfrac{|1-10\cdot 7+35|}{\sqrt{1^2+10^2}} = \dfrac{34}{\sqrt{101}} \approx 3.38 \ (\text{од})$;

8) рівняння прямої L, що проходить через вершину B паралельно прямій AC, будемо шукати у вигляді $y - y_B = k_L(x - x_B)$, де $k_L = k_{AC}$, оскільки $L \parallel AC$.

Отже, $L: \ y - 5 = \dfrac{2}{3}(x-15)$ або $2x - 3y - 15 = 0$.

<u>Приклад 9.</u> Скласти рівняння кола з центром у лівому фокусі еліпса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, якщо відомо, що коло проходить через фокус параболи $y^2 = 8x$.

Розв'язання. Знайдемо координати фокусів еліпса. Оскільки $c = \sqrt{25-9} = 4$, то з рівняння еліпса випливає, що його фокуси розташовані в точках $(\pm 4; 0)$. Отже, центр кола лежить у точці $(-4; 0)$, а рівняння кола має вигляд $(x+4)^2 + y^2 = R^2$. Судячи з рівняння, фокус параболи розташований в точці $(2; 0)$. Тоді радіус кола знайдемо з умови $(2+4)^2 + 0^2 = R^2$, тобто $R^2 = 36$,

$R=6$. Таким чином, рівняння кола має вигляд $(x+4)^2+y^2=36$. Усі криві зображені на рис. 2.

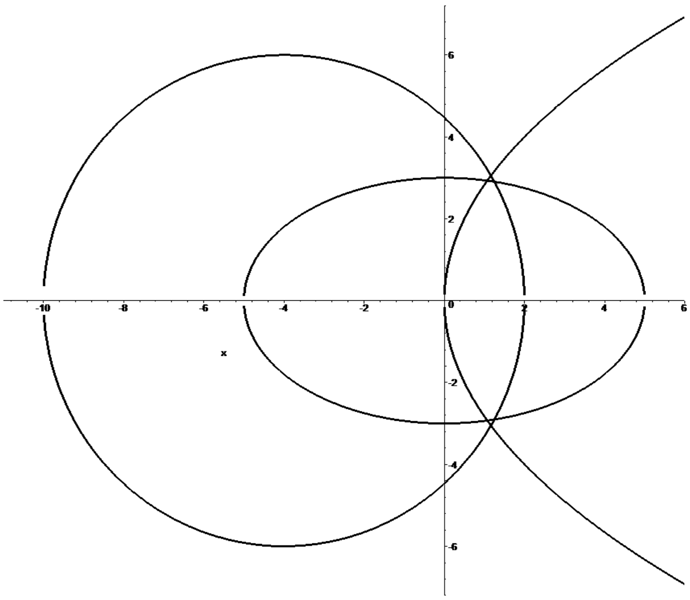

Рис. 2

<u>Приклад 10.</u> Привести рівняння кривої другого порядку $9x^2-16y^2+54x+64y-127=0$ до канонічного вигляду та побудувати її.

Розв'язання. Перетворимо рівняння, виділивши повні квадрати по обом змінним:

$$9(x^2+6x+9-9)-16(y^2-4y+4-4)-127=0 \Leftrightarrow 9(x+3)^2-16(y-2)^2=144 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+3)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1 \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{16}-\dfrac{Y^2}{9}=1$. Отримали рівняння гіперболи. В системі координат XOY, де $X=x+3$, $Y=y-2$, рівняння має канонічний вигляд. Центр гіперболи в системі xOy розташований в точці $(-3;2)$, а дійсна і уявна осі паралельні відповідно осям Ox і Oy. Асимптотами гіперболи є прямі $y-2=\pm\dfrac{3}{4}(x+3)$, $c=\sqrt{16+9}=5$, ексцентриситет $e=\dfrac{5}{4}$. Лівий і правий фокуси гіперболи розташовані відповідно в точках $(-8;2)$ і $(2;2)$. Креслення гіперболи наведено на рис. 3.

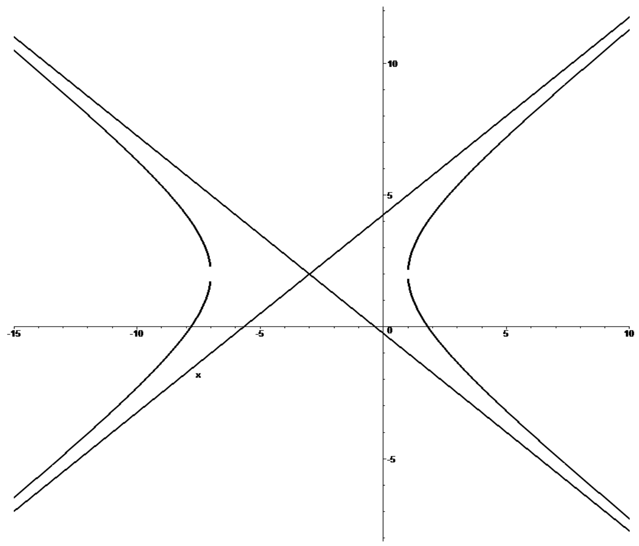

Рис. 3

<u>Приклад 11.</u> Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+4x^3-7}{3x^4-x^5+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x^2}+5}{3\sqrt[6]{x^4-2}+\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2+13x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+2}\right)$;

є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x-3}{x^2+5}\right)^{\frac{x^3+1}{x^2-4}}$.

Розв'язання.

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+4x^3-7}{3x^4-x^5+x+1}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{7}{x^5}}{\dfrac{3}{x}-1+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}}=\frac{2+0-0}{0-1+0+0}=-2;$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x^2}+5}{3\sqrt[6]{x^4-2}+\sqrt[3]{x}}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x^4}}}+1+\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}}}{3\sqrt[6]{\dfrac{x^4-2}{\sqrt[3]{x^{12}}}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{2\sqrt{0+0}+1+0}{3\sqrt[6]{1-0}+0}=\frac{1}{3};$$

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2+13x-6}\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2(x+3)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}{5(x+3)\left(x-\dfrac{2}{5}\right)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+1}{5x-2}=\dfrac{5}{17}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x}\right)}{\left(1+x-2x\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{1+1+1}=-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln\left[e\left(1-\dfrac{x}{e}\right)\right]-1}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln e+\ln\left(1-\dfrac{x}{e}\right)-1}=$

$$=\left\{\begin{matrix} x\to 0\\ \arcsin 2x\sim 2x\\ \ln\left(1-\dfrac{x}{e}\right)\sim -\dfrac{x}{e}\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{1-\dfrac{x}{e}-1}=-2e.$$

Зауваження. Тут ми скористалися ***таблицею еквівалентних нескінченно малих***: якщо $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $tg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$,

$\ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x)$, $b^{\alpha(x)}-1\sim\ln b\cdot\alpha(x)$, $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+2}\right)\{\infty-\infty\}=$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+2}\right)}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+2}}=$$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+3-x^2-2}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2};$$

є) скористаємось формулою: якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, то

$$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^a,\text{ де } a=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\left[f(x)-1\right].$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-3}{x^2+5}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2-4}=\infty$, то

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2-4}\left(\frac{x^2-x-3}{x^2+5}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+1)(x^2-x-3-x^2-5)}{(x^2-4)(x^2+5)}=$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+8x^3+x+8}{x^4+x^2-20}=-1.$$ Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-3}{x^2+5}\right)^{\frac{x^3+1}{x^2-4}}\left\{1^\infty\right\}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Приклад 12. Знайти похідні y' даних функцій.

а) $y=\sqrt[4]{(1+3x^2)^3}+\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; б) $y=\ln arctg\sqrt{1+x^2}$; в) $y=\frac{\lg\left(e^x+1\right)}{\cos^2(3x)}$;

г) $y=(arctgx)^{x\sin^2 x}$.

Розв'язання.

а) Перепишемо y у вигляді $y=(1+3x^2)^{\frac{3}{4}}+2\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Тоді

$$y'=\frac{3}{4}(1+3x^2)^{\frac{3}{4}-1}(0+3\cdot 2x)-2\cdot\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\frac{9x}{2\sqrt[4]{1+3x^2}}-\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})\sqrt{x+\sqrt{x}}};$$

б)

$$y'=\frac{1}{arctg\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{arctg\sqrt{1+x^2}\,(2+x^2)\sqrt{1+x^2}};$$

в) $$y'=\frac{\frac{e^x}{\ln 10(e^x+1)}\cdot\cos^2(3x)-\lg(e^x+1)\cdot 2\cos(3x)\cdot[-\sin(3x)]\cdot 3}{\cos^4(3x)}=$$

$$=\frac{e^x\cos(3x)+6(e^x+1)\lg(e^x+1)\sin(3x)\ln 10}{(e^x+1)\cos^3(3x)\ln 10};$$

г) похідну цієї показниково-степеневої функції знайдемо способом логарифмічного диференціювання. Прологарифмуємо задану функцію двічі:

$\ln y=x\sin^2 x\ln arctgx$, $\ln\ln y=\ln x+2\ln\sin x+\ln\ln arctgx$. Продиференцюємо останню рівність: $\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{x}+2\frac{1}{\sin x}\cos x+\frac{1}{\ln arctgx}\cdot\frac{1}{arctgx}\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

Звідси знаходимо $y'=y\ln y\left(\frac{1}{x}+2ctgx+\frac{1}{\ln arctgx}\cdot\frac{1}{arctgx}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)$ або, з урахуванням попереднього, остаточно маємо

$$y'=(arctgx)^{x\sin^2 x}\cdot x\sin^2 x\ln arctgx\left(\frac{1}{x}+2ctgx+\frac{1}{\ln arctgx}\cdot\frac{1}{arctgx}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Приклад 13. Знайти границі за правилом Лопіталя.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{\sin x-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\frac{x}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{arctgx}-\frac{1}{x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0+0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$.

Розв'язання.

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{\sin x-x}\left\{\frac{0}{0},\text{ пр. Лоп.}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos x-1}=$$
$$=-1\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=-2;$$

б) $$\lim_{x\to 3+0}\frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}\left\{\frac{\infty}{\infty},\text{ пр. Лоп.}\right\}=\lim_{x\to 3+0}\frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{1}{e^x-e^3}e^x}=$$
$$=\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to 3+0}\frac{e^x-e^3}{x-3}\left\{\frac{0}{0},\text{ пр. Лоп.}\right\}=\frac{1}{e^3}\lim_{x\to 3+0}\frac{e^x}{1}=\frac{1}{e^3}\cdot e^3=1;$$

в) $$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)tg\frac{x}{2}\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{ctg\frac{x}{2}}\left\{\frac{0}{0},\text{ пр. Лоп.}\right\}=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}=2;$$

г) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{arctgx}-\frac{1}{x}\right)\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x\cdot arctgx}\left\{\frac{0}{0},\text{ пр. Лоп.}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{arctgx+\dfrac{x}{1+x^2}}\{x\to 0,\ arctgx\sim x\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(1+x^2)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2+1}=0;$$

д) $\lim\limits_{x\to 0+0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}\left\{\infty^0\right\}=e^a$, де $a=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln ctgx\left\{\dfrac{\infty}{\infty},\ пр.\ Лоп.\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{-\dfrac{1}{ctgx}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}}{\dfrac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{\cos x\cdot\sin x}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{\sin x}=$$

$=-1\cdot 1=-1$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0+0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$;

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}\left\{0^0\right\}=e^a$, де $a=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\cdot\ln(\pi-2x)\{\,0\cdot\infty\}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\pi-2x)}{\dfrac{1}{\cos x}}\left\{\frac{0}{0},\ пр.\ Лоп.\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\dfrac{1}{\pi-2x}(-2)}{-\dfrac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\sin x}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos^2 x}{\pi-2x}\left\{\frac{0}{0},\ пр.\ Лоп.\right\}=-2\cdot 1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-2\cos x\sin x}{-2}=-2\cdot 0\cdot 1=0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}=e^0=1$.

Приклад 14. Знайти екстремуми функції $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$, асимптоти та точки перегину її графіка.

Розв'язання.

1) Обчислимо односторонні границі в точці $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}=+\infty$. Оскільки обидві границі нескінченні, то в точці $x=1$ функція терпить двосторонній нескінченний розрив (розрив другого роду).

Отже, пряма $x = 1$ є двосторонньою вертикальною асимптотою графіка функції. Знайдемо похилі асимптоти.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x(x-1)^2} = \frac{1}{2} = k,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y-kx) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{2(x-1)^2} - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{2(x-1)^2} = 1 = b.$$ Таким чином, пряма $y = \frac{x}{2}+1$ є похилою асимптотою графіка функції при $x\to-\infty$. Аналогічний результат отримуємо при $x\to+\infty$.

2) Знайдемо критичні точки першого роду та інтервали монотонності функції.

Оскільки $y' = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2(x-1)^2-2x^3(x-1)}{(x-1)^4}\right] = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}$, причому в точці $x = 1$ функція не визначена, то критичні точки визначаються лише умовою $y' = 0$. Отже, $x^2(x-3) = 0$, звідки знаходимо дві (стаціонарні) точки $x_1 = 0$ й $x_2 = 3$. Звідси та з попереднього випливає, що функція монотонна в інтервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ та $(3, +\infty)$.

3) Визначимо екстремуми функції, для чого дослідимо знайдені критичні точки за допомогою першої достатньої умови існування екстремуму:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
знак y'	+	0	+	не визн.	–	0	+
поведінка y	монотонно зростає	екстр. немає	монотонно зростає	не визн.	монотонно спадає	досягає мінімуму	монотонно зростає

У точці $x = 3$ функція досягає мінімального значення $y_{\min} = \frac{27}{8}$.

4) Знайдемо критичні точки другого роду і інтервали опуклості (вгнутості) графіка функції.

Визначимо y'' за допомогою логарифмічного диференціювання:

$$\ln y' = 2\ln x + \ln(x-3) - \ln 2 - 3\ln(x-1), \quad \frac{y''}{y'} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-1} = \frac{6}{x(x-1)(x-3)},$$

$$y'' = y'\frac{6}{x(x-1)(x-3)} = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}\cdot\frac{6}{x(x-1)(x-3)} = \frac{3x}{(x-1)^4}.$$ Оскільки в точці $x = 1$ функція не визначена, то критичні точки другого роду визначаються

лише умовою $y''=0$, з якої знаходимо єдину точку $x=0$. Звідси та з попереднього випливає, що графік функції зберігає опуклість (вгнутість) в інтервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ та $(1, +\infty)$.

5) Дослідимо знайдену критичну точку за допомогою достатньої умови існування точок перегину графіка.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
знак y''	$-$	0	$+$	не визн.	$+$
поведінка графіка y	опуклий $\cap$	має точку перегину	вгнутий $\cup$	не визн.	вгнутий $\cup$

Оскільки $y=0$ при $x=0$, то початок координат є точкою перегину графіка заданої функції.

<u>Приклад 15.</u> Знайти dz функції $z=(tgx)^{\ln y}-y^{\cos x}$.

Розв'язання. Оскільки $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, то знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln y\cdot(tgx)^{\ln y-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-y^{\cos x}\ln y\cdot(-\sin x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(tgx)^{\ln y}\ln tgx\cdot\frac{1}{y}-\cos x\cdot y^{\cos x-1}.$$

Отже, $$dz=\left[\ln y\cdot(tgx)^{\ln y-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+y^{\cos x}\ln y\cdot\sin x\right]dx+$$

$$+\left[(tgx)^{\ln y}\ln tgx\cdot\frac{1}{y}-\cos x\cdot y^{\cos x-1}\right]dy.$$

<u>Приклад 16.</u> Перевірити, чи задовольняє рівнянню $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$ функція $z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$.

Розв'язання. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y^2}{3x^2}+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{3x}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$,

$$x^2\left(-\frac{y^2}{3x^2}+\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)-xy\left(\frac{2y}{3x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)+y^2=-\frac{y^2}{3}+\frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}}-$$

$-\dfrac{2y^2}{3}-\dfrac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+y^2=0$, отже, функція задовольняє заданому рівнянню.

<u>Приклад 17.</u> Знайти швидкість зміни скалярного поля $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$ в точці $M_0(1,3,2)$ за напрямком до точки $M_1(0,5,0)$.

Розв'язання. Швидкість зміни скалярного поля $u=u(x,y,z)$ в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ за напрямком вектора $\vec{s}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ визначається формулою $\left.\dfrac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma$.

Обчислимо спочатку відповідні значення частинних похідних:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.\left(-\frac{2x}{3-x^2}+y^2z\right)\right|_{x=1,\,y=3,\,z=2}=-1+18=17,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.2xyz\right|_{x=1,\,y=3,\,z=2}=12,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=\left.xy^2\right|_{x=1,\,y=3,\,z=2}=9.$$

В даному випадку $\vec{s}=\overrightarrow{M_0M_1}$. Обчислимо напрямні косинуси цього вектора:

$$|\vec{s}|=\sqrt{(0-1)^2+(5-3)^2+(0-2)^2}=3\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha=-\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

Отже, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0}=-\dfrac{17}{3}+\dfrac{24}{3}-\dfrac{18}{3}=-\dfrac{11}{3}$. Оскільки $\left.\dfrac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0}<0$, то поле у даному напрямку спадає.

<u>Приклад 18.</u> Визначити напрямок та величину найбільшої швидкості зростання поля $u=x^2yz-xy^2z+xyz^2$ в точці $M_0(1,1,1)$.

Розв'язання. Напрямок найшвидшого зростання поля в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ співпадає з напрямком градієнта цього поля в даній точці:

$$grad\, u\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0}\vec{k}.$$

Швидкість цього зростання є

$$\max\frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{M_0} = \left|grad\, u\right|\Big|_{M_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0}\right)^2}.$$

Обчислимо відповідні значення частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = (2xyz - y^2z + yz^2)\Big|_{x=1,\, y=1,\, z=1} = 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = (x^2z - 2xyz + xz^2)\Big|_{x=1,\, y=1,\, z=1} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = (x^2y - xy^2 + 2xyz)\Big|_{x=1,\, y=1,\, z=1} = 2.$$

Отже, $grad\, u\Big|_{(1,\,1,\,1)} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$,

$$\max\frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{(1,\,1,\,1)} = \left|grad\, u\right|\Big|_{(1,\,1,\,1)} = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

<u>Приклад 19.</u> Знайти інтеграли.

а) $\int \frac{x arctg^2(x^2)}{1+x^4}dx$; б) $\int (3-x)\cos 2x dx$; в) $\int \frac{2x+1}{x^4-81}dx$;

г) $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання.

а) Замінимо змінну, виходячи з вигляду підінтегрального виразу:

$$\int \frac{x\,arctg^2(x^2)}{1+x^4}dx = \left| \begin{array}{c} arctg(x^2)=t, \\ \dfrac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2xdx = dt, \\ \dfrac{x}{1+x^4}dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^2dt = \frac{t^3}{6}+C = \frac{arctg^3(x^2)}{6}+C;$$

б) Даний інтеграл береться по частинах за формулою $\int udv = uv - \int vdu$. За u приймаємо функцію, яка спрощується при диференціюванні, а саме, $P(x)$ (многочлен), $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, причому трансцендентні функції мають перевагу над многочленом. В даному разі приймаємо $u = 3 - x$.

$$\int (3-x)\cos 2xdx = \left| \begin{array}{ll} u = 3-x, & dv = \cos 2xdx, \\ du = -\ dx, & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{3-x}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\int \sin 2xdx =$$

$$= \frac{3-x}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C;$$

в) Розкладемо підінтегральний раціональний дріб на найпростіші:

$$\frac{2x+1}{x^4-81} = \frac{2x+1}{(x+3)(x-3)(x^2+9)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}+\frac{Cx+D}{x^2+9},$$

$$2x+1 = A(x-3)(x^2+9)+B(x+3)(x^2+9)+(Cx+D)(x-3)(x+3)$$

$$\begin{array}{c|c} x=-3 & -5=-108A \\ x=3 & 7=108B \\ x=0 & 1=-27A+27B-9D \\ x^3 & 0=A+B+C \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} A=\dfrac{5}{108}, & B=\dfrac{7}{108}, \\ C=-\dfrac{12}{108}, & D=-\dfrac{6}{108}. \end{array}$$

Таким чином, $\dfrac{2x+1}{x^4-81} = \dfrac{1}{108}\left(\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{-12x-6}{x^2+9}\right)$

і тому

$$\int \frac{2x+1}{x^4-81}dx = \frac{1}{108}\int\left(\frac{5}{x+3}+\frac{7}{x-3}+\frac{-12x-6}{x^2+9}\right)dx = \frac{1}{108}\left[5\ln|x+3|+7\ln|x-3|-\right.$$

$$\left. -6\ln(x^2+9)-2arctg\frac{x}{3}\right]+C;$$

г) При відшуканні даного інтеграла застосуємо формули тригонометрії

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Тоді

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 4x) - \sin^2 2x \cos 2x\right] dx = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C;$$

д) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C = \left|t = \sqrt[6]{x}\right| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C;$$

<u>Приклад 20.</u> Обчислити інтеграли.

а) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+2x-1}{x^2}\, dx$; б) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$; в) $\displaystyle\int_0^{3\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x+8}}$;

г) $\displaystyle\int_0^1 x^2 3^x dx$; д) $\displaystyle\int_1^e x^3 \ln x\, dx$; е) $\displaystyle\int_3^4 \sqrt{25-x^2}dx$.

Розв'язання.

а) Оскільки підінтегральна функція визначена (і тому неперервна) на усьому проміжку інтегрування $[1,\, 2]$, то даний інтеграл є власним і тому обчислюється безпосередньо за формулою Ньютона-Лейбніца: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де $F(x) -$ деяка первісна, тобто функція, яка *неперервна* на $[a,\, b]$ і така, що $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,\, b]$. В даному разі $F(x)$ знаходиться безпосередньо: $F(x) = \displaystyle\int \frac{x^3+2x-1}{x^2} dx = \int \left(x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + \frac{1}{x}$. Оскільки $F(x)$ елементарна і визначена на $[1,\, 2]$, то вона й неперервна на цьому відрізку, отже,

$$\int_1^2 \frac{x^3+2x-1}{x^2}\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 = 2 + 2\ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2\ln 1 - 1 = 1 + 2\ln 2;$$

б) Як і в попередньому прикладі, підінтегральна функція визначена (і тому неперервна) на усьому проміжку інтегрування $[3, 4]$. Заданий інтеграл обчислюється за допомогою заміни змінної:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f\,[\,\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

При цьому нові межі інтегрування визначаються з рівнянь $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, а функція $\varphi(t)$ повинна бути неперервною на $[\alpha, \beta]$ разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$, причому її значення не можуть виходити за межі відрізка $[a, b]$. В даному разі найкращою є підстановка $x = \frac{1}{t}$. Нові межі інтегрування α і β знайдемо відповідно з рівнянь $3 = \frac{1}{\alpha}$ і $4 = \frac{1}{\beta}$, отже $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{4}$. Функція $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ на відрізку $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]$ неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}$, причому якщо $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]$, то $3 \le \varphi(t) \le 4$ (останнє витікає з монотонності $\varphi(t)$ на даному відрізку). Отже, маємо

$$\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}} = -\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{4}} \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{25 - \frac{1}{t^2}}} = -\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{\sqrt{25t^2 - 1}} = \left[-\frac{1}{5}\ln\left|5t + \sqrt{25t^2 - 1}\right| \right]\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3};$$

в) Підінтегральна функція на відрізку $[0,\ 3\ln 2]$ неперервна. Виконаємо "обернену" підстановку:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{ll} t = \psi(x), & dx = \left[\psi^{-1}(t)\right]' dt, \\ x = \psi^{-1}(t), & \alpha = \psi(a), \quad \beta = \psi(b) \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f\left[\psi^{-1}(t)\right]\left[\psi^{-1}(t)\right]' dt .$$

В даному разі $\psi(x) = \sqrt{e^x + 8}$, $\alpha = \sqrt{e^0 + 8} = 3$, $\beta = \sqrt{e^{3\ln 2} + 8} = 4$. Оскільки $\psi(x)$ строго монотонна (зростає) і неперервна на відрізку $[0,\ 3\ln 2]$, то існує обернена функція $x = \psi^{-1}(t) = \ln\left|t^2 - 8\right|$, яка на відрізку $[3,4]$ також монотонно зростає (від 0 до $3\ln 2$) і неперервна разом зі своєю похідною $x' = [\psi^{-1}(t)]' = \dfrac{2t}{t^2-8}$. Отже,

$$\int\limits_0^{3\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x+8}} = 2\int\limits_3^4 \frac{dt}{t^2-8} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-2\sqrt{2}}{t+2\sqrt{2}}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\ln 2\right);$$

г) Даний інтеграл візьмемо по частинах:

$$\int\limits_0^1 x^2 3^x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2, & dv = 3^x\,dx, \\ du = 2x dx, & v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{matrix}\right| = \frac{3^x}{\ln 3}x^2\Bigg|_0^1 - \frac{2}{\ln 3}\int\limits_0^1 x3^x\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x, & dv = 3^x\,dx, \\ du = dx, & v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{matrix}\right| = = \frac{3}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\left[\frac{3^x}{\ln 3}x\Bigg|_0^1 - \frac{1}{\ln 3}\int\limits_0^1 3^x\,dx\right] =$$

$$= \frac{3}{\ln 3} - \frac{6}{\ln^2 3} + \frac{2}{\ln^2 3}\cdot\frac{3^x}{\ln 3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\ln 3}\left(3 - \frac{6}{\ln 3} + \frac{4}{\ln^2 3}\right).$$

д) $$\int\limits_1^e x^3 \ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x, & dv = x^3 dx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix}\right| = \frac{x^4}{4}\ln x\Bigg|_1^e - \frac{1}{4}\int\limits_1^e x^3 dx =$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{x^4}{16}\Bigg|_1^e = \frac{1}{16}\left(3e^4+1\right);$$

е) Цей інтеграл може бути віднесений до так званих “циклічних” інтегралів, тобто таких, які знаходяться з рівняння після одно- або двократного інтегрування частинами. До “циклічних”, зокрема, також належать інтеграли $\int\limits_a^b c^{\alpha x}\sin\beta\,x\,dx$ й $\int\limits_a^b c^{\alpha x}\cos\beta\,x\,dx$ (у частинному випадку $c = e$). Отже,

$$\int\limits_3^4 \sqrt{25-x^2}dx = \left|\begin{matrix} u = \sqrt{25-x^2}, & dv = dx, \\ du = -\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}dx, & v = x \end{matrix}\right| =$$

$$= x\sqrt{25-x^2}\Big|_3^4 + \int\limits_3^4 \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx = 0 - \int\limits_3^4 \frac{25-x^2-25}{\sqrt{25-x^2}}dx =$$

$$=-\int_3^4\sqrt{25-x^2}\,dx+25\arcsin\frac{x}{5}\Bigg|_3^4=-\int_3^4\sqrt{25-x^2}\,dx+25\left(\arcsin\frac{4}{5}-\arcsin\frac{3}{5}\right).$$

Таким чином, дістали рівняння відносно шуканого інтеграла

$\int_3^4\sqrt{25-x^2}\,dx=-\int_3^4\sqrt{25-x^2}\,dx+25\left(\arcsin\frac{4}{5}-\arcsin\frac{3}{5}\right)$, звідки знаходимо

$$\int_3^4\sqrt{25-x^2}\,dx=\frac{25}{2}\left(\arcsin\frac{4}{5}-\arcsin\frac{3}{5}\right).$$

<u>Приклад 21.</u> Обчислити невласні інтеграли першого роду або довести їх розбіжність.

а) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x-5}$; б) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}dx$; в) $\int_{-\infty}^{\pi}\cos x\,dx$; г) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$; д) $\int_{-\infty}^{+\infty}3^x dx$.

Розв'язання.

а) За означенням (тут і надалі $F(x)-$ первісна, знайдена окремо) маємо

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x-5}=\lim_{B\to+\infty}\int_2^{B}\frac{dx}{(x+2)^2-9}=\left\{F(x)=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|\right\}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{B\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|\Bigg|_1^B\right]=\frac{1}{6}\left(\lim_{B\to+\infty}\ln\left|\frac{\mathrm{B}-1}{\mathrm{B}+5}\right|-\ln\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{6}\left(\ln\lim_{\mathrm{B}\to+\infty}\left|\frac{B-1}{B+5}\right|+\ln 7\right)=$$

$=\frac{1}{6}(\ln 1+\ln 7)=\frac{1}{6}\ln 7$. Оскільки границя скінченна, то інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{6}\ln 7$.

б) За означенням $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}dx=\lim_{B\to+\infty}\int_1^{B}\frac{\ln^2 x}{x}dx=\left\{F(x)=\frac{1}{3}\ln^3 x\right\}=$

$=\frac{1}{3}\lim_{B\to+\infty}\left[\ln^3 x\Big|_1^B\right]=\frac{1}{3}\left(\lim_{B\to+\infty}\ln^3 B-\ln^3 1\right)$. Оскільки границя не є скінченною (а саме, $\lim_{B\to+\infty}\ln^3 B=+\infty$), то інтеграл розбігається.

в) За означенням $\int\limits_{-\infty}^{\pi} \cos x\, dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{\pi} \cos x\, dx = \{F(x) = \sin x\} = \lim\limits_{A\to-\infty} \left[\sin x \Big|_{A}^{\pi} \right] =$

$= \sin\pi - \lim\limits_{A\to-\infty} \sin A$. Оскільки границя не є скінченною (а саме, $\lim\limits_{A\to-\infty} \sin A$ взагалі не існує), то інтеграл розбігається.

г) За означенням $\forall c$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5} = \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{c} \frac{dx}{x^2+4x+5} + \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_{c}^{B} \frac{dx}{x^2+4x+5} =$

$$= \{F(x) = arctg(x+2)\} = \lim_{A\to-\infty} \left[arctg(x+2) \Big|_{A}^{c} \right] + \lim_{B\to+\infty} \left[arctg(x+2) \Big|_{c}^{B} \right] =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} arctg(B+2) - \lim_{A\to-\infty} arctg(A+2) = arctg(+\infty) - arctg(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi .$$

Обидві границі, знайдені незалежно одна від одної, скінченні. Отже, інтеграл збігається і дорівнює π.

д) За означенням $\forall c$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 3^x dx = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{c} 3^x dx + \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{c}^{B} 3^x dx = \left\{ F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} \right\} = \frac{1}{\ln 3} \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \left[3^x \Big|_{A}^{B} \right] =$$

$\frac{1}{\ln 3}\left[\lim\limits_{B\to+\infty} 3^B - \lim\limits_{A\to-\infty} 3^A \right]$. Обидві границі знайдені незалежно одна від одної. Оскільки перша з них не є скінченною (а саме, нескінченна), а друга скінченна (дорівнює нулю), то інтеграл розбігається.

<u>Приклад 22.</u> Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{2}$, $x + y = 4$.

Розв'язання.

Знайдемо точки перетину прямої з параболою:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2}, \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow x + \frac{x^2}{2} = 4, \quad x^2 + 2x - 8 = 0, \ x_1 = -4, \ x_2 = 2, \ y_1 = 8, \ y_2 = 2 .$$

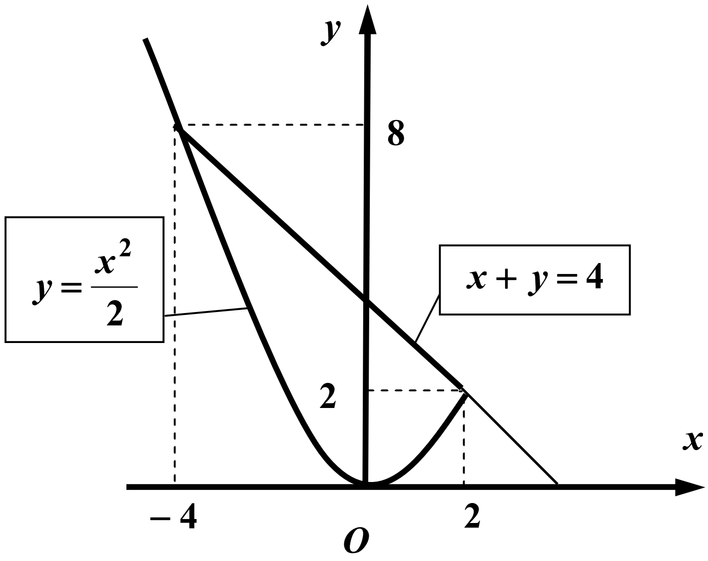

Рис. 4

Отже, маємо дві точки перетину: $A(-4,8)$ та $B(2,2)$ (рис. 4). За формулою $S=\int\limits_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx$, де $a=-4$, $b=2$, $y_2(x)=4-x$, $y_1(x)=\frac{x^2}{2}$, маємо

$$S=\int\limits_{-4}^{2}\left(4-x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(4x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-4}^{2}=8-2-\frac{4}{3}+16+8-\frac{32}{3}=18\ (од^2).$$

<u>Приклад 23.</u> Знайти довжину дуги лінії $y=3\ln\left(\frac{9}{9-x^2}\right)$ $(0\le x\le 2)$.

Розв'язання.

Дуга заданої кривої зображена на рис. 5.

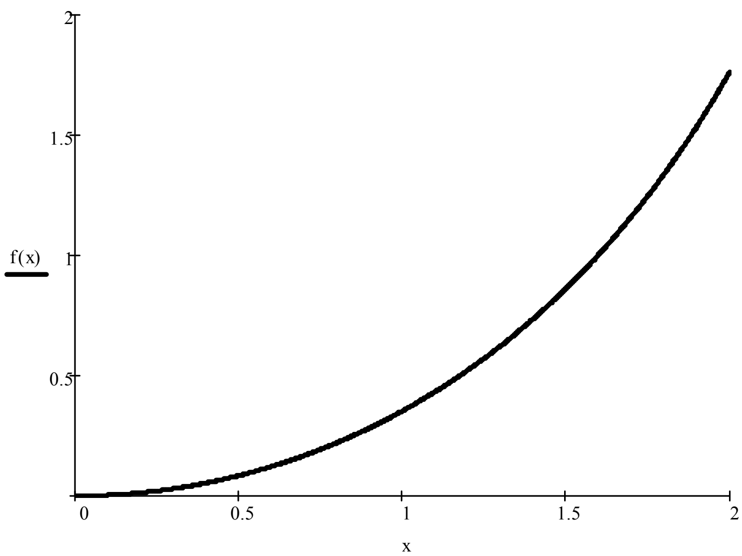

Рис. 5

Оскільки $y' = 3\cdot\dfrac{9-x^2}{9}\cdot\left[-\dfrac{9}{(9-x^2)^2}\right]\cdot(-2x) = \dfrac{6x}{9-x^2}$,

$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\dfrac{36x^2}{(9-x^2)^2}} = \dfrac{\sqrt{81-18x^2+x^4+36x^2}}{9-x^2} = \dfrac{9+x^2}{9-x^2}$, то за формулою

$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, де $a=0$, $b=2$, маємо $L = \int\limits_0^2 \dfrac{9+x^2}{9-x^2}\,dx = -\int\limits_0^2 \dfrac{x^2-9+18}{x^2-9}\,dx =$

$= -\int\limits_0^2\left(1+\dfrac{18}{x^2-9}\right)dx = -\left(x+3\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|\right)\Bigg|_0^2 = 3\ln 5 - 2 \approx 2.83\ (од)$;

<u>Приклад 24.</u> Обчислити повторний інтеграл.

а) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}} \dfrac{xdy}{x^2+y^2}$;   б) $\int\limits_1^3 dy\int\limits_2^5 \dfrac{dx}{(x+2y)^2}$.

Розв'язання.

а) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}} \dfrac{xdy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^2\left(x\cdot\dfrac{1}{x}arctg\dfrac{y}{x}\Bigg|_x^{x\sqrt{3}}\right)dx = \int\limits_0^2 (arctg\sqrt{3} - arctg1)\,dx =$

$= \left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot x\Bigg|_0^2 = \dfrac{\pi}{12}\cdot 2 = \dfrac{\pi}{6}$;

б) $\int\limits_1^3 dy\int\limits_2^5 \dfrac{dx}{(x+2y)^2} = -\int\limits_1^3\left(\dfrac{1}{x+2y}\Bigg|_2^5\right)dy = -\int\limits_1^3\left(\dfrac{1}{5+2y}-\dfrac{1}{2+2y}\right)dy =$

$= -\left(\dfrac{1}{2}\ln|5+2y| - \dfrac{1}{2}\ln|2+2y|\right)\Bigg|_1^3 = -\dfrac{1}{2}\left(\ln 11 - \ln 8 - \ln 7 + \ln 4\right) = -\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{44}{56} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{14}{11}$.

<u>Приклад 25.</u> Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (3x^2 - 2xy + y)\,dxdy$, де область D обмежена лініями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

Розв'язання. Область D зображена на рис. 6 (обмежена гілкою параболи $x = y^2$, віссю Oy та прямою $y = 2$). Спроектуємо її на вісь Oy.

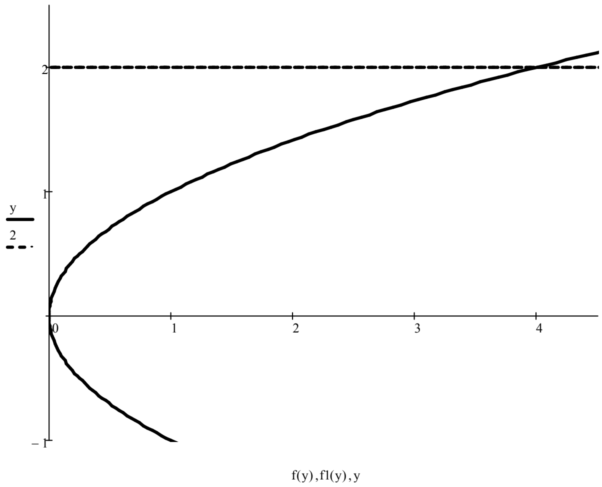

Рис. 6

Тоді $\iint\limits_D (3x^2 - 2xy + y)\,dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y)\,dx = \int\limits_0^2 \left(x^3 - x^2 y + xy\right)\Big|_0^{y^2} dy =$

$$= \int\limits_0^2 (y^6 - y^5 + y^3)\,dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{244}{21} \approx 11.62\,.$$

Зауваження. При проектуванні області на вісь Ox обираємо додатну вітку $y = \sqrt{x}$ параболи, область проектується у відрізок $[0, 4]$, отже,

$$\iint\limits_D (3x^2 - 2xy + y)\,dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^2 (3x^2 - 2xy + y)\,dy = \int\limits_0^4 \left(3x^2 y - xy^2 + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{x}}^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^4 \left(6x^2 - 4x + 2 - 3x^2\sqrt{x} + x^2 - \frac{x}{2}\right) dx = \left(\frac{7x^3}{3} - \frac{9x^2}{4} + 2x - \frac{6x^3\sqrt{x}}{7}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{244}{21}\,.$$

<u>**Приклад 26.**</u> Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = x + 1$, $x = y^2 - y^3$, $y = -1$.

Розв'язання. Фігура зображена на рис. 7 (обмежена параболою $y^2 = x + 1$, лінією $x = y^2 - y^3$ та прямою $y = -1$). Спроектуємо її на вісь Oy.

Тоді $S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2-y^3} dx = \int\limits_{-1}^1 (y^2 - y^3 - y^2 + 1)dy = \left(y - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^1 = 2\ (од^2)$.

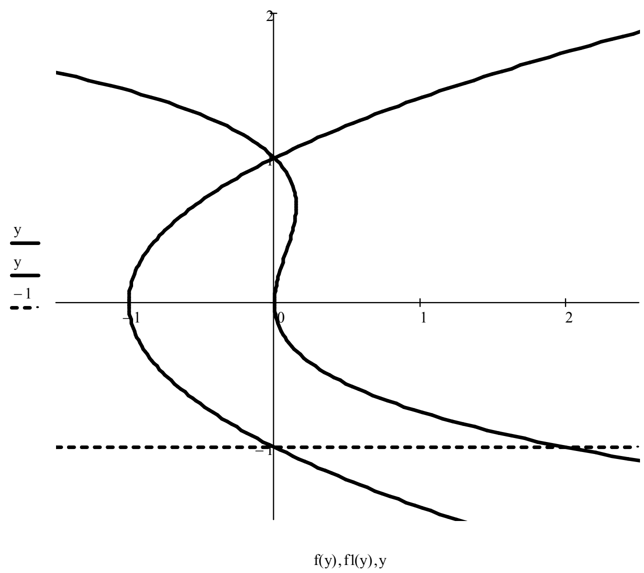

Рис. 7

__Приклад 27.__ Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_L \frac{ydl}{\sqrt{x}}$, якщо L – дуга півкубічної параболи $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ між точками $A\left(3;\, 2\sqrt{3}\right)$ й $B\left(8;\, \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$;

б) $\int\limits_{OA} 2xydx - x^2dy$, де OA – дуга параболи $x = 2y^2$ від точки $O(0;\,0)$ до точки $A(2;\,1)$.

Розв'язання.

а) Маємо криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги). Будемо вважати, що крива L задана рівнянням вигляду $y = y(x)$ у декартових координатах. Тоді $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ (обираємо знак «+», оскільки точки A й B належать першій чверті), $y' = \sqrt{x}$, отже, $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + x}\, dx$.
Переходячи до звичайного інтеграла, будемо мати

$$\int\limits_L \frac{ydl}{\sqrt{x}} = \int\limits_3^8 \frac{\frac{2}{3}\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\int\limits_3^8 x\sqrt{1+x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} 1+x=t^2, & dx=2tdt, \\ x=t^2-1, & \begin{array}{ccc} x & 3 & 8 \\ t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_2^3 (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt = \frac{4}{3}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 = \frac{4}{3}\left(\frac{243}{5}-9-\frac{32}{5}+\frac{8}{3}\right) = \frac{2152}{45} \approx 47.82\,;$$

б) Маємо криволінійний інтеграл другого роду (по координатах). Крива L
задана рівнянням у декартових координатах, отже, $dx = x'dy = 4ydy$. Перейдемо до звичайного інтеграла:

$$\int\limits_{OA} 2xydx - x^2dy = \int\limits_0^1 \left(2\cdot 2y^2 y\cdot 4y - 4y^4\right)dy = = 12\cdot\frac{y^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{12}{5}.$$

<u>Приклад 28.</u> Знайти дивергенцію векторного поля
$\vec{a} = xe^{yz}\,\vec{i} + ye^{xz}\,\vec{j} - ze^{xy}\,\vec{k}$ і обчислити її в точках $M_1(1,1,1)$ й $M_2(1,1,-1)$.

Розв'язання. Дивергенцією (або *розбіжністю*) векторного поля

$$\vec{a} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

називається вектор

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Отже, $div\,\vec{a} = e^{yz} + e^{xz} - e^{xy}$.

В точці $M_1(1,1,1)$ $div\,\vec{a}\Big|_{M_1} = e + e - e = e > 0$, тобто M_1 – точка витоку.

В точці $M_2(1,1,-1)$ $div\,\vec{a}\Big|_{M_2} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - e = \frac{2}{e} - e < 0$, тобто M_2 – точка стоку.

<u>Приклад 29.</u> З'ясувати, чи буде соленоїдним векторне поле

$$\vec{a} = x^2yz\,\vec{i} - xy^2z\,\vec{j} + arctg\sqrt{xy}\,\vec{k}.$$

Розв'язання. Векторне поле $\vec{a}$ називається *соленоїдним* (або *трубчатим*), якщо в кожній його точці дивергенція дорівнює нулю: $div\,\vec{a} = 0$. Соленоїдне поле не має ані джерел, ані стоків. В даному випадку

$$div\,\vec{a} = 2xyz - 2xyz + 0 = 0,$$

тобто задане поле є соленоїдним.

<u>Приклад 30.</u> Знайти ротор векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} - z^2\vec{j} + z(x+y)\vec{k}$ і обчислити його в точці $M_0(1,\,3,\,0)$.

Розв'язання. Ротором (або *вихорем*) векторного поля

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

називається вектор

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\,.$$

В даному випадку

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & -z^2 & z(x+y) \end{vmatrix} = (z+2z)\vec{i} - (z-y)\vec{j} + (0-z)\vec{k} = 3z\,\vec{i} + (y-z)\vec{j} - z\,\vec{k}\,,$$

отже, $rot\,\vec{a}\Big|_{M_0} = 0\cdot\vec{i} + (3-0)\cdot\vec{j} - 0\cdot\vec{k} = 3\vec{i}$.

<u>Приклад 31.</u> З'ясувати, чи буде потенціальним векторне поле

$$\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + z(x+y)\vec{j} + xy\vec{k}\,.$$

Розв'язання. Векторне поле $\vec{a}$ називається *безвихровим*, якщо в кожній його точці ротор дорівнює нулю: $rot\,\vec{a} = \vec{0}$. Якщо існує функція $u = u(x,y,z)$, така, що $du = Pdx + Qdy + Rdz$, тобто $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $R = \dfrac{\partial u}{\partial z}$, то векторне поле називається *потенціальним*, а функція $u = u(x,y,z)$ називається *потенціалом* цього поля. Всяке безвихрове поле є потенціальним і навпаки.

В даному випадку $rot\,\vec{a} = (x-x)\vec{i} - (y-y)\vec{j} + (z-z)\vec{k} = \vec{0}$, тобто задане поле потенціальне.

<u>Приклад 32.</u> Обчислити i^{1363}.

Розв'язання. Оскільки залишок від ділення **1363** на **4** дорівнює **3**, то $i^{1363} = i^3 = -i$.

Приклад 33. Обчислити $z_1^2 \overline{\left(\frac{z_2}{z_3}\right)}$, якщо $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -4 + 3i$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо

$$\overline{\left(\frac{z_2}{z_3}\right)} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3} = \frac{\bar{z}_2 z_3}{\bar{z}_3 z_3} = \frac{(3+2i)\cdot(-4+3i)}{(-4)^2 + 3^2} = \frac{-12-6}{25} + i\frac{9i-8i}{25} = -\frac{18}{25} + i\frac{1}{25}.$$

Оскільки

$$z_1^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i,$$

то остаточно

$$z_1^2 \overline{\left(\frac{z_2}{z_3}\right)} = 2i \cdot \left(-\frac{18}{25} + i\frac{1}{25}\right) = -\frac{2}{25} - i\frac{36}{25}.$$

Приклад 34. Розв'язати рівняння $z^2 + 5iz + 36 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $D = (5i)^2 - 4\cdot 36 = -25 - 144 = -169$, $\sqrt{D} = \sqrt{-169} = \sqrt{169 i^2} = 13i$, то $z_{1,2} = \frac{-5i \pm 13i}{2}$. Отже, $z_1 = 4i$, $z_2 = -9i$.

Приклад 36. Представити у тригонометричному вигляді комплексне число $z = \sin\frac{\pi}{9} - i\cos\frac{\pi}{9}$.

Розв'язання. Оскільки $x = \sin\frac{\pi}{9} > 0$, $y = -\cos\frac{\pi}{9} < 0$, $\frac{y}{x} = -ctg\frac{\pi}{9}$, то $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, а за формулою

$$\arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, & x < 0,\ y \ge 0, \\ -\pi + arctg\frac{y}{x}, & x < 0,\ y < 0, \\ \pm\pi/2, & x = 0,\ y \gtrless 0, \end{cases}$$

з урахуванням того, що

$$arctg\,\alpha = \frac{\pi}{2} - arcctg\,\alpha,$$

будемо мати $\arg z = arctg\left(-ctg\dfrac{\pi}{9}\right) = -arctg\left(ctg\dfrac{\pi}{9}\right) = -\left[\dfrac{\pi}{2} - arcctg\left(ctg\dfrac{\pi}{9}\right)\right] =$

$= -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{9} = -\dfrac{7}{18}\pi$. Тоді задане комплексне число запишеться у вигляді

$z = \cos\left(-\dfrac{7\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{18}\right) = \cos\dfrac{7\pi}{18} - i\sin\dfrac{7\pi}{18}$.

<u>Приклад 37.</u> Обчислити $\mathrm{Re}\left[\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{39}\right]$.

Розв'язання. Позначимо $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 + i$ і запишемо обидва числа у тригонометричній формі. Попередньо знайдемо модуль і аргумент кожного з чисел: $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$, $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = arctg\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -arctg\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\pi}{6}$,

$\arg z_2 = arctg\,1 = \dfrac{\pi}{4}$. Отже, за формулою $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)\right]$. Тоді

за формулою Муавра $z^n = |z|^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ отримуємо

$\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{39} = \left(\sqrt{2}\right)^{39}\cdot\left(\cos\dfrac{195\pi}{12} - i\sin\dfrac{195\pi}{12}\right)$. Користуючись періодичністю синуса і косинуса, можемо записати

$\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{39} = \sqrt{2^{39}}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2^{39}}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{19}(1-i)$. Отже, маємо

$$\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{39}\right] = 2^{19} = 524\,288.$$

<u>Приклад 38.</u> Знайти всі значення коренів $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$ у показниковій формі і записати їх у тригонометричній та алгебраїчній формах.

Розв'язання. Знайдемо модуль і аргумент підкореневого числа $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Оскільки $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\dfrac{y}{x} = -\sqrt{3}$, $x < 0$, $y > 0$, то

$\arg z = \pi + arctg\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Тоді $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ і за формулою

$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ отримаємо 4 значення коренів:

$$w_0 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{4}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} + i),$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \cdot (-1 + i\sqrt{3}),$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \cdot (-\sqrt{3} - i),$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \cdot (1 - i\sqrt{3}).$$

Усі корені комплексні і ніякі два з них не є спряженими; усі вони розташовані на колі радіуса $\sqrt[4]{2}$ з центром в початку координат і поділяють це коло на 4 рівних частини (рис. 8).

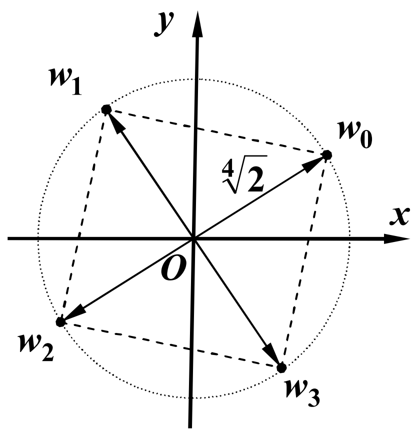

Рис. 8

<u>Приклад 39.</u> Відновити функцію $f(z)$ за її уявною частиною $v(x, y) = e^x \cos y$ та за умовою $f(0) = 1 + i$.

Розв'язання. З умов Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ маємо: $\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{x}\sin y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\cos y$. Проінтегруємо по x першу рівність:

$$u(x,y)=\int\left(-e^{x}\sin y\right)dx=-e^{x}\sin y+C(y),$$

де $C(y)$ – невідома поки що функція.

Підставимо знайдену функцію $u(x,y)$ до другої рівності і отримаємо рівняння $-e^{x}\cos y+C'(y)=-e^{x}\cos y$, з якого знаходимо $C'(y)=0$. Отже, $C(y)=C^{*}$, де C^{*} - довільна стала.

Отже, ми знайшли з точністю до сталого доданка C^{*}, який в цьому випадку є *дійсним*, гармонічну функцію $u(x,y)=C^{*}-e^{x}\sin y$, спряжену з вихідною функцією $v(x,y)$. Знайдена функція $u(x,y)$ є дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$, отже $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=C^{*}-e^{x}\sin y+i\cdot e^{x}\cos y$. З умови $f(0)=1+i$ випливає, що $0+C^{*}+i=1+i$, звідки $C^{*}=1$ і тому $u(x,y)=1-e^{x}\sin y$. Таким чином, маємо:

$$f(z)=1-e^{x}\sin y+i\cdot e^{x}\cos y=1+i\cdot e^{x}(\cos y+i\sin y).$$

Оскільки $e^{x}(\cos y+i\sin y)=e^{z}$, то остаточно отримуємо $f(z)=1+ie^{z}$.

Зауваження. На практиці в більшості випадків функції $u(x,y)$ й $v(x,y)$ задаються виразами, що включають елементарні функції типа показникової або тригонометричних. Тоді функцію $f(z)$ можна виразити через змінну z за допомогою формальної заміни $x=z$, $y=0$: $f(z)=\left[u(x,y)+iv(x,y)\right]\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}$.

Тут $f(z)=(1-e^{x}\sin y+i\cdot e^{x}\cos y)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}=1-e^{z}\cdot\sin 0+ie^{z}\cos 0=1+ie^{z}$.

<u>*II спосіб.*</u> В даному випадку $z_0=0$, $f(z_0)=1+i$, тому $\bar{z}_0=0$, $\overline{f(z_0)}=1-i$. Тоді за формулою $f(z)=2i\cdot v\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2},\frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)+\overline{f(z_0)}$, де $\overline{f(z_0)}$ – число, спряжене з $f(z_0)$, маємо

$$f(z)=2i\cdot v\left(\frac{z+\bar z_0}{2},\frac{z-\bar z_0}{2i}\right)+\overline{f(z_0)}=2ie^{\frac{z}{2}}\cos\frac{z}{2i}+1-i=\left\{\cos\frac{z}{2i}=\cos\left(-\frac{iz}{2}\right)=\right.$$

$$\left.=ch\frac{z}{2}=\frac{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}{2}\right\}=2ie^{\frac{z}{2}}\frac{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}{2}+1-i=ie^z+i+1-i=1+ie^z.$$

<u>Приклад 40.</u> Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо відома її дійсна частина $u(x,y)=x^2-y^2+2x$ і значення $f(i)=-1+2i$.

Розв'язання. В даному випадку $z_0=i$, $f(z_0)=-1+2i$, тому $\bar z_0=-i$, $\overline{f(z_0)}=-1-2i$. Тоді за формулою $f(z)=2\cdot u\left(\frac{z+\bar z_0}{2},\frac{z-\bar z_0}{2i}\right)-f(z_0)$ маємо

$$f(z)=2\left[\left(\frac{z-i}{2}\right)^2-\left(\frac{z+i}{2i}\right)^2+2\frac{z-i}{2}\right]+1-2i=z^2+2z.$$

<u>Приклад 41.</u> Обчислити інтеграл $\int\limits_L(2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz$, де L:

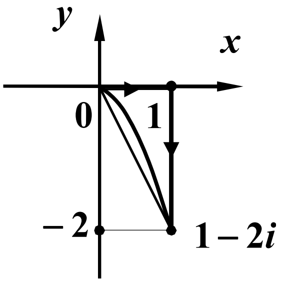

Рис. 9

а) відрізок прямої від точки $z_1=0$ до точки $z_2=1-2i$;

б) дуга параболи $y=-2x^2$, що з'єднує ті ж самі точки;

в) ламана $z_1z_3z_2$, де $z_3=1$ (рис. 9).

Розв'язання. З урахуванням того, що $z=x+iy$, перепишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$2-i+z\,\mathrm{Im}\,z=u+iv=2-i+(x+iy)y=xy+2+i(y^2-1).$$

Тут $u(x,y)=xy+2$, $v(x,y)=y^2-1$. Тоді за формулою

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_L(u+iv)(dx+idy)=\int\limits_L udx-vdy+i\int\limits_L vdx+udy$$

отримаємо

$$\int\limits_L(2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz=\int\limits_L(xy+2)dx-(y^2-1)dy+i\int\limits_L(y^2-1)dx+(xy+2)dy.$$

а) Рівняння прямої, що проходить через точки $z_1=0$ й $z_2=1-2i$ є $y=-2x$, а x зростає від 0 до 1, отже, $dy=-2dx$ і тоді

$$\int_L (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz=\int_0^1[(-2x^2+2)-(4x^2-1)(-2)]dx+$$

$$+i\int_0^1[(4x^2-1)+(-2x^2+2)(-2)]dx=\int_0^1 6x^2dx+i\int_0^1(8x^2-5)dx=2-i\frac{7}{3}.$$

б) Для параболи $y=-2x^2$ маємо $dy=-4xdx$, а x зростає від 0 до 1. Отже,

$$\int_L (2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz=\int_0^1[(-2x^3+2)-(4x^4-1)(-4x)]dx+i\int_0^1[(4x^4-1)+$$

$$+(-2x^3+2)(-4x)]dx=2\int_0^1(8x^5-x^3-2x+1)dx+i\int_0^1(12x^4-8x-1)dx=\frac{13}{6}-i\frac{13}{5}.$$

в) На відрізку z_1z_3 маємо $y=0$, $dy=0$, а x зростає від 0 до 1. На відрізку z_3z_2 маємо $x=1$, $dx=0$, а y спадає від 0 до -2. Отже, за властивістю лінійності криволінійного інтеграла отримуємо

$$\int_{z_1z_3z_2}(2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz=\int_{z_1z_3}(2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz+\int_{z_3z_2}(2-i+z\,\mathrm{Im}\,z)dz=$$

$$=\int_0^1 2\,dx-i\int_0^1 dx+\int_0^{-2}(1-y^2)dy+i\int_0^{-2}(y+2)dy=2-i+\frac{2}{3}-2i=\frac{8}{3}-3i.$$

Зауваження. Порівнюючи між собою усі отримані значення заданого інтеграла, можемо зробити висновок, що *цей* інтеграл *залежить* від лінії L (шляху інтегрування).

Приклад 42. Встановити збіжність або довести розбіжність рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2}$.

Розв'язання.

а) Оскільки $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} < \frac{1}{\sqrt{n\cdot n\cdot n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ збігається як ряд Діріхле при $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, то за ознакою порівняння заданий ряд також збігається;

б) Для порівняння оберемо звичайний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який, як відомо, розбігається. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln n}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n} = \infty.$$

Отже, на підставі цієї ознаки, заданий ряд *розбігається*;

в) Для порівняння оберемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$, який *збігається*, оскільки $p = 2 > 1$. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}}{\frac{1}{n\ln^2 n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty$. Оскільки границя нескінченна, то ознака незастосовна. Це означає, що ряд для порівняння обраний невдало. Порівняння ж з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ показує, що даний ряд *розбігається* (виконайте самостійно);

г) Спроби порівняння даного ряду з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ або збіжним рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ виявляються невдалими (перевірте!). Тому для порівняння оберемо (збіжний) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$, де $1 < \beta < 2$. Візьмемо, наприклад, $\beta = 3/2$. Тоді за ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln n}{n^2}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння заданий ряд *збігається*;

д) При дослідженні рядів дуже корисною може виявитися ***таблиця еквівалентних нескінченно малих***:

якщо $\alpha(n)\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\sin\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$\arcsin\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$tg\,\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$arctg\,\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$\ln[1+\alpha(n)]\sim\alpha(n),$$

$$b^{\alpha(n)}-1\sim\ln b\cdot\alpha(n),$$

$$e^{\alpha(n)}-1\sim\alpha(n).$$

Оскільки $\frac{1}{n^2}\to 0$ при $n\to\infty$, то на підставі наведеної таблиці, $arctg\frac{1}{n^2}\sim\frac{1}{n^2}$.

Тоді $\sqrt[3]{n^2}arctg\frac{1}{n^2}\sim\sqrt[3]{n^2}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^{4/3}}$. Це означає, що якщо за ряд для порівняння обрати *збіжний* ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ $(\alpha=\frac{4}{3}>1)$, то за граничною ознакою порівняння отримаємо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}arctg\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{4/3}}}=1$. Тоді за наслідком з цієї ознаки заданий ряд *збігається*.

<u>Приклад 43.</u> Встановити збіжність або довести розбіжність рядів

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$; д) $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\ldots$.

Розв'язання.

а) Оскільки $a_n = \dfrac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}$, то

$$a_{n+1} = \frac{[2(n+1)+1]!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot [(3(n+1)+1]} = \frac{(2n+3)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+4)} = \frac{(2n+1)!!(2n+3)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)\cdot (3n+4)}$$

і тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{3n+4} = \dfrac{2}{3} < 1$. Отже, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд *збігається*;

б) Оскільки $a_n = \dfrac{n!3^n}{n^n}$, то $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{n!(n+1)3^n\cdot 3}{(n+1)^n(n+1)}$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = 3\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \dfrac{3}{e} > 1$. Таким чином, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд *розбігається*;

в) Оскільки $a_n = \left(\dfrac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}\left\{1^\infty\right\} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} e^a$, де $a = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{n^2+5}{n^2+6}-1\right) = -\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+6} = -1$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} =$

$= e^{-1} = \dfrac{1}{e} < 1$ і за ознакою Коші заданий ряд *збігається*;

г) Оскільки $a_n = arctg^n \dfrac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} arctg\dfrac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}} =$

$= arctg\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}} = arctg\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3} > 1$. Отже, за ознакою Коші заданий ряд *розбігається*;

д) Загальний член ряду, як неважко бачити, $a_n = \dfrac{n}{(n+1)^3}$. За ознакою Д'Аламбера маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+1}{(n+2)^3}}{\dfrac{n}{(n+1)^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4}{n(n+2)^3} = 1$, отже, на підставі цієї ознаки ніякого висновку про збіжність ряду зробити не можна (ознака незастосовна). До того ж самого результату приводить спроба застосування радикальної ознаки Коші.

Будемо розглядати члени ряду як значення функції $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^3}$ при значеннях аргументу $x=1, 2, 3, \ldots$. Неважко перевірити, що при $x \geq 1$ функція $f(x)$ додатна, неперервна й монотонно спадна, тобто задовольняє умови інтегральної ознаки. Тому дослідимо на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x}{(x+1)^3}dx$. В даному випадку за означенням маємо:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3}dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_1^{B} \frac{x}{(x+1)^3}dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_1^{B} \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\right]dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right]\Bigg|_1^B = \lim_{B\to+\infty} \left[-\frac{1}{B+1} + \frac{1}{2(B+1)^2}\right] - \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}.$$

Отже, інтеграл набуває скінченного значення, тобто збігається. Тому за інтегральною ознакою одночасно з ним збігається і заданий ряд.

<u>Приклад 44.</u> Встановити характер збіжності або довести розбіжність рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot (3n)}{(n+1)!} arctg \dfrac{1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln\ln n}$.

Розв'язання.

а) Дослідимо заданий знакопочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot (3n)}{(n+1)!} arctg \dfrac{1}{2^n}$ (*). За ознакою Д'Аламбера маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot (3n)\cdot(3n+3)}{(n+2)!} arctg \dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot (3n)}{(n+1)!} arctg \dfrac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{n+2} = \frac{3}{2} > 1$$

(тут враховано, що $arctg \dfrac{1}{2^n} \sim \dfrac{1}{2^n}$ при $n\to\infty$). Отже, ряд (*) розбігається за ознакою Д'Аламбера. Тому заданий ряд *не збігається абсолютно*. А оскільки цей результат отриманий на підставі ознаки Д'Аламбера, то необхідна умова збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (а з нею і друга умова ознаки Лейбніца) не виконується. Це означає, що заданий ряд *розбігається*;

б) Дослідимо заданий знакопочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}$ (*), складений з абсолютних величин членів заданого ряду. Порівняємо цей ряд зі *збіжним* рядом Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, застосувавши граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)} = 1.$$ Отже, за наслідком зі згаданої ознаки обидва ряди поводяться однаково, тобто ряд (*) збігається. А це означає, що заданий ряд *збігається абсолютно*;

в) Дослідимо заданий знакопочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\ln\ln n}$ (*).

Оскільки $\ln n < n$, а $\ln\ln n << n$, то $\frac{1}{\ln\ln n} >> \frac{1}{n}$. Тому за ознакою порівняння ряд (*) розбігається, отже, заданий ряд *не збігається абсолютно* (тут ми врахували, що гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається). Оскільки цей результат отриманий не за ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші, то ми повинні дослідити ряд також на умовну збіжність.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) нерівність $\frac{1}{\ln\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln\ln n}$ виконується $\forall n \geq 4$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\ln n} = 0$.

Обидві умови виконуються, отже, за ознакою Лейбніца заданий ряд збігається. А оскільки він не збігається абсолютно, то він *збігається умовно*.

<u>Приклад 45.</u> З'ясувати, чи буде функція $y = x\arcsin x$ розв'язком рівняння $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Якщо функція є розв'язком рівняння, то її підстановка до цього рівняння повинна перетворити його на вірну тотожність. Перевіримо це.

Підставимо $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ разом із $y = x\arcsin x$ до рівняння:

$$x\arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - x\arcsin x = xtg\frac{x\arcsin x}{x}.$$

З урахуванням того, що $tgx = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ й $\sin(\arcsin x) = x$, отримуємо вірну тотожність $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Отже, задана функція справді задовольняє рівнянню, тобто є його розв'язком.

__Приклад 46.__ Скласти рівняння кривої, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_0(0,1)$, а кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої в кожній точці дорівнює $k(x,y) = x\sqrt[3]{y}$.

Розв'язання. Як відомо, кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = y(x)$ в довільній точці $M(x, y)$ є $k(x, y) = y'$. Отже, маємо рівняння $y' = x\sqrt[3]{y}$. Поділимо змінні і отримаємо $\dfrac{dy}{\sqrt[3]{y}} = xdx$, звідки $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{C}{2}$ або $y^2 = \left(\dfrac{x^2+C}{3}\right)^3$. Отриманий загальний розв'язок є рівнянням сім'ї кривих. Шукана крива проходить через точку M_0, отже, її рівняння визначається значенням $C = C^*$, знайденим з умови $y(x_0) = y_0$, тобто, в даному випадку, з умови $y(0) = 1$. Отже, $1^2 = \left(\dfrac{0+C^*}{3}\right)^3$, звідки $C^* = 3$. Таким чином, рівняння шуканої кривої є $y^2 = \left(\dfrac{x^2}{3}+1\right)^3$. Графік додатної гілки кривої наведений на рис. 10.

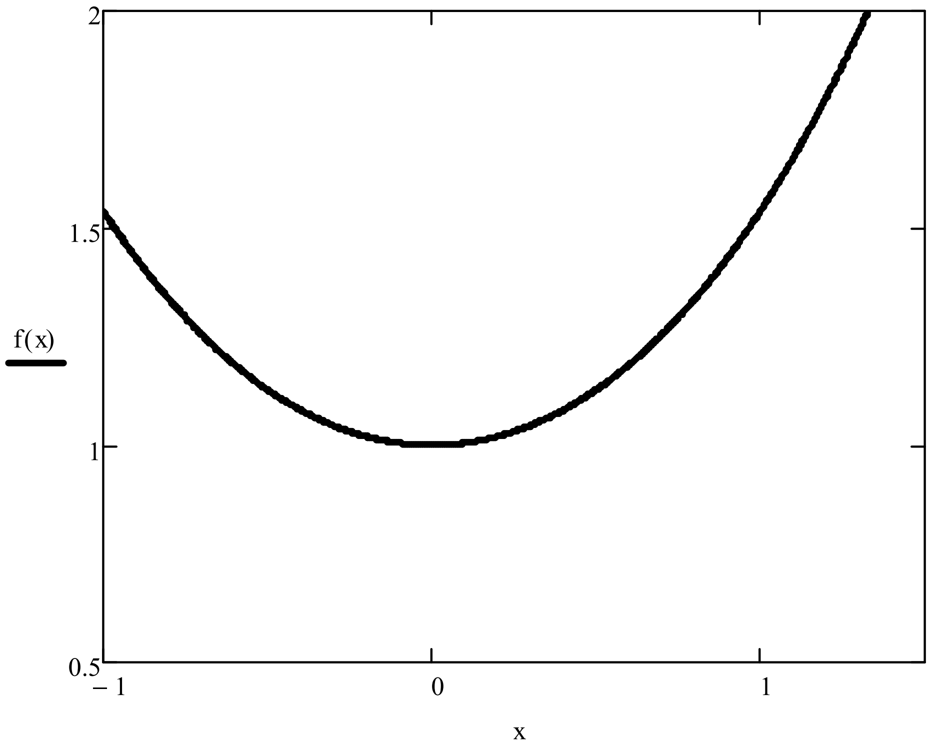

Рис. 10

Приклад 47. Розв’язати рівняння

а) $2xy^2dx - ydy = yx^2dy - 6xdx$; б) $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$;

в) $y' = \dfrac{2x + y - 4}{x - y + 1}$; г) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ (застосувати метод Бернуллі).

Розв’язання.

а) Перетворимо рівняння до вигляду $2x(y^2 + 3)dx = y(x^2 + 1)dy$. Отже, маємо *рівняння з відокремлюваними змінними* $X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0$. Поділимо обидві частини рівняння на добуток $(y^2 + 3)(x^2 + 1)$. Оскільки обидва множники не дорівнюють нулю (а саме, додатні), то при цьому частинні (або особливі) розв’язки рівняння не загублюються. Таким чином, дістаємо рівняння з відокремленими змінними $\dfrac{2x}{x^2 + 1}dx = \dfrac{y}{y^2 + 3}dy$. Після інтегрування отримуємо загальний інтеграл заданого рівняння $\ln(x^2 + 1) = \dfrac{1}{2}\ln(y^2 + 3) + \ln|C|$,

$C \neq 0$, який після потенціювання і використання властивостей логарифмів набуває вигляду $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{y^2+3}} = C$;

б) Маємо *однорідне* диференціальне рівняння першого порядку $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, тому що функції $P(x,y) = x - y\cos\dfrac{y}{x}$ й $Q(x,y) = x\cos\dfrac{y}{x}dy$ є однорідними одного й того самого виміру. Справді, $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y \cos\dfrac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot P(x,y)$, $Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \cos\dfrac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot Q(x,y)$.

Оскільки $x \neq 0$, то рівняння приводиться до вигляду

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1 - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}$. Застосуємо підстановку $y = ux$. Тоді $y' = u'x + u$ і

$$u'x + u = \frac{u\cos u - 1}{\cos u}; \quad u'x = \frac{u\cos u - 1}{\cos u} - u; \quad u'x = -\frac{1}{\cos u}; \quad \frac{du}{dx}x = -\frac{1}{\cos u};$$

$\cos u du + \dfrac{dx}{x} = 0$. Інтегрування отриманого рівняння з відокремленими змінними дає загальний інтеграл $\sin u + \ln|x| = C$, який після повернення до вихідної змінної y набуває остаточного вигляду $\sin\dfrac{y}{x} + \ln|x| = C$;

в) Дане рівняння відноситься до типу $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$. Такі рівняння у випадку $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ зводяться до однорідних за допомогою підстановки $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$, де x_0, y_0 є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$. Розв'язком системи $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ є $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Зробимо підстановку $x = 1 + u$, $y = 2 + v$. Тоді $dx = du$, $dy = dv$, $y' = \dfrac{dv}{du}$.

Отримуємо однорідне рівняння $\frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{u-v}$. Розв'яжемо це рівняння за допомогою підстановки $v=zu$, $\frac{dv}{du}=u\frac{dz}{du}+z$. Маємо

$$u\frac{dz}{du}+z=\frac{2+z}{1-z};\quad u\frac{dz}{du}=\frac{2+z^2}{1-z};\quad \frac{1-z}{2+z^2}dz=\frac{du}{u}.$$

Після інтегрування дістаємо загальний інтеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln(2+z^2)=\ln|u|+C.$$

Повертаючись до вихідних змінних за формулами $z=\frac{v}{u}$, $v=y-2$, $u=x-1$, остаточно отримуємо $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{y-2}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left[2+\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2\right]=\ln|x-1|+C$;

г) Маємо *лінійне* диференціальне рівняння першого порядку $y'+p(x)y=q(x)$. Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох невідомих функцій $y=uv$, отже, $y'=u'v+uv'$. Підставимо y та y' у рівняння і отримаємо $u'v+uv'+uv\cos x=e^{-\sin x}$ або $u'v+u(v'+v\cos x)=e^{-\sin x}$ $(*)$. Невідому функцію $v=v(x)$ будемо шукати з умови $v'+v\cos x=0$ $(**)$, отже, $\frac{dv}{dx}=-v\cos x$ або $\frac{dv}{v}=-\cos x dx$. Інтегруючи, знаходимо $\ln|v|=-\sin x$, звідки $v=e^{-\sin x}$ (для зручності беремо частинний розв'язок, якому відповідає нульове значення довільної сталої). Підставимо знайдену функцію v в рівняння (*) і з урахуванням (**) отримаємо $u'e^{-\sin x}=e^{-\sin x}$. Оскільки $e^{-\sin x}\neq 0$ $\forall x$, то $u'=1$ або $u=x+C$. Таким чином, загальний розв'язок має вигляд $y=(x+C)\,e^{-\sin x}$.

Приклад 48. Розв'язати задачу Коші $xy'+y=y^2\ln x$, $y(1)=-\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $x>0$, то без втрати розв'язку перетворимо рівняння до вигляду $y'+\frac{y}{x}=y^2\frac{\ln x}{x}$. Отримали рівняння Бернуллі $y'+p(x)y=y^r q(x)$, де $r\neq 0$, $r\neq 1$. Розв'яжемо його однойменним методом: $y=uv$, $y'=u'v+uv'$,

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=u^2v^2\frac{\ln x}{x};\quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=u^2v^2\frac{\ln x}{x}\quad (*);\quad v'+\frac{v}{x}=0\quad (**);$$

$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$; $\quad \ln|v| = -\ln|x|$; $\quad v = \frac{1}{x}$; $\quad u'\frac{1}{x} = u^2\frac{1}{x^2}\frac{\ln x}{x}$; $\quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}dx$;

$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x + 1}{x} - C$; $\quad u = \frac{x}{\ln x + 1 + Cx}$. Загальний розв'язок $y = uv$, таким чином, має вигляд $y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$. Розв'язок поставленої задачі Коші $\tilde{y}$ визначається значенням довільної сталої C^*, знайденим з початкової умови: $-\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + C^*}$, $\quad C^* = -3$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд $\tilde{y} = \frac{1}{\ln x + 1 - 3x}$.

Приклад 49. Розв'язати рівняння

а) $y'' + 3y' - 4y = 0$; б) $y'' - 16y' + 64y = 0$; в) $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Розв'язання.

а) Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ дійсні і не дорівнюють один одному. Відповідно до цього фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^x$ й $y_2(x) = e^{-4x}$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-4x}$, де C_1 й C_2 – довільні сталі;

б) Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 8 = \lambda_2$ дійсні і дорівнюють один одному. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^{8x}$ й $y_2(x) = xe^{8x}$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{8x}(C_1 + C_2x)$;

в) Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$. Його корені $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 25} = 3 \pm 4i$ комплексні спряжені. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^{3x}\cos 4x$ й $y_2(x) = e^{3x}\sin 4x$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$.

Приклад 50. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 12y' + 45y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 12\lambda + 45 = 0$. Його корені $\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 45} = -6 \pm 3i$ комплексні спряжені. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^{-6x}\cos 3x$ й $y_2(x) = e^{-6x}\sin 3x$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{-6x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. Тоді

$$y'(x) = -6e^{-6x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^{-6x}(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x).$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші, для чого обчислимо значення C_1^* й C_2^* з початкових умов: $y(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad e^0(C_1\cos 0 + C_2\sin 0) = 5$,

$y'(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad -6e^0(C_1\cos 0 + C_2\sin 0) + 3e^0(-C_1\sin 0 + C_2\cos 0) = 3$.

Отже, $C_1^* = 5$, $C_2^* = 11$ і розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y}(x) = e^{-6x}(5\cos 3x + 11\sin 3x).$$

Приклад 51. Вказати вигляд (без відшукання коефіцієнтів) частинного розв'язку рівняння.

а) $y'' - y' = x^2 + 3x + 10$; б) $y'' + 6y' + 9y = (x^2 - x - 5)\,e^{-3x}$;

в) $y'' + 9y = (x^3 - 3)\cos 3x$; г) $y'' - 8y' + 15y = 3\cos x - 5\sin x$;

д) $y'' - 8y' + 16y = (2x+1)e^{4x}\sin 2x$; е) $y'' - 2y' + 2y = e^x(x^2\cos x + 2\sin x)$.

Розв'язання. В усіх випадках маємо лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами й правими частинами так званого "спеціального" вигляду $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени степенів m й n відповідно. Тоді частинний розв'язок рівняння *підбирається* у вигляді $y^*(x) = x^k e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x]$, де k – кратність контрольного числа правої частини $\sigma = \alpha + \beta i$ серед коренів характеристичного рівняння, а $R_s(x)$ і $T_s(x)$ – многочлени *одного й того ж самого* степеня $s = \max\{m, n\}$ з *невизначеними* коефіцієнтами. У таблиці наведені вигляди частинного розв'язку в залежності від правої частини (число k залежить також від лівої частини рівняння, а саме, від коренів характеристичного рівняння, і тому визначається окремо).

№	$f(x)$	σ	s	y^*
1.	$P_m(x)$	0	m	$x^k R_m(x)$
2.	$e^{\alpha x} P_m(x)$	α	m	$x^k e^{\alpha x} R_m(x)$
3.	$P_m(x)\cos\beta x$	βi	m	$x^k[R_m(x)\cos\beta x +$ $+T_m(x)\sin\beta x$
4.	$Q_n(x)\sin\beta x$	βi	n	$x^k[R_n(x)\cos\beta x +$ $+T_n(x)\sin\beta x$
5.	$P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$	βi	$\max\{m, n\}$	$x^k[R_s(x)\cos\beta x +$ $+T_s(x)\sin\beta x$
6.	$e^{\alpha x} P_m(x)\cos\beta x$	$\alpha+\beta i$	m	$x^k e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x +$ $+T_m(x)\sin\beta x$
7.	$e^{\alpha x} Q_n(x)\sin\beta x$	$\alpha+\beta i$	n	$x^k e^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x +$ $+T_n(x)\sin\beta x$
8.	$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x +$ $+Q_n(x)\sin\beta x]$	$\alpha+\beta i$	$\max\{m, n\}$	$x^k e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x +$ $+T_s(x)\sin\beta x$

а) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Судячи з правої частини, маємо випадок 1 (див. таблицю), де $f(x) = P_2(x) = x^2 + 3x + 10$, тобто $m = 2$. Оскільки $\sigma = 0$, то $k = 1$; $s = m = 2$. Отже, $y^* = x\,(Ax^2 + Bx + C)$;

б) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Судячи з правої частини, маємо випадок 2 (див. таблицю), де $f(x) = (x^2 - x - 5)\,e^{-3x}$, тобто $m = 2$. Оскільки $\alpha = -3$, $\beta = 0$, то $\sigma = -3$, а $k = 2$; $s = m = 2$. Отже, $y^* = x^2\, e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C)$;

в) Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Судячи з правої частини, маємо випадок 3 (див. таблицю), де $f(x) = (x^3 - 3)\cos 3x$, тобто $m = 3$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 3$, то $\sigma = 3i$, а $k = 1$; $s = m = 3$. Отже, $y^* = x\,[(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos 3x + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)\sin 3x]$;

г) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Судячи з правої частини, маємо випадок 5 (див. таблицю), де $f(x) = 3\cos x - 5\sin x$, тобто $m = n = 0$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 1$, то $\sigma = i$, а $k = 0$; $s = 0$. Отже, $y^* = A\cos x + B\sin x$;

д) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Судячи з правої частини, маємо випадок 7 (див. таблицю), де $f(x) = (2x+1)e^{4x}\sin 2x$, тобто $n = 1$. Оскільки $\alpha = 4$, $\beta = 2$, то $\sigma = 4 + 2i$, а $k = 0$; $s = n = 1$. Отже, $y^* = e^{4x}[(Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x]$;

е) Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Судячи з правої частини, маємо випадок 8 (див. таблицю), де $f(x) = e^x(x^2\cos x + 2\sin x)$, тобто $m = 2$, $n = 0$. Оскільки $\alpha = 1$, $\beta = 1$, то $\sigma = 1 + i$, а $k = 1$; $s = \max\{2, 0\} = 2$. Отже, $y^* = xe^x\,[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x]$.

Приклад 52. Розв’язати задачу Коші $y'' + 4y = \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Розв’язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною “спеціального” вигляду $f(x) = \sin 2x$. Загальний розв’язок рівняння має вигляд $y(x) = y_{одн}(x) + y^*(x)$, де $y_{одн}(x)$ – загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння, а $y^*(x)$ – будь-який частинний розв’язок вихідного рівняння.

1) Знайдемо загальний розв’язок однорідного рівняння $y'' + 4y = 0$: оскільки характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, то загальний розв’язок рівняння має вигляд $y_{одн}(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

2) Судячи з правої частини, маємо випадок 4 (див. таблицю), де $f(x) = \sin 2x$, тобто $m = n = 0$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 2$, то $\sigma = 2i$, а $k = 1$; $s = 0$. Отже, частинний розв’язок підбираємо у вигляді $y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Знайдемо коефіцієнти A й B, для чого підставимо ${y^*}'$ та ${y^*}''$ у рівняння. Оскільки

$${y^*}' = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) = (A + 2Bx)\cos 2x + \\ + (B - 2Ax)\sin 2x,$$

$${y^*}'' = 2B\cos 2x - 2(A + 2Bx)\sin 2x - 2A\sin 2x + \\ + 2(B - 2Ax)\cos 2x = 4\,[(B - Ax)\cos 2x - (A + Bx)\sin 2x],$$

то отримуємо рівність

$$4\,[(B - Ax)\cos 2x - (A + Bx)\sin 2x] + 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = \sin 2x$$

або $4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \sin 2x$. Прирівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ в обох частях рівності: $\begin{array}{l|l} \cos 2x & 4B = 0 \\ \sin 2x & -4A = 1 \end{array}$, звідки $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = 0$. Отже, частинний розв'язок має вигляд $y^* = -\dfrac{x}{4}\cos 2x$, а загальний розв'язок є $y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \dfrac{x}{4}\cos 2x$.

3) Знайдемо розв'язок задачі Коші, для чого обчислимо значення C_1^* й C_2^* з початкових умов: $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$;

$y'(x) = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{x}{2}\sin 2x$, $y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2C_2 - \dfrac{1}{4} = 0$.

Отже, $C_1^* = 0$, $C_2^* = \dfrac{1}{8}$ і шуканий розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x.$$

Приклад 53. Знайти зображення функції $f(t) = te^{3t}\eta(t-2)$.

Розв'язання. Розглянемо два способи.

Перший спосіб. Перетворимо тотожно задану функцію:

$$f(t) = te^{3t}\eta(t-2) = te^{3(t-2+2)}\eta(t-2) = e^6 te^{3(t-2)}\eta(t-2).$$

Оскільки $e^{3t} \to \dfrac{1}{p-3}$, то за теоремою запізнювання $e^{3(t-2)}\eta(t-2) \to \dfrac{1}{p-3}e^{-2p}$, а за теоремою про диференціювання зображення

$$te^{3(t-2)}\eta(t-2) \to -\left(\frac{1}{p-3}e^{-2p}\right)' = -\left[-\frac{1}{(p-3)^2}e^{-2p} - 2\frac{1}{p-3}e^{-2p}\right] =$$

$= e^{-2p}\left[\dfrac{1}{(p-3)^2} + \dfrac{2}{p-3}\right]$. З урахуванням лінійності перетворення Лапласа остаточно маємо $F(p) = e^{-2p+6}\left[\dfrac{1}{(p-3)^2} + \dfrac{2}{p-3}\right]$.

Другий спосіб. Перетворимо тотожно задану функцію дещо по іншому:

$$f(t) = te^{3t}\eta(t-2) = (t-2+2)e^{3t}\eta(t-2) = e^{3t}(t-2)\eta(t-2) + 2e^{3t}\eta(t-2) =$$

$$= e^{3t}\left[(t-2)\eta(t-2) + 2\eta(t-2)\right].$$

Оскільки $t \to \dfrac{1}{p^2}$, $1 \to \dfrac{1}{p}$, то за теоремою запізнювання $(t-2)\eta(t-2) \to \dfrac{1}{p^2}e^{-2p}$, $\eta(t-2) \to \dfrac{1}{p}e^{-2p}$. Тоді за теоремою зміщення з урахуванням лінійності перетворення Лапласа одержуємо

$$F(p) = \frac{1}{(p-3)^2}e^{-2(p-3)} + \frac{2}{p-3}e^{-2(p-3)}.$$

<u>Приклад 54.</u> Знайти зображення функції $f(t) = \dfrac{e^{-2t}\sin^2 3t}{t}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2 3t = \dfrac{1-\cos 6t}{2}$, то за теоремою зміщення та властивістю лінійності перетворення Лапласа маємо

$$e^{-2t}\sin^2 3t \to \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+2} - \frac{p+2}{(p+2)^2+36}\right].$$

Тоді за теоремою про інтегрування зображення

$$f(t) = \frac{e^{-2t}\sin^2 3t}{t} \to \int_p^{+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{q+2} - \frac{q+2}{(q+2)^2+36}\right]dq = \frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\Big[\ln|q+2| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left[(q+2)^2+36\right]\Big]\Bigg|_p^B = \frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\ln\frac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}} - \frac{1}{2}\ln\frac{p+2}{\sqrt{(p+2)^2+36}} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(p+2)^2+36}{(p+2)^2}$$ (тут враховано, що $\lim\limits_{B\to+\infty}\ln\dfrac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}} = \ln\lim\limits_{B\to+\infty}\dfrac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}} = \ln 1 = 0$).

<u>Приклад 55.</u> Знайти зображення функції $f(t) = \displaystyle\int_0^t \tau^3 e^{\tau}d\tau$.

Розв'язання.

Оскільки $t^3 \to \frac{3!}{p^4}$, то за теоремою зміщення $t^3 e^t \to \frac{3!}{(p-1)^4}$ (інакше: оскільки $e^t \to \frac{1}{p-1}$, то за теоремою про диференціювання зображення $t^3 e^t \to (-1)^3 \left(\frac{1}{p-1}\right)''' = \frac{6}{(p-1)^4}$). Тоді за теоремою про інтегрування оригіналу

$$f(t) = \int_0^t \tau^3 e^\tau d\tau \to \frac{6}{p\,(p-1)^4}.$$

Приклад 56. Знайти зображення імпульсної функції $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ h, & 3 \le t < 5, \\ 0, & t \ge 5. \end{cases}$

Розв'язання. Графік функції наведений на рис. 11.

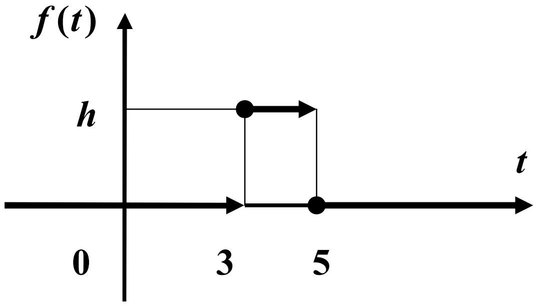

Рис. 11

Кусково-неперервна функція $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \quad t > b, \\ \varphi(t) \ne 0 & \forall t \in (a, b) \end{cases}$ (рис. 12)

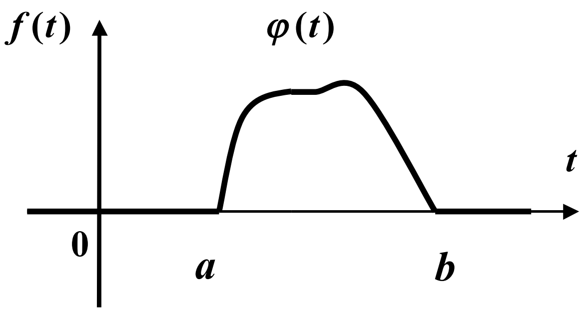

Рис. 12

подається формулою

$$f(t) = \ (t) \cdot \left[\, \eta(t-a) - \eta(t-b) \right],$$

отже, задана функція може бути зображена у вигляді

$$f(t)=h\cdot\eta(t-3)-h\cdot\eta(t-5)=h\left[\eta(t-3)-\eta(t-5)\right].$$

Тоді за властивістю лінійності і теоремою запізнювання маємо

$$f(t)\to h\left(e^{-3t}\frac{1}{p}-e^{-5t}\frac{1}{p}\right)=h\frac{e^{-3t}}{p}\left(1-e^{-2t}\right).$$

Приклад 57. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p+3)}.$$

*Розв'язання***.** Розкладемо дріб $\dfrac{p+1}{(p-1)(p+3)}$ у суму найпростіших дробів:

$$F(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p+3)}=\frac{1}{2(p-1)}+\frac{1}{2(p+3)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень з урахуванням лінійності знаходимо:

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Приклад 58. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}.$$

*Розв'язання***.** Розкладемо дріб $\dfrac{1}{(p-1)(p+1)^3}$ у суму найпростіших дробів:

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}=-\frac{1}{2(p+1)^3}-\frac{1}{4(p+1)^2}-\frac{1}{8(p+1)}+\frac{1}{8(p-1)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень з урахуванням лінійності знаходимо:

$$f(t)=-\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t}=\frac{1}{8}\left[e^{t}-e^{-t}\left(2t^2+2t+1\right)\right].$$

Приклад 59. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p)=\frac{pe^{-3p}}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}.$$

Розв'язання. Розкладемо дріб $\dfrac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}$ у суму найпростіших

дробів: $$\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}=\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+\frac{8}{3}}{p^2+4p+8}.$$

За таблицею основних зображень (додаток 1) і за теоремою зміщення з урахуванням лінійності маємо

$$\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+2}\leftarrow\frac{1}{40}e^{2t}+\frac{1}{8}e^{-2t},$$

$$-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+\frac{8}{3}}{p^2+4p+8}=-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+2+\frac{2}{3}}{p^2+4p+8}\leftarrow-\frac{3}{20}\cdot e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t}\sin 2t,$$

отже,

$$\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}\leftarrow\frac{1}{40}e^{2t}+\frac{1}{8}e^{-2t}-\frac{3}{20}\cdot e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t}\sin 2t.$$

Тоді за теоремою запізнювання остаточно маємо

$$f(t)=\left[\frac{1}{40}e^{2t-6}+\frac{1}{8}e^{-2t+6}-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t+6}[3\cos(2t-6)+\sin(2t-6)]\right]\cdot\eta(t-3).$$

Приклад 60. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x''+4x'+4x=e^{-2t}(\cos t+2\sin t),$$

що задовольняє початковим умовам $x(0)=-1,\ x'(0)=1.$

Розв'язання. Нехай $x(t)\to X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо

$$x'(t)\to pX(p)+1,\ x''(t)\to p^2X(p)+p-1.$$

За таблицею оригіналів і зображень (додаток 1) з урахуванням лінійності знаходимо

$$\cos t+2\sin t\to\frac{p}{p^2+1}+2\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{p+2}{p^2+1}.$$

Тоді за теоремою зміщення

$$e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \to \frac{p+4}{(p+2)^2+1} \ .$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$p^2X(p) + p - 1 + 4pX(p) + 4 + 4X(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}$$

або, після перетворень,

$$(p^2+4p+4)X(p) + p + 3 = \frac{p+4}{(p+2)^2+1} \, .$$

Знайдемо звідси зображення розв'язку:

$$X(p) = -\frac{p^3+7p^2+16p+11}{[(p+2)^2+1]\,(p+2)^2} \, .$$

Розклавши дріб у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$X(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2} = -\frac{p+2}{(p+2)^2+1} - 2\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2} \, .$$

Оскільки $\frac{p}{p^2+1} \leftarrow \cos t,\quad \frac{1}{p^2+1} \leftarrow \sin t,\quad \frac{1}{p^2} \leftarrow t$, то за теоремою зміщення і властивістю лінійності остаточно маємо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t) \, .$$

<u>Приклад 61.</u> Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилили на **1000** кубиків однакового розміру і ретельно їх перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик має рівно одну пофарбовану грань.

Розв'язання. При розпилюванні вихідного куба, який має 6 граней, на $n = 1000$ кубічних частин (загальне число можливих наслідків) утворюється $m = 6\times 8\times 8 = 384$ кубика з однією пофарбованою гранню (число сприятливих наслідків). Тому за класичною формулою $P(A) = \frac{m}{n}$ маємо

$$P(A) = \frac{384}{1000} = \frac{96}{250} = 0{,}384 \, .$$

Приклад 62. Колоду з **36** гральних карт ретельно перемішують і навмання витягують одразу **3** карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б одна “дама”.

Розв’язання. Знайдемо ймовірність *протилежної* події, а саме: серед узятих карт немає жодної “дами”. За класичною формулою маємо

$$q = \frac{C_4^0 \cdot C_{32}^3}{C_{36}^3}.$$

Тоді шукана ймовірність $p = 1 - q = 1 - \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = 0{,}3053$.

Приклад 63. Та ж сама задача, але карти витягують *по черзі*, одну за одною.

Розв’язання. У даному випадку, на відміну від попереднього, маємо не одну, а три *залежні* події. Тому за теоремою множення ймовірностей залежних подій

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$$

маємо $q = \frac{32}{36} \cdot \frac{31}{35} \cdot \frac{30}{34} = \frac{248}{357}$. Тоді $p = 1 - q = \frac{114}{357} = 0{,}3053$.

Приклад 64. У крузі радіуса R розміщений малий круг радіуса $r < R$. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута у великий круг, влучить також і в малий круг.

Розв’язання. За «геометричним» означенням ймовірності $P(A) = \frac{\Omega_A}{\Omega}$ маємо

$$p = \frac{S_r}{S_R} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Приклад 65. Розрив електричної мережі може відбутися внаслідок відмови елемента E_1 або одночасно двох елементів E_2 й E_3, які відмовляють незалежно один від одного відповідно з ймовірностями $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = p_3 = 0{,}2$. Визначити ймовірність розриву електричної мережі.

Розв'язання. Мережа буде працювати (подія A), якщо жоден з елементів не відмовить. Тому за теоремою множення ймовірностей незалежних подій $P(A)=(1-p_1)\cdot(1-p_2p_3)=0{,}672$. Отже, ймовірність розриву мережі (подія $\overline{A}$)

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}328.$$

Приклад 66. Стрілець робить один постріл по мішені, яка складається з круга й двох концентричних кілець. Ймовірності попадання в круг і кільця відповідно дорівнюють $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}1$. Визначити ймовірність промаху.

Розв'язання. Мішень буде уражена (подія A), якщо відбудеться влучання або в круг, або в одне з кілець. Оскільки стрілець робить тільки один постріл, то ці події несумісні. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій $P(A_1+A_2+....+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$ маємо

$$P(A)=p_1+p_2+p_3=0{,}3+0{,}2+0{,}1=0{,}6.$$

Отже, ймовірність промаху (подія $\overline{A}$) є $P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}4$.

Приклад 67. Технічний пристрій містить три блоки, надійності яких відповідно дорівнюють $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}3$. При відмові за проміжок часу t усіх трьох блоків пристрій напевно виходить з ладу, при відмові лише одного блока ймовірність виходу з ладу $0{,}2$, а при відмові двох блоків вона складає $0{,}6$. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу t пристрій вийде з ладу.

Розв'язання. Нехай подія A – вихід пристрою з ладу за проміжок часу t – відбувається за умови появи однієї з несумісних подій: B_1 – усі три блоки за час t працювали безвідмовно, B_2 – за час t відмовив тільки один блок, B_3 – за час t відмовили два блоки, B_4 – за час t відмовили усі три блоки.

Ймовірності відмов кожного з блоків: $q_1=1-p_1=1-0{,}6=0{,}4$, $q_2=1-p_2=1-0{,}5=0{,}5$, $q_3=1-p_3=1-0{,}3=0{,}7$. За теоремами додавання і множення ймовірностей знайдемо ймовірності появ подій B_i $(i=\overline{1,4})$:

$P(B_1)=p_1\cdot p_2\cdot p_3=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}09$,

$P(B_2)=q_1\cdot p_2\cdot p_3+p_1\cdot q_2\cdot p_3+p_1\cdot p_2\cdot q_3=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+$
$+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}36$,

$$P(B_3)=q_1\cdot q_2\cdot p_3+p_1\cdot q_2\cdot q_3+q_1\cdot p_2\cdot q_3=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7+$$
$$+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}41,$$
$$P(B_4)=q_1\cdot q_2\cdot q_3=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}14.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{4}P(B_i)=0{,}09+0{,}36+0{,}41+0{,}14=1$, то події B_i $(i=\overline{1,4})$ утворюють повну групу. Відповідні умовні ймовірності події A дорівнюють: $P_{B_1}(A)=0$, $P_{B_2}(A)=0{,}2$, $P_{B_3}(A)=0{,}6$, $P_{B_4}(A)=1$. За формулою повної ймовірності $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$ маємо

$$P(A)=0{,}09\cdot 0+0{,}36\cdot 0{,}2+0{,}41\cdot 0{,}6+0{,}14\cdot 1=0{,}458.$$

<u>Приклад 68.</u> По каналу зв'язку передається один з двох можливих сигналів x_1 або x_2, причому сигнал x_2 передається вдвічі частіше, ніж сигнал x_1. Через перешкоди можливі викривлення: замість одного сигналу може бути прийнятий інший і навпаки. Властивості каналу зв'язку такі, що сигнал x_1 зазнає викривлень приблизно у **10 %** випадків, а сигнал x_2 - у **20 %**. Нехай був отриманий сигнал x_1. Яка ймовірність того, що був переданий саме цей сигнал?

Розв'язання. Нехай подія A - був отриманий сигнал x_1.
Висунемо гіпотези: H_1 - був переданий сигнал x_1; H_2 - був переданий сигнал x_2. Тоді $P(H_1)=\frac{1}{3}$, $P(H_2)=\frac{2}{3}$, $P_{H_1}(A)=\frac{9}{10}$, $P_{H_2}(A)=\frac{4}{5}$. Ймовірність отримати за даних умов сигнал x_1 за формулою повної ймовірності є

$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$. За відповідною формулою Байєса $P_A(H_1)=\dfrac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}$ ймовірність того, що був переданий саме сигнал x_1 (апостеріорна ймовірність гіпотези H_1) є

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{5}{6}}=\frac{9}{25}=0{,}36.$$

Таким чином, отримання сигналу x_1 дещо збільшує ймовірність гіпотези H_1 у порівнянні з її апріорним значенням $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Приклад 69. Ймовірність того, що витрата електроенергії протягом однієї доби не перевищить установленої норми, дорівнює $p = 0{,}75$. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрата електроенергії протягом **4** діб не перевищить норми.

Розв'язання. Ймовірність перевитрати електроенергії протягом кожної доби стала і дорівнює $q = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$. Оскільки число спроб $n = 6$ невелике, а ймовірність $p = 0{,}75$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Бернуллі $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $k = 4$:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4!2!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}297.$$

Приклад 70. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно **70** разів у **243** спробах, якщо ймовірність появи цієї події у кожній спробі стала і дорівнює **0,25**.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n = 243$ велике, а ймовірність $p = 0{,}25$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за локальною формулою Лапласа $P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$: $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = 1{,}37$, значення $\varphi(x) = \varphi(1{,}37) = 0{,}1561$ обчислюємо на калькуляторі за формулою $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ або знаходимо за таблицею у додатку 4,

$$P_{243}(70) = \frac{1}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} \cdot 0{,}1561 = 0{,}0231.$$

Приклад 71. Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює $p = 0{,}2$. Визначити ймовірність того, що зі **100** конденсаторів за час T вийдуть з ладу від **14** до **26** конденсаторів.

Розв'язання. Скористаємось інтегральною формулою Лапласа $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, у якій покладемо $n = 100$, $k_1 = 14$, $k_2 = 26$,

$p = 0{,}2, \quad q = 1 - p = 0{,}8$. Обчисливши $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{14 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}5$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{26 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 1{,}5$, за таблицею у додатку 5 знаходимо $\Phi\,(1{,}5) = 0{,}4332$. Оскільки функція $\Phi\,(x)$ непарна, то $\Phi\,(-1{,}5) = -\,0{,}4332$. Тоді $P_{100}(14{,}26) = \Phi\,(1{,}5) - \Phi\,(-1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664$.

<u>Приклад 72.</u> Проводиться **10 000** незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може появитися з імовірністю **0,0003**. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться рівно **5** разів.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n = 10\,000$ дуже велике, а ймовірність $p = 0{,}0003$ дуже мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Пуассона $P_n(k) \sim \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ при $\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0003 = 3$. Отже,

$$P_{10000}(5) = \frac{3^5 \cdot e^{-3}}{5!} = 0{,}1.$$

<u>Приклад 73.</u> Ймовірність прийому радіосигналу за певних умов дорівнює **0,75**. Скільки сигналів повинно бути передано, щоб ймовірність відхилення частоти прийнятих сигналів від ймовірності прийому не більш, ніж на **0,035**, дорівнювала **0,95**?

Розв'язання. Ймовірність того, що модуль відхилення відносної частоти $\dfrac{m}{n}$ від сталої ймовірності p не перевищує *заданого* числа $\varepsilon > 0$, є

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right).$$

Покладемо $p = 0{,}75, \quad q = 1 - p = 0{,}25, \quad \varepsilon = 0{,}035, \qquad P\left(\left| \dfrac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) = 0{,}95$.

Отримаємо рівняння $0{,}95 = 2\Phi\left(0{,}035 \cdot \sqrt{\dfrac{n}{0{,}75 \cdot 0{,}25}} \right)$ або, після невеликого перетворення, $\Phi\left(0{,}035\cdot\sqrt{\dfrac{n}{0{,}1875}}\right)=0{,}475$. За таблицею у додатку 5 знаходимо

$0{,}475=\Phi(1{,}96)$, звідки маємо $0{,}035\cdot\sqrt{\dfrac{n}{0{,}1875}}=1{,}96$.

Отже, $n=0{,}1875\cdot\left(\dfrac{1{,}96}{0{,}035}\right)^2=588$.

<u>Приклад 74.</u> Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	13	18	19	x_4	25
p_i	0,18	p_2	0,22	0,20	0,15

Знайти x_4, p_2, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо $M(X)=18{,}77$.

Розв'язання. Для відшукання p_2 використаємо умову $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$, тобто

$0{,}18+p_2+0{,}22+0{,}2+0{,}15=1$, звідки знаходимо $p_2=0{,}25$.

Тоді маємо рівняння

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i=13\cdot 0{,}18+18\cdot 0{,}25+19\cdot 0{,}22+x_4\cdot 0{,}2+25\cdot 0{,}15=18{,}77$$

або $14{,}77+0{,}2\cdot x_4=18{,}77$, звідки знаходимо $x_4=\dfrac{4}{0{,}2}=20$.

Отже, закон розподілу дискретної величини має вигляд

x_i	13	18	19	20	25
p_i	0,18	0,25	0,22	0,2	0,15

Тоді

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot p_i-[M(X)]^2==13^2\cdot 0{,}18+18^2\cdot 0{,}25+19^2\cdot 0{,}22+20^2\cdot 0{,}2+$$

$$+25^2\cdot 0{,}15-(18{,}77)^2=364{,}59-352{,}3129=12{,}28,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=3{,}50.$$

<u>Приклад 75.</u> Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 8;\\ (x-8)^3, & 8<x\le 9;\\ 1\ , & x>9.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$; в) ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[8{,}25;\ 8{,}75]$.

Розв'язання.

а) Щільність розподілу $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 8,\\ 3(x-8)^2, & 8<x\le 9,\\ 0\ , & x>9;\end{cases}$$

б) Оскільки $f(x)$ ненульова лише на проміжку $[8,9)$, то користуємось формулами $M(X)=\int\limits_a^b x\,f(x)dx$, $D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$. Отже, маємо

$$M(X)=\int\limits_8^9 x\cdot 3(x-8)^2\,dx=3\int\limits_8^9 x(x-8)^2\,dx=\left|\begin{array}{lll}x-8=t & & \\ x=t+8 & & \\ x & 8 & 9\\ t & 0 & 1\end{array}\right|=$$

$$=3\int\limits_0^1 (t+8)\,t^2dt=3\int\limits_0^1\left(t^3+8t^2\right)dt=3\left(\frac{t^4}{4}+8\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=3\left(\frac{1}{4}+\frac{8}{3}\right)=8{,}75,$$

$$D(X)=\int\limits_8^9 x^2\cdot 3(x-8)^2\,dx-[M(X)]^2=3\int\limits_8^9\left(x^4-16x^3+64x^2\right)dx-8{,}75^2=$$

$$=3\left(\frac{x^5}{5}-4x^4+\frac{64}{3}x^3\right)\Bigg|_8^9-76{,}56=\frac{383}{5}-76{,}56=0{,}04,$$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}2$;

в) ймовірність попадання неперервної випадкової величини X в заданий інтервал $(a;b)$ обчислюється за формулою $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$. Отже, в даному випадку

$$P(8{,}25 < X < 8{,}75) = F(8{,}75) - F(8{,}25) = 0{,}75^3 - 0{,}25^3 = 0{,}406.$$

<u>Приклад 76.</u> Гармата робить **4** постріли по мішені з однієї і тієї ж позиції. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює **0,8**. Скласти закон розподілу кількості влучень, знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості влучень.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X – кількість влучень у мішень. Її можливі значення: $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \; x_3 = 2, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = 4$.

Результати пострілів не залежать один від одного, ймовірність влучення при одному пострілі є сталою величиною. Це означає, що випадкова величина X розподілена за біноміальним законом.

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $\quad n = 4, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4; \quad p = 0{,}8; \quad q = 1 - p = 0{,}2.$

Обчислимо

$$P(0) = C_4^0 p^0 q^4 = (0{,}2)^4 = 0{,}0016;$$

$$P(1) = C_4^1 p q^3 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256;$$

$$P(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536;$$

$$P(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q = 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096;$$

$$P(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 0{,}8^4 = 0{,}4096.$$

Перевіримо вірність обчислень:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = 1.$$

Шуканий закон розподілу має вигляд:

x	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Математичне сподівання (середнє значення) кількості влучень $M(X) = np = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$, дисперсія $D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}64$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

<u>Приклад 77.</u> Електронний пристрій складається з **1000** елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента протягом одного року дорівнює **0,002**. Знайти імовірність того, що за рік відмовлять не менше трьох елементів.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X - число елементів, які відмовили. За законом Пуассона $P_n(k)=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

Вважаючи $n=1000,\ p=0{,}002$, одержимо $\lambda=np=1000\cdot 0{,}002=2$.

Ймовірність відмови не менш трьох елементів

$$P(X\ge 3)=\sum_{k=3}^{\infty}P(X=k)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2).$$

$$P(X=0)=P_{1000}(0)=\frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}=0{,}13534,\ P(X=1)=P_{1000}(1)=\frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}=0{,}27068,$$

$$P(X=2)=P_{1000}(2)=\frac{2^2\cdot e^{-2}}{2!}=0{,}27068.$$

Тоді $P(X\ge 3)=1-0{,}13534-2\cdot 0{,}27068=0{,}3233$.

<u>**Приклад 78.**</u> Автобуси деякого маршруту рухаються точно за розкладом. Проміжок руху **15** хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше **10** хвилин.

Розв'язання. Пасажир може підійти до зупинки у будь-який момент. Тому час очікування можна вважати випадковою величиною ***X***, яка рівномірно розподілена у інтервалі руху автобусів.

Щільність розподілу $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, де $(b-a)$ - довжина інтервалу, у якому знаходяться ймовірні значення ***X***. У даному випадку $b-a=15$, тому $f(x)=\dfrac{1}{15}$. Оскільки автобуси йдуть точно за розкладом (тобто наступний прийде не раніше означеного часу), то пасажир чекатиме його менше **10** хвилин, якщо $5<X<15$.

Ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал обчислюється за формулою $P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$, отже,

$$P(5<X<15)=\int_{5}^{15}\frac{1}{15}dx=\frac{x}{15}\Big|_5^{15}=\frac{2}{3}.$$

<u>Приклад 79.</u> Середній час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака за статистичними даними складає **200** годин. Знайти ймовірність відмови обладнання протягом **10** годин польоту.

Розв'язання. Час $\boldsymbol{T}$ безвідмовної роботи обладнання є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом $\boldsymbol{F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ 1-e^{-\lambda t}, & t>0,\end{cases}}$

де $\boldsymbol{\lambda}$ – інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу). У даному випадку $\boldsymbol{t=10,\ \lambda=\frac{1}{200}}$ і ймовірність відмови за час $\boldsymbol{t}$ буде складати $\boldsymbol{P(T<t)=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-\frac{10}{200}}=0{,}049}$.

<u>Приклад 80.</u> Найбільший поперечний діаметр заготовок деталей, що поступають в обробку, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням **5** см і середнім квадратичним відхиленням **0,3** см. Написати диференціальну функцію розподілу, побудувати її схематичний графік, вказавши його характерні точки, і знайти ймовірність того, що: а) діаметр взятої навмання заготовки буде знаходитись в межах від **4,7** до **6,2** см; б) відхилення діаметра заготовки від середнього не перевищить за абсолютною величиною **0,6** см.

Розв'язання. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – найбільший поперечний діаметр заготовки. Оскільки вона розподілена нормально, то диференціальна функція розподілу виражається формулою $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}$, де $\boldsymbol{a}$ – математичне сподівання (середнє значення), $\boldsymbol{\sigma}$ – середнє квадратичне відхилення. Функція

досягає максимуму $\boldsymbol{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}$ в точці $\boldsymbol{x=a}$, її графік має дві точки перегину $\boldsymbol{\left(a\pm\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)}$. В даному випадку $\boldsymbol{a=5}$, $\boldsymbol{\sigma=0{,}3}$. Тому

$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{0{,}3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{0{,}18}}}$, максимум $\boldsymbol{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\approx 1{,}33}$ в точці $\boldsymbol{x=5}$, точки перегину

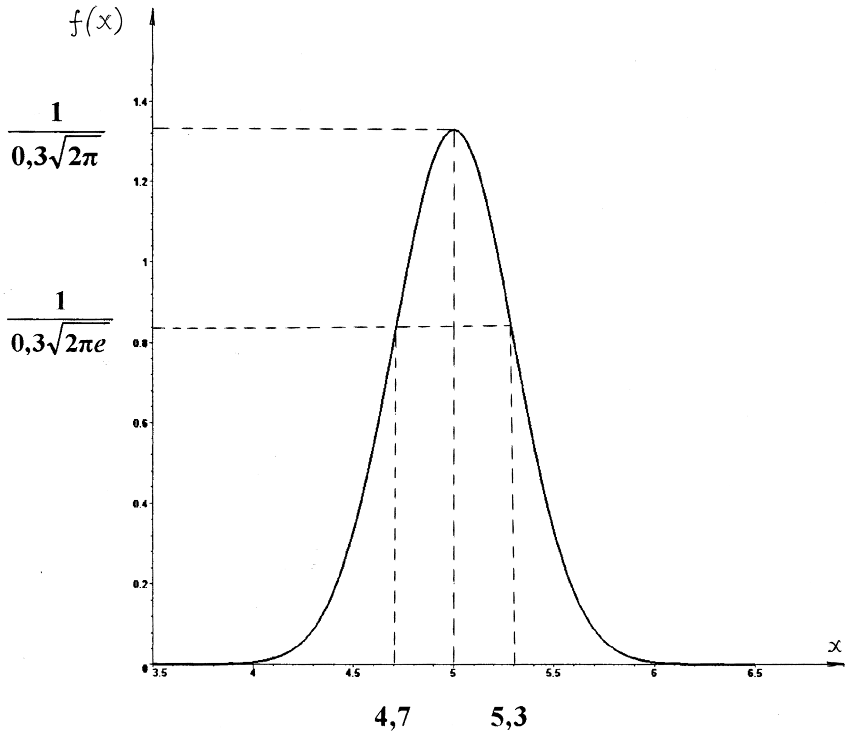

Рис. 13

$(\mathbf{4{,}7;\,0{,}81})$ й $(\mathbf{5{,}3;\,0{,}81})$. Графік функції показаний на рис. 13.

а) Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (α,β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – інтегральна функція Лапласа (її значення наведені у додатку 5).

Оскільки $\alpha = 4{,}7,\quad \beta = 6{,}2$, то маємо

$$P(4{,}7 < X < 6{,}2) = \Phi\left(\frac{6{,}2-5}{0{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{4{,}7-5}{0{,}3}\right) = \Phi(4) + \Phi(1) = 0{,}3413 + 0{,}5 = 0{,}8413;$$

б) ймовірність того, що модуль відхилення X від її математичного сподівання a не перевищить заданого числа $\delta > 0$, $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

У даному випадку $\delta = 0{,}6$, отже

$$P\left(\left|X-5\right|<0{,}6\right)=2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}3}\right)=2\Phi(2)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$$

<u>Приклад 81.</u> З результатів вимірювань границі текучості великої партії зразків деякого сорту сталі з різних плавок випадковим чином відібрані **100**. Середнє значення границі текучості у вибірці виявилося рівним $\mathbf{31{,}33\ кГ/мм^2}$. Вважаючи границю текучості випадковою величиною X, розподіленою за нормальним законом, знайти з надійністю $\gamma=0{,}95$ довірчий інтервал для середнього значення $a_Г$ границі текучості зразків усієї партії, якщо середнє квадратичне відхилення границі текучості для всієї партії відоме і складає $\mathbf{3{,}19\ кГ/мм^2}$.

Розв'язання.

За умовою задачі $n=100,\ \overline{x}_B=31{,}33,\ \gamma=0{,}95,\ \sigma_Г=3{,}19$. Довірчий інтервал для математичного сподівання $a_Г$ нормально розподіленої кількісної ознаки X генеральної сукупності при відомому середньоквадратичному відхиленні $\sigma_Г$ визначається нерівністю

$$\overline{x}_B-t\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_B+t\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}},$$

де t заходиться з умови $\Phi(t)=\dfrac{\gamma}{2}$. За таблицею у додатку 5 знаходимо $t=1{,}96$, якому відповідає значення функції Лапласа $\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{0{,}95}{2}=0{,}475$. Тоді шуканий довірчий інтервал є

$$31{,}33-\frac{1{,}96\cdot 3{,}19}{\sqrt{100}}<a<31{,}33+\frac{1{,}96\cdot 3{,}19}{\sqrt{100}} \quad \text{або} \quad 30{,}70<a<31{,}96.$$

<u>Приклад 82.</u> З генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом, витягнута вибірка:

$(x_i;\ x_{i+1})$	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240	240-260	260-280
n_i	1	4	10	14	12	6	2	1

Знайти з надійністю γ довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання, середньоквадратичного відхилення і дисперсії ознаки X генеральної сукупності.

Розв'язання. Якщо генеральне середнє квадратичне відхилення σ_Γ невідоме, але відомі вибіркова середня $\overline{x}_B$ і виправлене вибіркове значення s, то довірчий інтервал для математичного сподівання a_Γ ознаки X генеральної сукупності відшукується за допомогою розподілу Стьюдента і має вигляд

$$\overline{x}_B - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a_\Gamma < \overline{x}_B + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

де значення t_γ знаходиться з таблиці у додатку 6.

Перетворимо заданий інтервальний розподіл до дискретного вигляду за формулою $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Отримаємо

x_i^*	130	150	170	190	210	230	250	270
n_i	1	4	10	14	12	6	2	1

Об'єм вибірки $n = 50$. Обчислимо вибіркову середню:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i}{n} = \frac{1}{50}\big(130\cdot 1 + 150\cdot 4 + 170\cdot 10 + 190\cdot 14 + 210\cdot 12 + 230\cdot 6 + 250\cdot 2 + {}$$
$$+ 270\cdot 1\big) = 195{,}2.$$

Оскільки вибіркова дисперсія є

$$D_B = \overline{x_B^2} - \left(\overline{x}_B\right)^2 = \frac{1}{50}\big(130^2\cdot 1 + 150^2\cdot 4 + 170^2\cdot 10 + 190^2\cdot 14 + 210^2\cdot 12 + 230^2\cdot 6 + {}$$

$+250^2\cdot 2 + 270^2\cdot 1\big) - 195{,}2^2 = 812{,}96$, то вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 28{,}5$, виправлена вибіркова дисперсія $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{50}{49}\cdot 813 \approx 829{,}6$, а виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = \sqrt{829{,}6} \approx 28{,}8$. Значення t_γ знаходимо з таблиці у додатку 6 при $n = 50$ й $\gamma = 0{,}95$: $t_\gamma = 2{,}009$. Отже, отримуємо

$$195{,}2-\frac{2{,}009\cdot 28{,}8}{\sqrt{50}}<a_Г<195{,}2+\frac{2{,}009\cdot 28{,}8}{\sqrt{50}} \quad \text{або} \quad 187{,}0<a_Г<203{,}4;$$

На практиці довірчі інтервали для середньоквадратичного відхилення $\sigma_Г$ або дисперсії $D_Г$ доводиться будувати або при оцінованні точності вимірювальної методики і апаратури або, наприклад, при при оцінюванні технологічного розкиду деякого параметра промислової продукції.

Довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення $\sigma_Г$ ознаки X генеральної сукупності визначається нерівністю

$$s(1-q)<\sigma_Г<s(1+q),$$

де значення q знаходиться з таблиці у додатку 7. При $n=50$ й $\gamma=0{,}95$ з вказаної таблиці знаходимо $q=0{,}21$. Отже, отримуємо

$$28{,}8\cdot(1-0{,}21)<\sigma_Г<28{,}8\cdot(1+0{,}21) \quad \text{або} \quad 22{,}75<\sigma_Г<34{,}85.$$

Зауваження. Якщо $q>1$, то довірчий інтервал $0<\sigma_Г<s(1+q)$;

Довірчий інтервал для дисперсії може бути отриманий на підставі наступного міркування. Оскільки дисперсія є квадрат середнього квадратичного відхилення ($D_Г=\sigma_Г^2$), то довірчий інтервал, який покриває генеральну дисперсію з заданою надійністю γ, має вигляд

$$s^2(1-q)^2<D_Г<s^2(1+q)^2 \text{ якщо } q<1 \text{ й } 0<D_Г<s^2(1+q)^2 \text{ якщо } q>1.$$

В нашому випадку $22{,}75^2<D_Г<34{,}85^2$ або $517{,}6<D_Г<1214{,}5$.

Приклад 83. Результати обстеження **100** підприємств відносно споживання сировини X (т) і обсяга виробленої продукції Y (тис. од.) представлені у кореляційній таблиці.

Y	X					n_y
	5	**15**	**25**	**35**	**45**	
30	7	1				8
32	2	7	1			10
34	1	5	4	1		11
36		1	15	10	8	34
38			3	12	15	30
40				1	6	7
n_x	10	14	23	24	29	$n=100$

Потрібно:

а) в декартовій системі координат побудувати випадкові точки вибірки і емпіричні ламані регресії Y на X й X на Y, зробити припущення про існування і тип кореляційного зв’язку між X та Y;

б) скласти лінійні рівняння регресії Y на X й X на Y і побудувати відповідні прямі на одному кресленні;

в) оцінити адекватність лінійної моделі регресії даним таблиці за кресленням й величинам залишкового середньоквадратичного відхилення та вибіркового парного коефіцієнта кореляції.

Розв’язання.

а) При $x = 5$ ознака Y має розподіл

Y	30	32	34
n_i	7	2	1

Тому умовна середня $\overline{y}_{x=5} = \dfrac{30 \cdot 7 + 32 \cdot 2 + 34 \cdot 1}{10} = 30{,}8$.

При $x = 15$ ознака Y має розподіл

Y	30	32	34	36
n_i	1	7	5	1

Отже, $\overline{y}_{x=15} = \dfrac{30 \cdot 1 + 32 \cdot 7 + 34 \cdot 5 + 36 \cdot 1}{14} = 32{,}86$.

Аналогічно обчислюються всі умовні середні $\overline{y}_x$. В результаті отримуємо таблицю, що виражає кореляційну залежність $\overline{y}$ від от X.

X	5	15	25	35	45
$\overline{y}_x$	30,8	32,86	35,74	37,08	37,86

Оскільки при $y = 30$ ознака X має розподіл

X	5	15
n_j	7	1

то умовне середнє $\overline{x}_{y=30} = \dfrac{5\cdot 7 + 15\cdot 1}{8} = 6{,}25$.

При $y = 32$ ознака X має розподіл

X	5	15	25
n_j	2	7	1

Отже, $\overline{x}_{y=32} = \dfrac{5\cdot 2 + 15\cdot 7 + 25\cdot 1}{10} = 14$.

Аналогічно обчислюються всі умовні середні $\overline{x}_y$. В результаті отримуємо таблицю, що виражає кореляційну залежність $\overline{x}$ від от Y.

Y	30	32	34	36	38	40
$\overline{x}_y$	6,25	14	19,54	32,35	39	43,57

В прямокутній системі координат побудуємо експериментальні точки та точки $A_i\left(x_i; \overline{y}_{xi}\right)$. З'єднавши їх відрізками прямих, отримаємо емпіричну лінію регресії Y на X. Аналогічно будуємо точки $B_j\left(\overline{x}_{yj}; y_j\right)$ і емпіричну лінію регресії X на Y. Результати представлені на рис. 14. Вигляд емпіричних ліній регресії і їх розташування відносно експериментальних точок дозволяє припустити існування лінійного кореляційного зв'язку між X й Y.

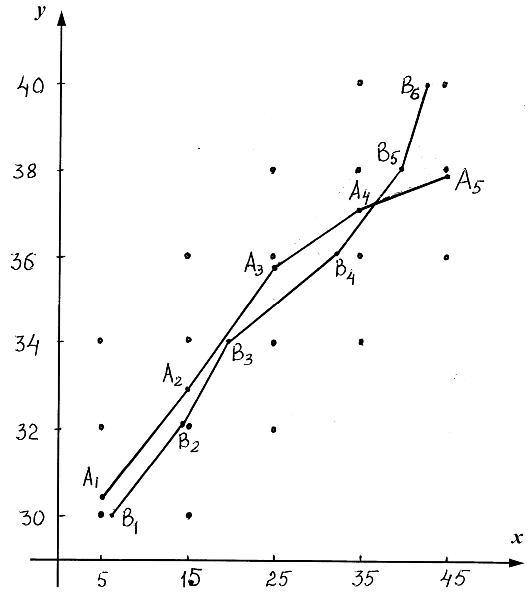

Рис. 14

б) обчислимо вибірковий парний коефіцієнт кореляції

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{n}, \ \overline{y} = \frac{\sum y_j \cdot n_j}{n}, \ \overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{n}, \ \overline{y^2} = \frac{\sum y_j^2 \cdot n_j}{n},$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum x_i y_j \cdot n_{ij}}{n}, \ \sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}, \ \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2},$$

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 10 + 15 \cdot 14 + 25 \cdot 23 + 35 \cdot 24 + 45 \cdot 29}{100} = 29{,}8,$$

$$\overline{y} = \frac{30 \cdot 8 + 32 \cdot 10 + 34 \cdot 11 + 36 \cdot 34 + 38 \cdot 30 + 40 \cdot 7}{100} = 35{,}78,$$

$$\overline{x^2} = \frac{5^2 \cdot 10 + 15^2 \cdot 14 + 25^2 \cdot 23 + 35^2 \cdot 24 + 45^2 \cdot 29}{100} = 1059,$$

$$\overline{y^2} = \frac{30^2 \cdot 8 + 32^2 \cdot 10 + 34^2 \cdot 11 + 36^2 \cdot 34 + 45^2 \cdot 30 + 40^2 \cdot 7}{100} = 1287{,}4,$$

$$\overline{xy} = \frac{30 \cdot 5 \cdot 7 + 30 \cdot 15 \cdot 1 + 32 \cdot 5 \cdot 2 + 32 \cdot 15 \cdot 7 + 32 \cdot 25 \cdot 1 + 34 \cdot 5 \cdot 1 + 34 \cdot 15 \cdot 5}{100} +$$

$$+ \frac{34 \cdot 25 \cdot 4 + 34 \cdot 35 \cdot 1 + 36 \cdot 15 \cdot 1 + 36 \cdot 25 \cdot 15 + 36 \cdot 35 \cdot 10 + 36 \cdot 45 \cdot 8 + 38 \cdot 25 \cdot 3}{100} +$$

$$+ \frac{38 \cdot 35 \cdot 12 + 38 \cdot 45 \cdot 15 + 40 \cdot 35 + 40 \cdot 45 \cdot 6}{100} = 1095{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{1059 - (29{,}8)^2} = 13{,}08, \qquad \sigma_y = \sqrt{1287{,}4 - (35{,}78)^2} = 2{,}68,$$

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1095{,}5 - 29{,}8 \cdot 35{,}78}{13{,}08 \cdot 2{,}68} = 0{,}83.$$

Підставимо знайдені значення у рівняння прямої регресії Y на X

$$y - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}).$$

Отримуємо $y - 35{,}78 = 0{,}83 \dfrac{2{,}68}{13{,}08}\left(x - 29{,}8\right)$ або $y = 0{,}17x + 30{,}71$.

Тепер підставимо знайдені значення у рівняння прямої регресії X на Y

$$x - \overline{x} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}).$$

Отримуємо $x - 29{,}8 = 0{,}83 \dfrac{13{,}08}{2{,}68}\left(y - 35{,}78\right)$ або $x = 4{,}05y - 115{,}14$.

Зауваження. Якщо у кореляційній таблиці дані інтервальні розподіли, за значення варіант беремо середини часткових інтервалів.

Зобразимо графіки прямих ліній регресії на кресленні (рис. 15). Цифрою **1** позначена пряма регресії Y на X, а цифрою **2** – пряма регресії X на Y. Як бачимо, прямі розташовані відносно одна одної так само, як і відповідні емпірічні лінії, причому обидві прямі проходять через точку $(\overline{x}, \overline{y})$ – центр регресії.

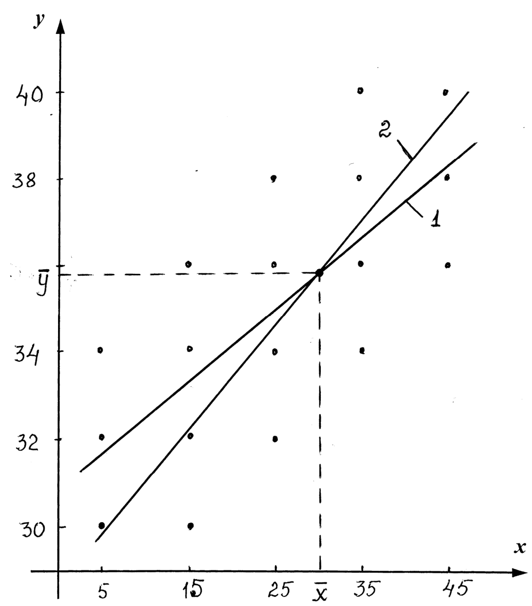

Рис. 15

Застосування умовних варіант при побудові рівнянь регресії. Оскільки значення обох ознак X і Y є рівновіддаленими, то дану задачу можна розв'язати за допомогою умовних варіант

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1},\ \nu_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

де C_1, C_2 – хибні нулі, h_1, h_2 – кроки. Так, в даному прикладі

$$C_1 = 25,\ h_1 = 10,\ u_i = \frac{x_i - 25}{10};\ C_2 = 36,\ h_2 = 2,\ \nu_j = \frac{y_j - 36}{2}.$$

Побудуємо кореляційну таблицю.

v	u					n_y
	-2	**-1**	**0**	**1**	**2**	
-3	7	1				8
-2	2	7	1			10
-1	1	5	4	1		11
0		1	15	10	8	34
1			3	12	15	30
2				1	6	7
n_x	10	14	23	24	29	$n = 100$

$$\bar{u} = \frac{-2\cdot 10\cdot 14 + 0\cdot 23 + 1\cdot 24 + 2\cdot 29}{100} = 0{,}48,$$

$$\bar{\nu} = \frac{-3\cdot 8 - 2\cdot 10 - 1\cdot 11 + 1\cdot 30 + 2\cdot 7}{100} = -0{,}11,$$

$$\overline{u^2} = \frac{4\cdot 10 + 1\cdot 14 + 1\cdot 24 + 4\cdot 29}{100} = 1{,}94;$$

$$\overline{\nu^2} = \frac{9\cdot 8 + 4\cdot 10 + 1\cdot 11 + 1\cdot 30 + 4\cdot 7}{100} = 1{,}81;$$

$$\overline{uv} = \frac{1}{100}\cdot\left[(-3)(-2)\cdot 7 + (-3)(-1)\cdot 1 + (-2)(-2)\cdot 2 + (-2)(-1)\cdot 7 + (-1)(-2)\cdot 1 +\right.$$

$$\left. + (-1)(-1)\cdot 5 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 12 + 1\cdot 2\cdot 15 + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 6\right] = 1{,}4;$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - \left(\bar{u}\right)^2} = \sqrt{1{,}94 - 0{,}2304} = 1{,}308,\ \sigma_v = \sqrt{1{,}81 - 0{,}012} = 1{,}34;$$

$$r_B = \frac{\overline{uv} - \bar{u}\cdot\bar{v}}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{1{,}4 - 0{,}48\cdot(-0{,}11)}{1{,}31\cdot 1{,}34} = 0{,}83;$$

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1 = 0{,}48\cdot 10 + 25 = 29{,}8,\ \bar{y} = \bar{v}h_2 + C_2 = -0{,}11\cdot 2 + 36 = 35{,}78,$$

$$\sigma_x = \sigma_u \cdot h_1 = 1{,}308 \cdot 10 = 13{,}08,\ \sigma_y = \sigma_v \cdot h_2 = 1{,}34 \cdot 2 = 2{,}68.$$

Підставивши отримані дані у рівняння регресії, будемо мати

$$y = 0{,}17x + 30{,}71 \quad \text{й} \quad x = 4{,}05y - 115{,}14;$$

в) креслення (подібне рис. 15), на яке нанесені експериментальні точки і прямі регресії, дає досить добре уявлення про відповідність лінійної моделі регресії даним експерименту.

На практиці тіснота (сила) кореляційного зв'язку оцінюється за допомогою вибіркового коефіцієнта кореляції. При $r_B = 0$ лінійного кореляційного зв'язку між ознаками не існує (однак при цьому може бути нелінійний кореляційний зв'язок і навіть нелінійна функціональна залежність). Якщо ж $|r_B| = 1$, то обидві прямі регресії зливаються у одну пряму, тобто усі експериментальні точки лежать на прямій регресії. Це випадок жорсткої лінійної залежності між випадковими величинами в межах проведених експериментів. Таким чином, чим ближче за модулем коефіцієнт лінійної кореляції до одиниці, тим тісніша лінійна залежність між випадковими величинами; наближення ж коефіцієнта кореляції до нуля веде к ослабленню лінійної залежності.

Про тісноту зв'язку можна судити за значенням коефіцієнта кореляції, використовуючи шкалу Чеддока (див. додаток 8). В даному випадку $r_B = 0{,}83$, що за шкалою Чеддока свідчить про високу кореляційну залежність між X і Y.

Про якість лінійної апроксимації свідчить також порівняння залишкового середнього квадратичного відхилення σ_3 з σ_x й σ_y. Обчислимо його:

$$\sigma_3 = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{n-2}(1 - r_B^2)} = \sqrt{\frac{100}{100-2}(1 - 0{,}83^2)} = 0{,}56.$$

Як бачимо, залишкове середнє квадратичне відхилення σ_3 достатньо мале у порівнянні з $\sigma_x = 13{,}08$ та $\sigma_y = 2{,}68$, що додатково свідчить про адекватність обраної лінійної моделі регресії експериментальним даним.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1.

Задані матриці $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$.

1) знайти матрицю $\boldsymbol{Y}$ з рівняння $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CB}$;

2) розв'язати за формулами Крамера систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}, \quad \text{де } \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ -5\\ 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & -4 & 2\\ 4 & -3 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 5 & 6 & -4\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3\\ 8\\ -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & -4 & 9\\ 8 & 2 & -5\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & -5 & 4\\ 2 & 7 & 0\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ -5\\ 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 0 & 3\\ 8 & 4 & -2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Завдання 2.

Задані координати вершин трикутника ABC. Знайти:

1) довжину сторони AB;
2) загальні рівняння прямих AB і AC, нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;
3) напрямний вектор та канонічне рівняння прямої AE, яка містить медіану трикутника ABC;
4) загальне рівняння висоти CD та її довжину;
5) рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно прямій AC;
6) зробити креслення.

1. $A(10;-2), B(-2;7), C(8;12)$. 2. $A(11;-5), B(-1;4), C(15;17)$.

3. $A(14;-4), B(2;5), C(18;18)$. 4. $A(13;-9), B(1;0), C(17;13)$.

5. $A(3;-3), B(-9;6), C(7;19)$. 6. $A(12;-7), B(0;2), C(16;15)$.

7. $A(0;-10), B(-12;-1), C(4;12)$. 8. $A(4;-12), B(-8;-3), C(8;10)$.

9. $A(7;0), B(-5;9), C(5;14)$. 10. $A(12;-6), B(0;3), C(10;8)$.

Завдання 3.

1. Скласти рівняння кола, центр якого знаходиться у точці перетину з віссю Oy прямої $2x-4y+8=0$, а радіус дорівнює відстані між директрисами еліпса $4x^2+9y^2=36$. Побудувати.

2. Написати канонічне рівняння гіперболи, що проходить через точку $M\left(12;3\sqrt{3}\right)$, якщо відомі рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\frac{x}{2}$. Побудувати гіперболу.

3. Написати канонічне рівняння еліпса, що проходить через точку $M\left(-2;\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$, якщо ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{3}{4}$. Побудувати еліпс.

4. Скласти рівняння кола, центр якого співпадає з правою вершиною гіперболи $4x^2-9y^2=36$, а радіус дорівнює відстані між фокусами. Побудувати.

5. Скласти рівняння параболи та її директриси, якщо відомо, що парабола симетрична відносно осі Oy та проходить через точки перетину кола $x^2+y^2+4y=0$ з прямою $x+y=0$. Побудувати.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Oy, симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$, а відстань між директрисами дорівнює $\frac{36}{5}$. Побудувати.

7. Скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки $M_1\left(2\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ та $M_2\left(2;\sqrt{3}\right)$. Побудувати еліпс, знайти його ексцентриситет та рівняння директрис.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що вона проходить через дві точки $M_1\left(3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ та $M_2\left(-3\sqrt{3};2\sqrt{2}\right)$. Побудувати гіперболу, знайти її ексцентриситет та рівняння директрис.

9. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, якщо відомо, що фокус параболи співпадає з правим фокусом еліпса $16x^2+20y^2=320$, а директриса проходить через лівий фокус еліпса. Побудувати.

10. Записати канонічне рівняння гіперболи, дійсна вісь якої дорівнює великій осі еліпса $4x^2+25y^2=100$, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{74}}{5}$. Побудувати.

Завдання 4. Знайти границі за правилом Лопіталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$; б) $\lim\limits_{x\to1+0}\ln x\ln(x-1)$; в) $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin 2x)^{ctgx}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{\sin^2(2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to1/3}\left(\frac{3}{3x-1}-\frac{1}{\ln(3x)}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}(ctgx)^{\sin x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-arctgx}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)ctg(x-2)$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{ctgx}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{4}{x}\right)^x$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\cos x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)ctgx$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)^{\frac{1}{\ln(2x-2)}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{x}{ctgx}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{7}{6x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{tgx}-1}{tgx-x}$; б) $\lim\limits_{x\to0+}(x\ln x)$; в) $\lim\limits_{x\to0}(tgx)^{\sqrt{x}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{4}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\pi}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}(\ln ctgx)^{tgx}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4^{1/x}-1\right)x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

Завдання 5. Знайти швидкість зміни скалярного поля $u=u(x,y,z)$ в точці M_0 за напрямком до точки M_1. Визначити напрямок та величину найбільшої швидкості зростання поля в точці M_0.

1. $u(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$, $M_0(1,-1,2)$, $M_1(3,4,-1)$.
2. $u(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $M_0(-1,2,1)$, $M_1(3,1,-1)$.
3. $u(x,y,z)=ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(0,0,0)$, $M_1(3,-4,2)$.
4. $u(x,y,z)=\ln(xy+yz+zx)$, $M_0(-2,3,-1)$, $M_1(2,1,-3)$.
5. $u(x,y,z)=xe^y+ye^x-z^2$, $M_0(3,0,2)$, $M_1(4,1,3)$.
6. $u(x,y,z)=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(1,2,2)$, $M_1(-3,2,-1)$.
7. $u(x,y,z)=e^{x-yz}$, $M_0(1,0,3)$, $M_1(2,-4,5)$.
8. $u(x,y,z)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{x}$, $M_0(-1,1,1)$, $M_1(2,3,4)$.
9. $u(x,y,z)=(x-y)^z$, $M_0(1,5,0)$, $M_1(3,7,-2)$.
10. $u(x,y,z)=\ln(x^3+y^3+z+1)$, $M_0(1,3,0)$, $M_1(-4,1,3)$.

Завдання 6. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність.

1. а) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\ln^2 x\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2x+3)^2}$.

2. а) $\displaystyle\int_0^{5}\frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$; б) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^3}dx$.

3. а) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

4. а) $\int\limits_{0}^{1/4} \arcsin 2x\, dx$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

5. а) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(2x+3)^3}$.

6. а) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$; б) $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

7. а) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x\, dx$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

8. а) $\int\limits_{0}^{\pi/2} x \cos 2x\, dx$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin ax\, dx$.

9. а) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x\, dx$; б) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{x\, dx}{1+x^4}$.

10. а) $\int\limits_{0}^{2} x\, arctg \frac{x}{2} dx$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Завдання 7. Обчислити подвійний та криволінійний інтеграли.

1. а) $\iint\limits_{D} xydxdy$, $D:\ y=x,\ y=2,\ y=0$;

б) $\int\limits_{L} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де $L-$ відрізок прямої між точками $O(0;0)$ й $A(1;2)$.

2. а) $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, $D:\ y=x,\ x+y=2,\ y=0$;

б) $\int\limits_{AB} (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, де $AB-$ дуга параболи $y=x^2$ між точками $A(-1;1)$ й $B(1;1)$.

3. а) $\iint\limits_D (2x-y)dxdy$, $D:\ x=1,\ x=2,\ y=x,\ y=x^2$;

б) $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, де $L-$ відрізок прямої між точками $A(-1;0)$ й $B(0;1)$.

4. а) $\iint\limits_D (3x+y)dxdy$, $D:\ y=2x,\ x+y=3,\ x=0$;

б) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{5}(2x+y)}$, де $L-$ відрізок прямої між точками $A(0;4)$ й $B(4;0)$.

5. а) $\iint\limits_D x^2ydxdy$, $D:\ y=x^2,\ x+y=2$;

б) $\int\limits_{OBA} 2xydx-x^2dy$, де $OBA-$ ламана: $O(0;0)$, $A(2;1)$, $B(2;0)$.

6. а) $\iint\limits_D ydxdy$, $D:\ y=x,\ y=5x,\ x=1$;

б) $\int\limits_{AB} (x^2+y^2)dx+xydy$, де $L-$ відрізок прямої між точками $A(1;1)$ й $B(3;4)$.

7. а) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, $D:\ x=2,\ y=x,\ xy=1$;

б) $\int\limits_L ydl$, де $L-$ дуга параболи $y^2=\frac{2}{3}x$ між точками $O(0;0)$ й $B\left(\frac{35}{6};\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$.

8. а) $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, $D:\ y=2-x^2,\ y=2x-1$;

б) $\int\limits_{AB} \frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, де $AB-$ відрізок прямої між точками $A(1;2)$ й $B(3;6)$.

9. а) $\iint\limits_D xydxdy$, $D:\ y=x^2,\ y=2x$;

б) $\oint\limits_{ABOA} (x+y)dl$, де $ABOA-$ контур трикутника з вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$.

10. а) $\iint\limits_D xydxdy$, $D:\ y=x,\ y=0,\ x=5$;

б) $\int\limits_{AB} xydx+(y-x)dy$, де $AB-$ дуга кубічної параболи $y=x^3$ між точками $A(0;0)$ й $B(1;1)$.

Завдання 8. З'ясувати, чи буде задане векторне поле а) соленоїдним; б) потенціальним.

1. а) $\vec{a}=x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}+2xyz\vec{k}$;

б) $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

2. а) $\vec{a}=(yz-2x)\vec{i}+(xz+2y)\vec{j}+xy\vec{k}$;

б) $\vec{a}=6xy\vec{i}+(3x^2-2y)\vec{j}+z\vec{k}$.

3. а) $\vec{a}=(x^2-z^2)\vec{i}-3xy\vec{j}+(y^2+z^2)\vec{k}$;

б) $\vec{a}=(2x-yz)\vec{i}+(2x-xy)\vec{j}+yz\vec{k}$.

4. а) $\vec{a}=2xyz\vec{i}-y(yz+1)\vec{j}+z\vec{k}$;

б) $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+3xyz\vec{j}+(z-x)\vec{k}$.

5. а) $\vec{a}=(2x-3y)\vec{i}+2xy\vec{j}-z^2\vec{k}$;

б) $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$.

6. а) $\vec{a} = (x^2 - y^2)\,\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + (z^2 - x^2)\vec{k}$;

б) $\vec{a} = (x + y)\,\vec{i} - 2xz\,\vec{j} - 3(y + z)\vec{k}$.

7. а) $\vec{a} = yz\,\vec{i} + (x - y)\vec{j} + z^2\,\vec{k}$;

б) $\vec{a} = z^2\,\vec{i} + (xz + y)\vec{j} + x^2 y\vec{k}$.

8. а) $\vec{a} = (y + z)\,\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$;

б) $\vec{a} = xy(3x - 4y)\,\vec{i} + x^2(x - 4y)\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$.

9. а) $\vec{a} = 3x^2 y\,\vec{i} - 2xy^2\,\vec{j} - 2xyz\vec{k}$;

б) $\vec{a} = 3(x - z)\,\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + 3z\vec{k}$.

10. а) $\vec{a} = (x + y)\,\vec{i} - 2(y + z)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$;

б) $\vec{a} = (2x - yz)\,\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + 2xyz\vec{k}$.

Завдання 9. Обчислити інтеграл.

1. $\int\limits_L |z|^2 dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + 2i$.

2. $\int\limits_L (z^2 - z)dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$.

3. $\int\limits_L (2i - z)dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

4. $\int\limits_L (iz^2 + 2z)dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

5. $\int\limits_L (z^2 - 3iz)dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$.

6. $\int\limits_L \mathbf{Re}\, z\, dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$.

7. $\int\limits_L \mathbf{Im}\, z\, dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

8. $\int\limits_L (iz + 3) dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 2 + 2i$.

9. $\int\limits_L \left| z - \bar{z} \right|^2 dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

10. $\int\limits_L (2z + \bar{z})\, dz$, де L - відрізок прямої від точки $z_1 = i$ до точки $z_2 = 1$.

Завдання 10. З'ясувати характер збіжності або довести розбіжність рядів.

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 1}{5^n (n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n} \right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8} \right)^n \left(\frac{1}{n} \right)^7$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(arctg \frac{1}{2n+1} \right)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot tg \frac{\pi}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+2))^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)\, 3^n}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^{3n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot ... (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot ... \cdot (2n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 8}{3n^2 - 2} \right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n 2^n}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{n} n^{7}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\frac{1}{5^{n}}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n}}{n^{4}}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n+1}}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\,\frac{\pi}{5^{n}}\right)^{3n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{3^{n}}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{5^{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(\ln(n+1))^{n}}$.

Завдання 11. Розв’язати рівняння.

1. а) $e^{x+3y}dy = xdx$; б) $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$; в) $y' + y = x\sqrt{y}$.

2. а) $e^{-x^{2}}dy + x\sec^{2} y dx = 0$; б) $\left(y^{2}-3x^{2}\right)dy + 2xydx = 0$;

в) $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x}\sec^{2} ydy$.

3. а) $y' = (2x-1)\,ctgy$; б) $(x+2y)\,dx - xdy = 0$; в) $y' + 2y = y^{2}e^{x}$.

4. а) $\sec^{2} xtgydy = -\sec^{2} ytgxdx$; б) $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$;

в) $y' = y^{4}\cos x + ytgx$.

5. а) $\left(1+e^{x}\right)ydy - e^{y}dx = 0$; б) $\left(y^{2}-2xy\right)dx + x^{2}dy = 0$;

в) $xydy = \left(y^{2}+x\right)dx$.

6. а) $x\left(y^{2}+3\right)dx = e^{x}ydy$; б) $y^{2} + x^{2}y' = xyy'$; в) $xy' + 2y + x^{5}y^{3}e^{x} = 0$.

7. а) $y' = (2x+1)\,tgy$; б) $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$; в) $y'x^{3}\sin y = xy' - 2y$.

8. а) $\sin y\cos xdy - \cos y\sin xdx = 0$; б) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$; в) $\left(2x^{2}y\ln y - x\right)y' = y$.

9. а) $\left(1+e^{x}\right)ydy - e^{y}dx = 0$; б) $xy' + y(\ln y - \ln x - 1) = 0$;

в) $2y' = xy^{-1} + \frac{xy}{x^{2}-1}$.

10. а) $e^x \sin y dx + tgy dy = 0$; б) $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$; в) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Завдання 12. Розв'язати задачу Коші.

1. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0$.
2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$.
3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.
4. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$.
5. $y'' - 14y' + 53y = 53x^2 + 25x + 39,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 12$.
6. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = -2$.
7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.
8. $y'' - 3y' + 2y = -7\cos x - \sin x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 7$.
9. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 2$.
10. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$.

Завдання 13. За допомогою перетворення Лапласа розв'язати задачу Коші.

1. $\ddot{x} + x = 2\cos t, \quad x(0) = -1, \quad \dot{x}(0) = 1$.
2. $\ddot{x} + 4x = 2\sin 2t, \quad x(0) = -1, \quad \dot{x}(0) = 0$.
3. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = \sin 3t + 6\cos 3t, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1$.
4. $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = te^t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$.
5. $\ddot{x} + x = 6e^{-t}, \quad x(0) = 3, \quad \dot{x}(0) = 1$.
6. $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 2t, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1$.
7. $\ddot{x} - 9x = \sin t - \cos t, \quad x(0) = -3, \quad \dot{x}(0) = 2$.
8. $\ddot{x} + \dot{x} + x = t^2 + 2t, \quad x(0) = 4, \quad \dot{x}(0) = -2$.

9. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^{t}\cos\dfrac{t}{2}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$.

10. $\ddot{x} + 4x = 4e^{2t} + 4t^{2}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2$.

Завдання 14. Скласти ряд розподілу вказаної випадкової величини X і знайти її функцію розподілу $F(x)$, обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

1. На шляху вершника **4** перешкоди, які він може подолати з імовірностями відповідно $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}5$. Випадкова величина X – число подоланих перешкод.

2. Імовірність безвідмовної роботи впродовж гарантійного терміну для приладів першого типу дорівнює **0,9**, для приладів другого типу – **0,7**, для приладів третього типу – **0,8**. Випадкова величина X – число приладів, які безвідмовно пропрацювали гарантійний термін, серед трьох приладів різних типів.

3. В урні міститься **6** куль, **4** з яких – білі. Навмання взято одразу **3** кулі. Випадкова величина X – число білих куль серед узятих.

4. При усталеному технологічному процесі підприємство випускає **2/3** виробів вищого гатунку і **1/3** першого гатунку. Випадкова величина X – число виробів вищого гатунку з чотирьох, взятих навмання.

5. З **20** деталей, серед яких **5** нестандартних, для перевірки якості навмання відібрані **4** деталі. Випадкова величина X – число нестандартних деталей серед відібраних.

6. За статистичними даними хоча б одна пожежа, яка потребує виїзду пожежної команди, за даний період часу може виникнути у трьох районах міста відповідно з імовірностями $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$. Випадкова величина X – число районів, у які за даний період пожежна команда виїжджала хоча б один раз (хибні виклики не враховуються).

7. Гра полягає в накиданні кілець на кілочок. Два гравці отримують по **4** кільця і одночасно кидають по одному з цих кілець до першого влучення на кілочок. Ймовірність влучення при одному кидку для першого гравця складає **0,2**, а для другого – **0,3**. Випадкова величина X – кількість зроблених кидків.

8. Прилад комплектується з двох вузлів, імовірності браку яких становлять відповідно **0,1** та **0,05**. Прилад вважається бракованим, якщо бракований хоча б один з його вузлів. Навмання відібрані **4** прилади. Випадкова величина X – число бракованих приладів серед відібраних.

9. Гральну кістку кидають **3** рази. Випадкова величина X – число випадінь шістки.

10. На спортивних змаганнях за жеребом з **10** юнаків та **5** дівчат відбирають **3** членів суддівської бригади. Випадкова величина X – число дівчат серед відібраних.

Завдання 15. За заданою кореляційною таблицею

а) в декартовій системі координат побудувати випадкові точки вибірки і емпіричні ламані лінії регресії Y на X й X на Y, зробити припущення про існування і тип кореляційного зв’язку між X та Y;

б) скласти лінійні рівняння регресії Y на X й X на Y і побудувати їх графіки на одному кресленні;

в) оцінити адекватність лінійної моделі регресії даним таблиці за кресленням й величинам вибіркового парного коефіцієнта кореляції та залишкового середнього квадратичного відхилення.

1.

Y	X						n_y
	12	**17**	**22**	**27**	**32**	**37**	
25	2	4					**6**
35		6	3				**9**
45			6	35	4		**45**
55			2	8	6		**16**
65				14	7	3	**24**
n_x	**2**	**10**	**11**	**57**	**17**	**3**	$n = 100$

2.

Y	X					n_y
	20-30	**30-40**	**40-50**	**50-60**	**60-70**	
50-80	5	4				**9**
80-110		12	8	1		**21**
110-140			5	5		**10**
140-170			4	7		**11**
170-200				2	1	**3**
200-230					1	**1**
n_x	**5**	**16**	**17**	**15**	**2**	$n = 55$

3.

Y	X					n_y
	1-1,5	**1,5-2**	**2-2,5**	**2,5-3**	**3-3,5**	
5-10	2	1				**3**
10-15	3	4	3	1		**11**
15-20		5	10	8		**23**
20-25			1	6	1	**8**
25-30				1	4	**5**
n_x	**5**	**10**	**14**	**16**	**5**	$n = 50$

4.

Y	X					n_y
	20	**30**	**40**	**50**	**60**	
1	8	2				**10**
3	12	20	8			**40**
5			10	1		**11**
7			9	6	2	**17**
9			10	4	8	**22**
n_x	**20**	**22**	**37**	**11**	**10**	$n = 100$

5.

Y	X					n_y
	320-370	**370-420**	**420-470**	**470-520**	**520-570**	
5-20	2	3				**5**

20-35	1	6	7	1		**15**
35-50		3	10	9	2	**24**
50-65			5	4	6	**15**
65-80			2	3	1	**6**
n_x	**3**	**12**	**24**	**17**	**9**	$n = 65$

6.

Y	X					n_y
	2-4	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**	
30-70	3	4				**7**
70-110		9	8	1		**18**
110-150			5	4	1	**10**
150-190			4	7	2	**13**
190-230				1	1	**2**
n_x	**3**	**13**	**17**	**13**	**4**	$n = 50$

7.

Y	X						n_y
	5	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	
45	2	4					**6**
55		3	5				**8**
65			5	35	5		**45**
75			2	8	17		**27**
85				4	7	3	**14**
n_x	**2**	**7**	**12**	**47**	**29**	**3**	$n = 100$

8.

Y	X					n_y
	0,4-1,4	**1,4-2,4**	**2,4-3,4**	**3,4-4,4**	**4,4-5,4**	
4-6				2	6	**8**
6-8			4	7	4	**15**
8-10	1	1	7	5		**14**
10-12	2	4	1			**7**
12-14	3	3				**6**
n_x	**6**	**8**	**12**	**14**	**10**	$n = 50$

9.

Y	**X**					n_y
	9	**11**	**13**	**15**	**17**	
8	2	6				**8**
9		4	7	4		**15**
10		5	7	1	1	**14**
11			2	4	1	**7**
12				3	3	**6**
n_x	**2**	**15**	**16**	**12**	**5**	$n = 50$

10.

Y	**X**					n_y
	0-2	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**	
0-0,2	2	2				**4**
0,2-0,4	2	7	10			**19**
0,4-0,6		2	17	7		**26**
0,6-0,8			4	3	2	**9**
0,8-1,0					2	**2**
n_x	**4**	**11**	**31**	**10**	**4**	$n = 60$

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАННЯ І ПЕРЕВІРКА

Номер варіанта контрольної роботи, що виконується, повинен співпадати з ДВОМА останніми цифрами номера залікової книжки. Номери задач з кожного завдання вибираються з таблиці, наведеної нижче.

Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв’язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв’язком кожної задачі треба повністю виписати її умову. На обкладинку зошита слід наклеїти заповнений реєстраційний бланк (вказати номер контрольної роботи, назву дисципліни, групу і факультет, прізвище, ім'я та по батькові, номер залікової книжки, домашню адресу). Оформлена належним чином робота реєструється у деканаті. Її необхідно подати на кафедру вищої математики завчасно, але не пізніше як за 10 днів до початку екзаменаційної сесії. Після перевірки викладач робить висновок про те, вірно чи невірно виконана робота, з відповідним надписом на обкладинці. Якщо робота виконана не повністю або невірно, то викладач вказує номери відсутніх або невірно розв’язаних задач і, якщо необхідно, робить свої зауваження у вигляді короткої рецензії. Роботи з не усіма задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважаються виконаними невірно. Студент повинен виправити *усі* помилки у тому ж зошиті *після* рецензії викладача у розділі “Робота над помилками” і повернути роботу у найкоротший термін. Виправлення у перевіреній роботі поверх позначок викладача не допускаються. Студент може бути допущений до захисту контрольної роботи, порядок якого визначається викладачем, тільки після повторної перевірки виправлених помилок. На екзамен (залік) допускаються тільки студенти з захищеною роботою.

СКЛАД ВАРІАНТІВ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Номер варіанта	Завд. 1	Завд. 2	Завд. 3	Завд. 4	Завд. 5	Завд. 6	Завд. 7	Завд. 8	Завд. 9	Завд. 10	Завд. 11	Завд. 12	Завд. 13	Завд. 14	Завд. 15
00	6	6	4	5	6	1	6	4	5	6	3	2	2	4	6
01	4	7	3	9	10	6	4	2	9	10	4	8	6	5	1
02	3	4	9	6	5	7	3	9	6	5	5	9	7	9	6

03	9	3	8	1	1	4	9	8	1	1	6	7	4	6	7
04	1	10	10	3	3	5	1	10	3	3	7	1	3	1	4
05	10	2	2	2	9	3	10	3	2	9	10	5	10	3	5
06	2	8	1	8	2	10	2	1	8	2	8	4	2	2	3
07	8	9	7	4	8	2	8	7	4	8	9	3	8	8	10
08	7	5	6	7	7	8	7	6	7	7	2	10	9	4	2
09	5	1	5	10	4	9	5	5	10	4	1	6	5	7	8
10	4	10	7	3	3	4	3	7	3	3	1	10	1	10	9
11	1	2	1	7	5	6	2	1	7	5	2	8	10	3	4
12	9	9	5	1	1	5	9	5	1	1	9	7	2	7	6
13	7	7	3	4	7	9	7	3	4	7	5	4	9	1	5
14	5	6	2	10	10	8	6	2	10	10	6	6	7	4	9
15	8	4	10	8	6	7	4	10	8	6	7	9	6	10	8
16	6	8	4	5	8	10	8	4	5	8	3	1	4	8	7
17	10	3	6	2	4	2	10	6	2	4	8	5	8	5	10
18	3	5	9	9	9	1	5	9	9	9	4	3	3	2	2
19	2	1	8	6	2	3	1	8	6	2	10	2	5	9	1
20	5	6	6	8	5	10	6	6	10	5	8	6	1	6	3
21	2	9	9	2	3	7	9	9	2	3	6	7	6	8	10
22	9	2	2	9	4	6	2	2	9	4	9	10	9	2	7
23	4	7	7	4	7	4	7	7	4	7	7	1	2	9	6
24	1	10	10	1	9	1	10	10	1	9	10	9	7	4	4
25	6	5	5	7	6	2	5	5	7	8	5	8	10	1	1
26	7	4	4	6	2	3	4	4	6	2	4	2	5	7	2
27	8	3	3	5	8	5	3	3	5	6	3	3	4	6	3
28	3	8	8	3	1	8	8	8	3	1	2	5	3	5	5
29	10	1	1	10	10	9	1	1	8	10	1	4	8	3	8
30	5	6	6	1	5	4	6	6	1	5	4	7	1	10	9
31	4	5	5	2	10	6	5	5	2	10	5	1	6	1	4
32	7	10	8	6	6	5	10	8	6	6	1	10	5	2	6
33	3	4	4	3	1	10	4	4	3	1	10	6	10	6	5
34	9	9	10	9	3	7	9	10	9	3	3	9	4	3	10
35	6	7	7	5	8	3	7	7	5	8	2	8	9	9	7
36	2	1	2	8	7	2	1	2	8	7	6	2	7	5	3
37	10	8	9	10	4	8	8	9	10	4	7	5	1	8	2
38	1	2	3	4	2	9	2	3	4	2	8	4	8	10	8
39	8	3	1	7	9	1	3	1	7	9	9	3	2	4	9
40	6	4	7	4	7	1	4	7	4	7	4	9	3	7	1
41	5	10	5	3	10	9	10	5	3	10	2	6	4	4	1
42	2	3	8	7	6	4	3	8	7	8	7	1	10	3	9
43	10	7	4	2	1	8	7	4	2	1	10	3	3	7	4
44	1	5	9	8	5	3	5	9	8	5	6	2	7	2	8
45	4	2	3	5	2	5	2	3	5	2	5	4	5	8	3
46	3	6	6	10	4	2	6	6	10	4	9	10	2	5	5
47	8	8	2	6	8	7	8	2	6	6	3	5	6	10	2
48	9	1	10	9	3	6	1	10	9	3	8	7	8	6	7
49	7	9	1	1	9	10	9	1	1	9	1	8	1	9	6
50	10	2	1	7	8	3	2	1	7	8	5	6	9	1	10
51	9	8	2	8	1	4	8	2	8	1	9	4	2	7	3

52	8	9	3	6	6	5	9	3	6	6	6	3	8	8	4
53	7	7	5	5	5	6	7	5	5	5	1	9	9	6	5
54	1	1	10	9	4	7	1	10	9	4	3	1	7	5	6
55	5	5	6	3	9	10	5	6	3	9	2	10	1	9	7
56	4	4	7	2	3	8	4	7	2	3	8	2	5	3	10
57	3	3	8	1	10	9	3	8	1	10	4	8	4	2	8
58	2	10	9	10	7	2	10	9	10	7	7	7	3	1	9
59	6	6	4	4	2	1	6	4	4	2	10	5	10	10	2
60	9	10	1	5	8	1	10	1	5	8	3	3	6	4	1
61	3	8	4	7	7	2	8	4	7	7	7	2	10	5	1
62	5	7	7	3	10	9	7	7	3	10	1	9	8	7	2
63	6	4	2	9	4	5	4	2	9	4	4	7	7	3	9
64	8	6	5	1	3	6	6	5	1	3	10	6	4	9	5
65	10	9	9	8	2	7	9	6	8	2	8	4	6	1	6
66	7	1	3	6	6	3	1	3	6	6	5	8	9	8	7
67	4	5	6	2	1	8	5	9	2	1	2	10	1	6	3
68	1	3	10	4	5	4	3	10	4	5	9	5	5	2	8
69	2	2	8	10	9	10	2	8	10	9	6	1	3	4	4
70	10	6	7	2	6	8	6	7	2	6	8	6	2	10	10
71	6	7	6	9	1	6	7	6	9	1	2	9	6	2	8
72	7	10	2	6	7	9	10	2	6	7	9	2	7	9	6
73	1	1	9	5	5	7	1	9	5	5	4	7	10	6	9
74	9	9	3	4	8	10	9	3	4	8	1	10	1	5	7
75	8	8	4	3	10	5	8	4	3	10	7	5	9	4	10
76	2	2	10	8	2	4	2	10	8	2	6	4	8	3	5
77	3	3	8	10	4	3	3	8	10	4	5	3	2	8	4
78	5	5	5	1	3	2	5	5	1	3	3	8	3	10	3
79	4	4	1	7	9	1	4	1	7	9	10	1	5	1	2
80	8	7	1	6	6	4	7	1	6	6	1	6	4	7	1
81	10	1	3	7	8	5	1	3	7	8	2	5	7	6	4
82	6	10	4	3	3	1	10	4	3	3	6	10	1	7	5
83	9	6	2	8	7	10	6	2	8	7	3	4	10	3	1
84	5	9	5	9	10	3	9	5	9	10	9	9	6	8	10
85	7	8	7	10	9	2	8	7	10	9	5	7	9	9	3
86	1	2	10	5	5	6	2	10	5	5	8	1	8	10	2
87	3	5	8	1	1	7	3	8	1	1	10	8	2	5	6
88	4	4	6	2	4	8	5	6	2	4	4	2	5	1	7
89	2	3	9	4	2	9	4	9	4	2	7	3	4	2	8
90	8	9	8	8	4	4	9	8	8	4	4	4	3	4	9
91	4	6	1	4	2	2	6	1	4	2	3	10	9	8	4
92	10	1	9	6	7	7	1	9	6	7	7	3	6	4	2
93	3	3	7	1	10	10	3	7	1	10	2	7	1	6	7
94	7	2	3	5	6	6	2	3	5	6	8	5	3	1	10
95	5	4	2	7	5	5	4	2	7	5	5	2	2	5	6
96	6	10	6	10	9	9	10	6	10	9	10	6	4	7	5
97	1	5	10	2	3	3	5	10	2	3	6	8	10	10	9
98	2	7	5	3	8	8	7	5	3	8	9	1	5	2	3
99	9	8	4	9	1	1	8	4	9	1	1	9	7	3	8

ДОДАТКИ

Додаток 1

ЗОБРАЖЕННЯ ОСНОВНИХ ОРИГІНАЛІВ

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ
Одинична функція Хевісайда $\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
e^t	$\frac{1}{p-1}$
$\sin t$	$\frac{1}{p^2+1}$
$\cos t$	$\frac{p}{p^2+1}$
$sh\,t$	$\frac{1}{p^2-1}$
$ch\,t$	$\frac{p}{p^2-1}$

Додаток 2

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ

Лінійність	
$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_i(p)$
Подібність	
$f(\alpha t) \quad (\forall\alpha>0)$	$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (\forall\alpha>0)$
Зокрема, e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$sh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$ch(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
Зміщення	
$e^{-\alpha t}f(t) \quad (\forall\alpha)$	$F(p+\alpha) \quad (\forall\alpha)$
Зокрема, $e^{-bt}\sin t$	$\frac{1}{(p+b)^2+1}$
$e^{-bt}\cos t$	$\frac{p+b}{(p+b)^2+1}$
Запізнювання	
$f(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0) \quad (\forall t_0>0)$	$e^{-t_0 p}F(p) \quad (\forall t_0>0)$
Зокрема, $\eta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0,\\ 1, & t\ge t_0\end{cases}$ ***(узагальнена одинична функція)***	$e^{-t_0 p}\cdot\frac{1}{p}$
Диференціювання оригіналу	

$f(t)$	$F(p)$
$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
$f''(t)$	$p^2F(p)-p\,f(0)-f'(0)$
$f'''(t)$	$p^3F(p)-p^2f(0)-p\,f'(0)-f''(0)$
……………………………………….. $f^{(n)}(t)$	……………………………………………. $p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0)$, $f^{(i)}(0)=\lim\limits_{t\to 0+0}f^{(i)}(t)\quad(i=0,1,...,n-1)$
Інтегрування оригіналу	
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
Диференціювання зображення	
$f(t)$	$F(p)$
$t\cdot f(t)$	$-F'(p)$
$t^2f(t)$	$F''(p)$
$t^3f(t)$	$-F'''(p)$
……………………………………….. $t^nf(t)$	……………………………………………. $(-1)^nF^{(n)}(p)$
Зокрема, t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Інтегрування зображення	
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty}F(q)dq$

Зокрема, $\dfrac{\sin t}{t}$	$\dfrac{\pi}{2} - arctg\ p$
Згортка	
$f(t)*g(t) = g(t)*f(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$	
Теорема Бореля	
$f(t)*g(t)$	$F(p)\cdot G(p)$
Інтеграли Дюамеля	
$\int_0^t f(\tau)\cdot g'(t-\tau)d\tau + f(t)\cdot g(0)$ $\int_0^t g'(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau + f(t)\cdot g(0)$ $\int_0^t g(\tau)\cdot f'(t-\tau)d\tau + f(0)\cdot g(t)$ $\int_0^t f'(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau + f(0)\cdot g(t)$	$p\cdot F(p)\cdot G(p)$

Додаток 3

ОРИГІНАЛИ ДЕЯКИХ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

ЗОБРАЖЕННЯ	ОРИГІНАЛ
$\dfrac{1}{p(p+a)}$	$\dfrac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$
$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\left(ae^{-at}-be^{-bt}\right)$
$\dfrac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}

$\dfrac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)\,e^{-at}$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)}$	$\dfrac{1}{a^2}\left(e^{-at}+at-1\right)$
$\dfrac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{ab(a-b)}\left(a-b+be^{-at}-ae^{-bt}\right)$
$\dfrac{1}{p(p+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}\left[1-e^{-at}(1+at)\right]$
$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}-(b-a)te^{-bt}\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2}\left[-ae^{-at}+a+b(b-a)te^{-bt}\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)^3}$	$te^{-at}\left(1+\dfrac{a}{2}t\right)$
$\dfrac{p^2}{(p+a)^3}$	$e^{-at}\left(1-2at+\dfrac{a^2}{2}t^2\right)$
$\dfrac{1}{p[(p+b)^2+a^2]}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-bt}\left(\cos(at)+\dfrac{b}{a}\sin(at)\right)\right]$
$\dfrac{1}{p(p^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}[1-\cos(at)]$
$\dfrac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\sin^2(at)$
$\dfrac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\cos^2(at)$
$\dfrac{1}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[e^{-at}+\dfrac{a}{b}\sin(bt)-\cos(bt)\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[-ae^{-at}+a\cos(bt)+b\sin(bt)\right]$
$\dfrac{p^2}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[a^2e^{-at}-ab\sin(bt)+b^2\cos(bt)\right]$
$\dfrac{1}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}\cos(ct)+\right.$ $\left.+\dfrac{a-b}{c}e^{-bt}\sin(ct)\right]$

$\dfrac{p}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\Big[-ae^{-at}+ae^{-bt}\cos(ct)-$ $-\dfrac{ab-b^2-c^2}{c}e^{-bt}\sin(ct)\Big]$
$\dfrac{p^2}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\Big[a^2e^{-at}+[(a-b)^2+c^2-a^2]\,e^{-bt}\cdot$ $\cdot\cos(ct)-\left\{ac+b\left(c-\dfrac{(a-b)b}{c}\right)\right\}e^{-bt}\sin(ct)\Big]$
$\dfrac{1}{p^3(p+a)}$	$\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^2}t+\dfrac{1}{2a}t^2-\dfrac{1}{a^3}e^{-at}$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)(p+b)}$	$-\dfrac{a+b}{a^2b^2}+\dfrac{1}{ab}t+\dfrac{1}{a^2(b-a)}e^{-at}+\dfrac{1}{b^2(a-b)}e^{-bt}$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}t\left(1+e^{-at}\right)+\dfrac{2}{a^3}\left(e^{-at}-1\right)$
$\dfrac{1}{(p+a)^2(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(a-b)^2}\left[e^{-at}\left(t+\dfrac{2}{a-b}\right)+e^{-bt}\left(t-\dfrac{2}{a-b}\right)\right]$
$\dfrac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-\dfrac{1}{b}\sin(bt)\right]$
$\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}[\cos(at)-\cos(bt)]$
$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}[-a\sin(at)+b\sin(bt)]$
$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}[-a^2\cos(at)+b^2\cos(bt)]$
$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^2}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}t\sin(at)$
$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}[\sin(at)+at\cos(at)]$
$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cdot\cos(at)$
$\dfrac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$	$t\cdot sh(at)$

$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$	$t\cdot ch(at)$
$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2}\left[\,2\cos(at)-at\sin(at)\right]$
$\dfrac{1}{[(p+b)^2+a^2]^2}$	$\dfrac{1}{2a^2}e^{-bt}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\dfrac{1}{p^2(p^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}\left[t-\dfrac{1}{a}\sin(at)\right]$
$\dfrac{a(p^2+a^2-b^2)}{[p^2+(a-b)^2][p^2+(a+b)^2]}$	$\sin(at)\cdot\cos(bt)$

Додаток 4

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,3989**	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	**0,2420**	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	**0,0540**	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290

2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	**0,0044**	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0008	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 5

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,00000**	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	**0,34134**	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	**0,47725**	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158

2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	**0,49865**									
3,1	49903									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	**0,49977**									
3,6	49984									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	**0,499968**									
4,5	**0,499997**									
5,0	**0,49999997**									

Додаток 6

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ розподілу Стьюдента

n	**γ**			***n***	**γ**		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	460	861	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	**40**	2,023	2,708	3,555
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,646	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	**∞**	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 7

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$ розподілу χ^2

n	γ			*n*	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Додаток 8

Шкала Чеддока

Показник тісноти зв'язку (значення модуля коефіцієнта кореляції)	**0,1 - 0,3**	**0,3 - 0,5**	**0,5 - 0,7**	**0,7 - 0,9**	**0,9 - 0,99**
Характеристика сили кореляційного зв'язку	слабка	помірна	помітна	висока	дуже висока