МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

А.В. ПАВЛЕНКО, І.В. ЩЕРБИНА,
І.В. ПАСІЧНИК, Т.П. БАС

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 27.01.2014

Дніпропетровськ НМетАУ 2014

УДК 517(07)
Вища математика. Частина 1: Навч. посібник / А.В. Павленко, І.В. Щербина, І.В. Пасічник, Т.П. Бас. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2014. – 84 с.

Наведені докладні теоретичні відомості до вивчення розділів «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри», «Пряма лінія на площині», «Вступ до математичного аналізу. Границі функцій», «Похідна функції». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів напряму 6.050402 – ливарне виробництво.

Іл. 10. Бібліогр.: 5 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (ДВНЗ НГУ)
А.В. Сясєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ЗМІСТ

ВСТУП

Оновлення програми для студентів напряму «Ливарне виробництво», і особливо, зменшення часів аудиторних занять передбачає новий підхід до викладання матеріалу з дисципліни «Вища математика».

Даний посібник дозволяє студентам не тільки отримати необхідну кількість інформації, але і поглибити та поширити знання, що були ними засвоєні на лекціях та практичних заняттях.

Посібник складено згідно з робочою програмою дисципліни, матеріал подається у звичній для студентів формі – спочатку теорія, а потім практичні завдання. Кожна частина посібника відповідає матеріалу дисципліни однієї чверті аудиторних занять, що робить посібник більш зручним у використанні.

Автори посібника сподіваються, що ця робота буде корисною для кожного студента.

ЛЕКЦІЯ 1. МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ. ВЕКТОРИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

1.1. Елементи лінійної алгебри

1.1.1. Матриці

Числовою матрицею називається прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків та n стовпців, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці. Якщо $m = n$, то матриця називається ***квадратною***. Сукупність елементів a_{ii} складає головну діагональ квадратної матриці. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матриця називається ***нуль-матрицею***, та позначається

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо всі елементи квадратної матриці, окрім розташованих на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця називається ***діагональною***. Діагональна матриця, у якої всі елементи $a_{ii} = 1$, називається одиничною:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця може складатися з одного рядка або з одного стовпця.

Матрицю, яку одержують із матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями, називають ***транспонованою***. Дві матриці називаються ***рівними***, якщо вони мають однакову кількість рядків та стовпців, а їх відповідні елементи співпадають.

<u>Лінійні операції над матрицями</u>. ***<u>Додавання.</u>*** Цю операцію можна використовувати тільки для матриць однакового розміру. Для того, щоб додати дві матриці, треба додати їх відповідні елементи.

<u>Множення на число</u>. Для того, щоб помножити матрицю $\boldsymbol{A}$ на число λ, треба кожен елемент матриці $\boldsymbol{A}$ помножити на це число.

Властивості лінійних операцій:

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;
3. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;
4. $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;
5. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;
6. $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$.

<u>Множення матриць.</u> Матриці $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ можна перемножити лише у тому випадку, коли кількість стовпців матриці $\boldsymbol{A}$ співпадає з кількістю рядків матриці $\boldsymbol{B}$. Матриця-результат $\boldsymbol{C}$ буде мати стільки рядків, скільки у матриці $\boldsymbol{A}$ і стільки стовпців, скільки у матриці $\boldsymbol{B}$. Кожен елемент матриці $\boldsymbol{C}$ буде обчислюватися за формулою: $\boldsymbol{c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$.

Властивості операції множення:

1. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$;
2. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$;
3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$;
4. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;
5. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;
6. $(\lambda\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\lambda(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$.

Приклад 1.1. Знайти $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, якщо $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{3\cdot 4+2\cdot 5} & \mathbf{3\cdot 6+2\cdot(-2)} \\ \mathbf{-1\cdot 4+4\cdot 5} & \mathbf{-1\cdot 6+4\cdot(-2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{22} & \mathbf{14} \\ \mathbf{16} & \mathbf{-14} \end{pmatrix}$.

1.1.2. Визначники

Кожна квадратна матриця має числову характеристику, яка називається визначником, та позначається

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначником n-го порядку називається число, що дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка або стовпця на їх алгебраїчні доповнення.

Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} називається визначник на порядок менший, ніж даний, який отриманий шляхом викреслювання i-того рядка та j-го стовпця визначника Δ, та помножений на число $(-1)^{i+j}$.

Наприклад, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$,

або

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.2. Обчислити $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-7) = 3 + 28 = 31.$

Властивості визначників:

1. Якщо будь-який рядок (стовпець) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.

2. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпця), то він дорівнює нулю.

3. Якщо у визначнику два рядки (стовпця) поміняти місцями, то знак визначника зміниться на протилежний.

4. Якщо у визначнику рядки і стовпці поміняти місцями, то значення визначника не зміниться.

5. Якщо у визначнику є два пропорційні рядки (стовпця), то він дорівнює нулю.

6. Якщо один з рядків (стовпців) визначника є лінійною комбінацією будь-яких інших, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо до будь-якого рядка (стовпця) визначника додати другий рядок (стовпець) помножений на будь-яке число, що відмінне від нуля, то значення визначника не зміниться.

1.1.3. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка складається з n рівнянь та має n невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

Тут a_{ij} є коефіцієнтами при невідомих, x_j - невідомими, b_i - вільними членами.

Якщо всі $b_i = 0$, то система (1.1) називається ***однорідною***, в протилежному випадку – ***неоднорідною***.

Розв'язком системи (1.1) називається впорядкований набір чисел, які при підстановці в систему кожне рівняння перетворюють на тотожність. Система може мати один, жодного або нескінченну множину розв'язків. Якщо система лінійних алгебраїчних рівнянь має принаймні один розв'язок – вона називається ***сумісною***, в протилежному випадку – ***несумісною***.

Визначником системи є визначник, що складається з коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

Теорема. Якщо визначник (1.2) $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок і притому тільки один.

Цей розв'язок можна знайти різними методами. Наприклад, за формулами **Крамера**:

$$x_j = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta}, \tag{1.3}$$

де Δ_{x_j} отримано із Δ шляхом заміни j-го стовпця визначника Δ стовпцем вільних членів.

Приклад 1.3. Розв'язати систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0, \\ 4x + y = 16. \end{cases}$$

Розв'язання. $\begin{cases} 2x - 3y = -6, \\ 4x + y = 16. \end{cases}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) = 14$,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 1 - 16 \cdot (-3) = 42$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 2 \cdot 16 - 4 \cdot (-6) = 56$.

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3$, $\quad x = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{56}{14} = 3 = 4$.

1.2. Вектори

1.2.1. Основні поняття. Лінійні операції

У природі зустрічаються величини, які характеризуються тільки числовим значенням. Вони називаються скалярними. До таких величин відносяться маса, температура, шлях, робота, час, період, частота, щільність, енергія, обсяг, електроємність тощо.

Скаляри є алгебраїчними величинами і з ними можна проводити будь-які алгебраїчні дії: додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня і т. д. А бувають величини, що характеризуються числовим значенням і напрямком, такі як сила, швидкість, прискорення, напруга тощо. Ці величини називаються ***векторними*** або ***векторами***. Довжина вектора називається його ***модулем*** або ***абсолютною величиною***.

Вектор позначається графічно відрізком прямої, на якому ставиться стрілка, що вказує напрямок вектора (рис.1.1).

Рис.1.1

Будемо позначати вектор двома або однією літерою з рискою над ними, наприклад, $\overline{AB}$, де A - початок і B - кінець вектора або $\overline{a}$. Модуль вектора позначається $\left|\overline{AB}\right|$ чи $\left|\overline{a}\right|$.

Вектор дорівнює нулю, якщо його модуль дорівнює нулю (коли кінець вектора співпадає з його початком). Такий вектор називається ***нульовим***, він не має напрямку.

Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються ***рівними***, якщо: 1) рівні їх модулі; 2) вони паралельні; 3) спрямовані в одну і ту ж сторону.

Два вектори з рівними модулями, що лежать на паралельних прямих, але протилежно спрямовані, називаються ***протилежними***. Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначається через $-\overline{a}$.

Два вектори, що лежать на паралельних прямих, незалежно від того, спрямовані вони однаково або протилежно, називаються ***колінеарними***.

Три вектори, що розташовані на одній площині або на паралельних площинах називаються ***компланарними***.

Одиничним вектором, або ***ортом даного вектора***, називається вектор, що збігається за напрямком з даним вектором і має модуль, що дорівнює одиниці, та позначається $\overline{a}^{0}$.

Лінійні операції над векторами: 1) додавання (віднімання); 2) множення вектора на число.

Додавання векторних величин здійснюється двома способами.

За правилом паралелограма: сумою двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, приведених до спільного початку, є третій вектор $\overline{c}$, довжина якого дорівнює довжині діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, а спрямований він від точки A до точки B (рис. 1.2) :

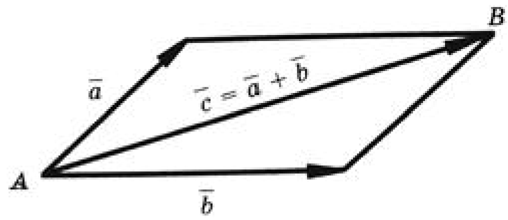


Рис.1.2

За правилом трикутника: нехай є довільні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Треба від кінця вектора $\bar{a}$ відкласти вектор, що дорівнює вектору $\bar{b}$. Тоді вектор, початок якого збігається з початком вектора $\bar{a}$, а кінець співпадає з кінцем вектора $\bar{b}$, буде сумою $\bar{a} + \bar{b}$ (рис. 1.3).

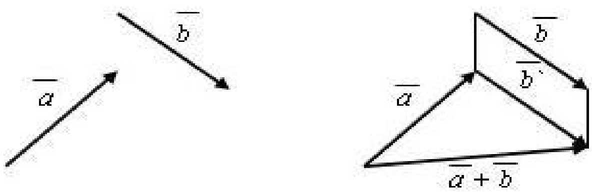


Рис.1.3

За таким же правилом будується і сума будь-якого числа векторів (рис.1.4).

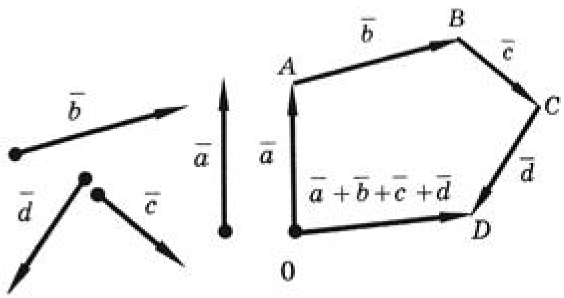


Рис.1.4

Для того, щоб від вектора $\bar{a}$ відняти вектор $\bar{b}$, треба до вектора $\bar{a}$ додати вектор, протилежний вектору $\bar{b}$, тобто $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + \left(-\bar{b}\right)$.

Множення вектора на число. При множенні вектора $\bar{a}$ на число k отримаємо вектор $\bar{b}$, модуль якого дорівнює модулю вектора $\bar{a}$, помноженому на k, тобто $\left|\bar{b}\right| = k\left|\bar{a}\right|$. Напрями векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ збігаються, якщо $k > 0$ і протилежні, якщо $k < 0$.

<u>Проекція точки, проекція вектора.</u> ***Проекцією точки*** M на вісь l називається основа перпендикуляра, що опущений з цієї точки на вісь l.

Проекцією вектора $\bar{a}$ на вісь l називається довжина відрізка $A'B'$, який розташовано між проекціями кінця і початку вектора AB на цю вісь. Цій довжині приписується знак плюс, якщо напрямок відрізка $A'B'$ збігається з напрямком осі, і знак мінус, якщо його напрямок є протилежним напрямку осі.

Проекція вектора на вісь є скалярна величина, що дорівнює добутку модуля проектованого вектора на косинус кута між позитивними напрямками осі і вектора (рис.1.5): $np_l \ \bar{a} = |\bar{a}| \cos\varphi$.

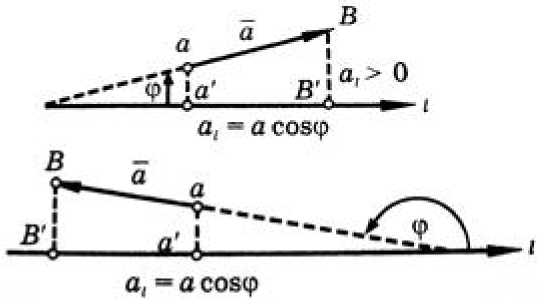


Рис.1.5

1.2.2. Лінійна залежність та незалежність векторів. Базис. Система координат

Система векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ називається ***лінійно незалежною***, якщо рівність

$$\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n = 0 \qquad (1.4)$$

виконується тільки у тому випадку, коли всі числа $\alpha_i = 0$.

Якщо в рівнянні (1.4) хоча б один з коефіцієнтів $\alpha_i \neq 0$, то система векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ називається ***лінійно залежною***. В цьому випадку будь-який вектор системи можна представити як лінійну комбінацію інших.

Базисом системи векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m$ називається така підсистема $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ $(n < m)$, яка задовольняє наступним умовам:

а) система векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ є лінійно незалежною;

б) будь-який інший вектор системи можна лінійно виразити через вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

<u>Теорема 1.</u> В двомірному просторі (на площині) будь-які два не колінеарних вектори будуть лінійно незалежними.

<u>Теорема 2.</u> В тримірному просторі будь-які три не компланарних вектори будуть лінійно незалежними.

<u>Теорема 3.</u> В тримірному просторі будь-які чотири вектори будуть лінійно залежними.

Декартовою прямокутною системою координат у тримірному просторі називається сукупність трьох взаємно перпендикулярних осей X, Y, Z та точки O (початок координат).

Координатами точки називаються проекції цієї точки на відповідні вісі та позначаються $M(x, y, z)$. Координата x називається абсцисою точки $M(x, y, z)$, координата y - ординатою, координата z - аплікатою. Відстань між точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ визначається за формулою

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad . \tag{1.5}$$

Базисом в декартовій прямокутній тримірній системі координат є три одиничні вектори $\bar{i}, \bar{j}$ та $\bar{k}$, які направлені по осях Ox, Oy, Oz відповідно. Будь-який вектор $\bar{a}$ можна розкласти по векторах базису за формулою

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \quad . \tag{1.6}$$

Якщо точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ є початком вектора $\overline{M_1M_2}$, а точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - його кінець, то для того, щоб знайти координати вектора $\overline{M_1M_2}$ треба від координат його кінця відняти координати його початку:

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1 ; y_2 - y_1 ; z_2 - z_1) = (a_x ; a_y ; a_z) \quad . \tag{1.7}$$

$\left|\overline{M_1M_2}\right| = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ - довжина вектора $\bar{a}$.

Приклад 3. Знайти координати та довжину вектора $\overline{M_1M_2}$, якщо $M_1(-3;2;4)$ $M_2(1;6;-2)$.

Розв'язання. $\overline{M_1M_2} = (1 - (-3); 6 - 2; -2 - 4) = (4;4;-6)$.

$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{68}$.

Радіус-вектором точки $M(x, y, z)$ називається вектор $\overline{OM}(x, y, z)$, а косинуси кутів між радіус-вектором та осями Ox, Oy, Oz - напрямними косинусами та позначаються відповідно $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \quad (1.8)$$

З формул (1.8) випливає, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

<u>Лінійні операції над векторами, що задані в координатній формі, і деякі властивості векторів.</u> Якщо вектори задані у координатній формі $\overline{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\overline{b}(b_x; b_y; b_z)$, то

1. $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$ - додавання (віднімання);
2. $\lambda\overline{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$ - множення на число;
3. $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \quad a_x = b_x; \quad a_y = b_y; \quad a_z = b_z$ - рівність двох векторів;
4. $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ - умова колінеарності двох векторів.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1
ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЦЬ ТА ВИЗНАЧНИКІВ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Матриці. Визначники. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Крамера

Приклад 1. Знайти $3A + 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $3A + 2B = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 6 & -12 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 18 & 9 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти $A\cdot B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 5\cdot 4-1\cdot(-1)+2\cdot(-2) & 5\cdot 0-1\cdot 2+2\cdot 4 & 5\cdot 3-1\cdot 5+2\cdot 3 \\ 3\cdot 4+5\cdot(-1)+7\cdot(-2) & 3\cdot 0+5\cdot 2+7\cdot 4 & 3\cdot 3+5\cdot 5+7\cdot 3 \\ -2\cdot 4+1\cdot(-1)+1\cdot(-2) & -2\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot 4 & -2\cdot 3+1\cdot 5+1\cdot 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 20+1-4 & -2+8 & 15-5+6 \\ 12-5-14 & 10+28 & 9+25+21 \\ -8-1-2 & 2+4 & -6+5+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 6 & 16 \\ -7 & 38 & 55 \\ -11 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти x із рівняння $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $2X=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$,

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти визначник, розкривши його за елементами першого рядка. Довести, що будь-який інший спосіб обчислення не впливає на значення визначника: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Обчислимо визначник, розкривши його за елементами першого рядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$

$= (-2 \cdot 1 - 2 \cdot 4) - 2(5 \cdot 1 - 3 \cdot 4) + 3(5 \cdot 2 - 3 \cdot (-2)) = 52$.

2 спосіб. Обчислимо визначник, користуючись його властивостями:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 4 \\ 8 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (1): \textit{II рядок} + \textit{I рядок} \\ \textit{II рядок} + \textit{III рядок} \end{bmatrix} =$$

$= -2(6 \cdot 5 - 8 \cdot 7) = -2(30 - 56) = 52$.

Отже, визначник завжди дорівнює якомусь одному числу, у який би спосіб його не обчислювати.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} -6 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язання. Обчислимо визначник, розкривши його за елементами І-го рядка.

$$\begin{vmatrix} -6 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x+10 & 1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x+10 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -6(-1 - 3) - x(2 - 3(x + 10)) - x(2 + x + 10) = 2x^2 + 16x + 24$.

Отже, $2x^2 + 16x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 12 = 0$.

За теоремою Вієта $x_1 = -2$; $x_2 = -6$.

Приклад 6. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Крамера: $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник системи Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}0&0&-1\\-1&6&-2\\11&-6&4\end{vmatrix}==-1\cdot\begin{vmatrix}-1&6\\11&-6\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}(1):\ \textit{III стовпець}\times 2+\textit{I стовпець};\\ \qquad \textit{III стовпець}\times(-1)+\textit{II стовпець}.\end{array}\right]=-1(-1(-6)-6\cdot 11)=60.$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}4&-1&-1\\11&4&-2\\11&-2&4\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}\begin{vmatrix}0&0&-1\\3&6&-2\\27&-6&4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}3&6\\27&-6\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}(2):\ \textit{III стовпець}\times 4+\textit{I стовпець};\\ \qquad \textit{III стовпець}\times(-1)+\textit{II стовпець}.\end{array}\right]=-(3(-6)-27\cdot 6)=180;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&4&-1\\3&11&-2\\3&11&4\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}\begin{vmatrix}0&0&-1\\-1&3&-2\\11&27&4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-1&3\\11&27\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}(3):\ \textit{III стовпець}\times 2+\textit{I стовпець};\\ \qquad \textit{III стовпець}\times 4+\textit{II стовпець}.\end{array}\right]=-3\begin{vmatrix}-1&1\\11&9\end{vmatrix}=-3(-1\cdot 9-11\cdot 1)=60.$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&4&11\\3&-2&11\end{vmatrix}\overset{(4)}{=}\begin{vmatrix}0&-1&0\\11&4&27\\-1&-2&3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}11&27\\-1&3\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}(4):\ \textit{II стовпець}\times 2+\textit{I стовпець};\\ \qquad \textit{II стовпець}\times 4+\textit{III стовпець}.\end{array}\right]=3\begin{vmatrix}11&9\\-1&1\end{vmatrix}=3(11\cdot 1-(-1)9)=60.$$

Тоді $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{180}{60}=3$; $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{60}{60}=1$; $z=\dfrac{\Delta z}{\Delta}=\dfrac{60}{60}=1$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix}2&x+2&-1\\1&1&-2\\5&-3&x\end{vmatrix}>\begin{vmatrix}1&-2&3\\5&4&1\\-3&-8&5\end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначники, що знаходяться у лівій та правій частині нерівності окремо:

$$\begin{vmatrix}2&x+2&-1\\1&1&-2\\5&-3&x\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\-3&x\end{vmatrix}-(x+2)\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\5&x\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\5&-3\end{vmatrix}=$$

$$= 2(x-6) - (x+2)(x+10) - (-3-5) = x^2 - 10x - 24;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -3 & -8 & 5 \end{vmatrix} =^{(1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 14 & -14 \\ -3 & -14 & 14 \end{vmatrix} =$$

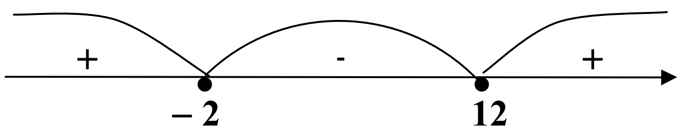
$$= \left[\begin{array}{l} (1): \textit{ I стовпець} \times 2 + \textit{II стовпець;} \\ \qquad \textit{I стовпець} \times (-3) + \textit{III стовпець.} \end{array} \right] = 1 \cdot \begin{vmatrix} 14 & -14 \\ -14 & 14 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, маємо: $x^2 - 10x - 24 > 0$.

Якщо $x^2 - 10x - 24 = 0$, то $D = (-10)^2 - 4 \cdot 1(-24) = 196$;

$x_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{196}}{2}$; $\quad x_1 = 12$; $\quad x_2 = -2$.

Тоді $x^2 - 10x - 24 = (x-12)(x+2) > 0$.



Отже, $x \in (-\infty; -2) \cup (12; +\infty)$.

Вектори. Дії над ними

Приклад 8. Знайти координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ та їх довжину, якщо $A(3;5;-1)$, $B(4;2;2)$ і $C(-1;5;3)$.

Розв'язання. $\overline{AB}\,(4-3; 2-5; 2-(-1)) = (1; -3; 3)$;

$\overline{AC}\,(-1-3; 5-5; 3-(-1)) = (-4; 0; 4)$.

$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{19}$; $\quad |\overline{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{32}$.

Приклад 9. Дано дві координати вектора $\overline{a}$: $a_y = 4$; $a_z = 12$. Визначити a_x, якщо $|\overline{a}| = 13$.

Розв'язання. Оскільки $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, то маємо:

$13 = \sqrt{a_x^2 + 4^2 + 12^2}$, або $169 = a_x^2 + 160$. Тоді $a_x^2 = 9 \Rightarrow a_x = \pm 3$.

Приклад 10. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$, якщо $A(3;2-5)$ та $B(4;7;3)$.

Розв'язання. Маємо $\overline{AB}\,(4-3;7-2;3-(-5))=(1;5;8)$.

Отже, за формулами (1.8) отримаємо:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1^2+5^2+8^2}}=\frac{1}{\sqrt{90}};$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\frac{5}{\sqrt{90}};\qquad \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\frac{8}{\sqrt{90}}.$$

Приклад 11. Знайти координати вектора $\overline{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з осями Ox, Oy, Oz відповідно, та його довжина: $\alpha=45^\circ$; $\beta=60^\circ$; $\gamma=120^\circ$; $|\overline{a}|=8$.

Розв'язання. Оскільки $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\overline{a}|}$; $\cos\beta=\frac{a_y}{|\overline{a}|}$; $\cos\gamma=\frac{a_z}{|\overline{a}|}$, то

$$a_x=|\overline{a}|\cdot\cos\alpha=8\cdot\cos 45^\circ=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2};$$

$$a_y=|\overline{a}|\cdot\cos\beta=8\cdot\cos 60^\circ=8\cdot\frac{1}{2}=4;$$

$$a_z=|\overline{a}|\cdot\cos\gamma=8\cdot\cos 120^\circ=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-4.$$

Отже, $\overline{a}\,(4\sqrt{2};4;-4)$.

Приклад 12. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\overline{a}\,(\alpha;5;-1)$ та $\overline{b}\,(4;\beta;2)$ будуть колінеарні.

Розв'язання. Умова колінеарності двох векторів в координатній формі:

$$\frac{a_x}{a_y}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

Тоді $\frac{\alpha}{4}=\frac{5}{\beta}=-\frac{1}{2}$, або $\frac{\alpha}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=-2$; $\frac{5}{\beta}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\beta=-10$.

Приклад 13. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо: $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}$; $\overline{b} = \overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$.

Розв'язання. Позначимо діагоналі паралелограма $\overline{d_1}$ і $\overline{d_2}$.

Відомо, що $\overline{d_1} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{d_2} = \overline{a} - \overline{b}$.

Отже, $\overline{d_1}\,(2+1;-3+3;4-2) = (3;0;2)$;

$\overline{d_2}\,(2-1;-3-3;4-(-2)) = (1;-6;6)$.

Тоді $\left|\overline{d_1}\right| = \sqrt{3^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{13}$; $\left|\overline{d_2}\right| = \sqrt{1^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{73}$.

Приклад 14. Знайти орт вектора $\overline{a} = (2;-6;3)$.

Розв'язання. Орт вектора $\overline{a}$, тобто $\overline{a^0}$ має одиничну довжину, а напрямок його співпадає з напрямком $\overline{a}$, тобто $\overline{a}$ і $\overline{a^0}$ - колінеарні, тоді $\left|\overline{a}\right| = \lambda \cdot \left|\overline{a^0}\right| = \lambda$.

Отже, $a_x = \lambda a_x^0 \Rightarrow a_x^0 = \dfrac{a_x}{\lambda} = \dfrac{a_x}{\left|\overline{a}\right|}$; $a_y = \lambda a_y^0 \Rightarrow a_y^0 = \dfrac{a_y}{\lambda} = \dfrac{a_y}{\left|\overline{a}\right|}$;

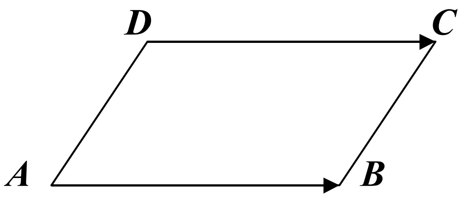
$a_z = \lambda a_z^0 \Rightarrow a_z^0 = \dfrac{a_z}{\lambda} = \dfrac{a_z}{\left|\overline{a}\right|}$.

Маємо: $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$.

Тоді $a_x^0 = \dfrac{2}{7}$; $a_y^0 = -\dfrac{6}{7}$; $a_z^0 = \dfrac{3}{7}$.

Приклад 15. Дано три вершини паралелограма $A(2;-1;5)$, $B(4;-3;2)$, $C(3;2;-1)$. Знайти четверту вершину D, яка протилежна до B.

Розв'язання. Нехай точка D має координати $(x;y;z)$.



Оскільки $ABCD$ - паралелограм, то $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Тоді $\overline{AB}\,(4-2;-3-(-1);2-5)=(2;-2;-3)$; $\overline{DC}\,(3-x;2-y;-1-z)$.

Отже $\begin{cases} 3-x=2; \\ 2-y=-2; \\ -1-z=-3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1; \\ y=4; \\ z=2. \end{cases}$

Отже ми отримали $D(1;4;2)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти $5A-2B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Знайти $A\cdot B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти x із рівняння $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}+4X=\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Знайти визначник, розкривши його по елементам першого рядка. Довести, що будь-який інший спосіб обчислення не впливає на значення визначника: $\Delta=\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

5. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-8 \\ x+y-3z=-6 \\ 2x+4y+z=13 \end{cases}.$$

6. Знайти координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ та їх довжину, якщо $A(2;5;8)$, $B(9;-1;7)$ і $C(0;3;5)$.

7. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$, якщо $A(3;8;2)$ та $B(0;7;3)$.

8. Знайти координати вектора $\overline{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з осями Ox, Oy, Oz, відповідно, та його довжина: $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 135^\circ$; $\gamma = 120^\circ$; $|\overline{a}| = 12$.

9. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\overline{a}(4;\alpha;-1)$ та $\overline{b}(\beta;-12;2)$ будуть колінеарні.

10. Знайти довжини діагоналей та сторін паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо: $\overline{a} = 8\overline{i} - 4\overline{j} + 1\overline{k}$; $\overline{b} = \overline{i} + 8\overline{j} - 7\overline{k}$.

11. Знайти координати вектора, направленого протилежно вектору $\overline{a}(1;4;3)$, якщо він має довжину, що дорівнює 4.

12. Перевірити, чи буде чотирикутник $ABCD$ трапецією, якщо $A(3;2;5)$, $B(4;1;7)$, $C(3;8;4)$, $D(5;6;8)$.

ЛЕКЦІЯ 2. СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

2.1. Добутки векторів

2.1.1. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\left(\overline{a} \hat{;} \overline{b}\right). \qquad (2.1)$$

Звідси випливає, що скалярний добуток двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ - це добуток модуля одного з них на проекцію другого на напрям першого вектора:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot np_a\, b = np_b \overline{a} \cdot |\overline{b}|. \qquad (2.2)$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$;

2. $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$;

3. $\lambda \overline{a} \cdot \overline{b} = \lambda\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)$;

4. $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \iff \overline{a} \perp \overline{b}$, якщо $\overline{a} \neq 0$ і $\overline{b} \neq 0$.

5. Якщо вектори задані у координатній формі $\overline{a}(a_x;a_y;a_z)$, $\overline{b}(b_x;b_y;b_z)$, то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (2.3)$$

Доведення:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k})\cdot(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k})=a_xb_x\overline{i}\cdot\overline{i}+a_yb_y\overline{j}\cdot\overline{j}+a_zb_z\overline{k}\cdot\overline{k}+$$
$$+a_yb_x\overline{j}\cdot\overline{i}+a_xb_y\overline{i}\cdot\overline{j}+a_xb_z\overline{i}\cdot\overline{k}+a_zb_x\overline{k}\cdot\overline{i}+\overline{a}_yb_z\overline{j}\cdot\overline{k}+a_zb_y\overline{k}\cdot\overline{j}=$$
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

6. $\cos(\overline{a}\hat{;}\overline{b})=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$;

7. $\text{пр.}_{\overline{b}}\ \overline{a}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$;

8. $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|^2$;

9. $\overline{i}\cdot\overline{i}=\overline{j}\cdot\overline{j}=\overline{k}\cdot\overline{k}=1$;

10. $\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{j}\cdot\overline{k}=\overline{k}\cdot\overline{i}=0$.

Приклад 2.1. Знайти $\overline{a}\cdot\overline{b}$, якщо $\overline{a}(6;2;-1)$, $\overline{b}(-3;4;1)$.

Розв'язання. $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=6\cdot(-3)+2\cdot4-1\cdot1=-11$.

2.1.2. Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається такий вектор $\overline{c}$, який знаходиться за наступними правилами:

а) його довжина дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах, тобто $|\overline{c}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin(\overline{a}\hat{;}\overline{b})$;

б) вектор $\overline{c}$ розташований перпендикулярно площині векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

в) дивлячись з кінця вектора $\overline{c}$ на площину векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ видно, що найкоротший поворот від вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки (рис.2.1) (в цьому випадку говорять, що трійка векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ є правою).

Векторний добуток позначають $\overline{a}\times\overline{b}$.

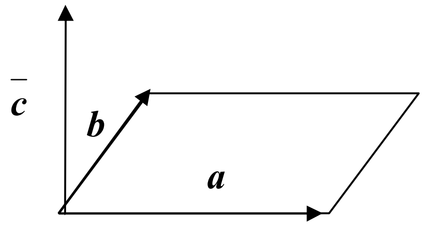


Рис.2.1

Властивості векторного добутку:

1. $\overline{a}\times\overline{b} = -\,\overline{b}\times\overline{a}$; 2. $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$;

3. $\lambda\cdot\overline{a}\times\overline{b} = \lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$; 4. $\overline{a}\times\overline{b} = \mathbf{0}$, якщо вектори колінеарні;

5. $\overline{a}\times\overline{a} = \mathbf{0}$; 6. $\overline{i}\times\overline{i} = \overline{j}\times\overline{j} = \overline{k}\times\overline{k} = \mathbf{0}$;

7. $\overline{i}\times\overline{j} = \overline{k};\quad \overline{j}\times\overline{k} = \overline{i};\quad \overline{k}\times\overline{i} = \overline{j}$.

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, дорівнює довжині векторного добутку цих векторів: $S_{\Pi} = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

Площа трикутника, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, дорівнює половині модуля векторного добутку цих векторів: $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

Якщо вектори задані у координатній формі $\overline{a}(a_x;a_y;a_z)$, $\overline{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)$, то

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Доведення: $\overline{a} = a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$; $\overline{b} = b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}$;

$$\overline{a}\times\overline{b} = (a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k})\times(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}) = a_xb_x\overline{i}\times\overline{i}+a_yb_y\overline{j}\times\overline{j}+$$

$$+a_zb_z\overline{k}\times\overline{k}+\overline{a}_yb_z\overline{j}\times\overline{k}+a_yb_x\overline{j}\times\overline{i}+a_xb_y\overline{i}\times\overline{j}+a_xb_z\overline{i}\times\overline{k}+a_zb_x\overline{k}\times\overline{i}+$$

$$+a_zb_y\overline{k}\times\overline{j} = -a_yb_x\overline{k}+a_xb_y\overline{k}-a_xb_z\overline{j}+a_zb_x\overline{j}+a_yb_z\overline{i}-a_zb_y\overline{i} =$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\overline{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\overline{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\overline{k} =$$

$$=\overline{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Приклад 2.2. Знайти $\bar{a}\times\bar{b}$, якщо $\bar{a}(6;2;-1)$, $\bar{b}(3;4;1)$.

$$\textit{Розв'язання.}\ \bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 6 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}6 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}6 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=6\bar{i}-9\bar{j}+18\bar{k}.$$

2.1.3. Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається їх векторно-скалярний добуток, тобто $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, та позначається $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

Властивості мішаного добутку:

1. Мішаний добуток трьох векторів не змінюється при циклічній перестановці його співмножників: $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$.

2. Мішаний добуток трьох векторів не змінюється при переставленні знаків векторного та скалярного множення: $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$.

3. Мішаний добуток трьох векторів змінює свій знак на протилежний, якщо переставити місцями два будь-які вектори: $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{a})\cdot\bar{c}$.

4. Якщо для ненульових векторів $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0$, то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні.

Якщо вектори задані у координатній формі $\bar{a}(a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b}(b_x;b_y;b_z)$, $\bar{c}(c_x;c_y;c_z)$, то $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

Доведення: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot(c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k})=$

$$=\left(\bar{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)\cdot(c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k})=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-$$

$$-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, дорівнює

$V_{пар} = \pm\, \bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c} = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, де знак обирається таким чином, щоб результат був додатним числом.

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, основою якої є трикутник, дорівнює $V_{пір.} = \pm \frac{1}{6} \bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Приклад 3. Обчислити $\left(3\bar{i} \times 2\bar{i} + \bar{k} \times 2\bar{i}\right) \cdot \left(\bar{j} - 2\bar{i}\right)$.

Розв'язання. $\left(3\bar{i} \times 2\bar{i} + \bar{k} \times 2\bar{i}\right) \cdot \left(\bar{j} - 2\bar{i}\right) = \left(0 - 2\bar{j}\right) \cdot \left(\bar{j} - 2\bar{i}\right) =$
$= -2\bar{j} \cdot \bar{j} + 4\bar{j} \cdot \bar{i} = -2$.

2.2. Аналітична геометрія на площині

Аналітична геометрія - це розділ геометрії, який досліджує найпростіші геометричні об'єкти засобами елементарної алгебри на основі методу координат. Створення аналітичної геометрії зазвичай приписують Р. Декарту, що виклав її основи в останньому розділі свого трактату «Міркування про метод», під заголовком Геометрія.

Дві задачі аналітичної геометрії:

1) дано лінію, як геометричне місце точок, треба записати її рівняння;

2) дано рівняння лінії, треба її побудувати.

Лінія на площині визначається як геометричне місце точок площини, які мають деякі загальні властивості. Лінію на площині можна визначити за допомогою рівняння.

Рівнянням лінії на площині xOy називається таке рівняння $F(x, y) = 0$ з двома змінними, якому задовольняють координати x і y кожної точки лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не належить цій лінії.

Змінні x і y в рівнянні лінії називаються поточними координатами точок лінії.

2.2.1. Пряма лінія на площині

Типи рівнянь прямої на площині:

1. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно даному вектору.

2. $Ax + By + C = 0$ - загальне рівняння прямої;

3. $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$ - канонічне рівняння прямої;

4. $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - рівняння прямої, що проходить через дві точки;

5. $y = kx + b$ - рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, де k - кутовий коефіцієнт прямої, що дорівнює тангенсу кута між прямою та додатним напрямком осі Ox ;

6. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ - рівняння прямої у відрізках на осях;

7. $y - y_0 = k(x - x_0)$ - рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ у заданому напрямку.

Виведемо деякі з цих рівнянь, опираючись на попередній матеріал лекцій.

Рівняння прямої, що перпендикулярна даному вектору. Нормальним вектором до прямої l називається вектор $\overline{N}(A, B)$, який є перпендикулярним до цієї прямої.

Нехай в декартовій прямокутній системі координат на площині xOy задано пряму l, яка містить точку $M_0(x_0, y_0)$, та нормальний вектор $\overline{N}(A, B)$

цієї прямої. Побудуємо на прямій l вектор $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0)$, де точка $M(x,y)$ будь-яка точка прямої з поточними координатами. Оскільки вектор $\overline{N}(A,B) \perp \overline{M_0M}$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю.

Отже, $\overline{N} \cdot \overline{M_0M} = 0$, або

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 . \qquad (2.4)$$

Рівняння (2.4) називається рівнянням прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно даному вектору.

Загальне рівняння прямої. Доведемо, що будь-яке рівняння першого степеня означає пряму лінію на площині. Отже, маємо рівняння першого степеня: $Ax+By+C=0$. У цьому рівнянні одночасно A та B не можуть дорівнювати нулю. Припустимо, для визначеності, що $B \neq 0$. Тоді останнє рівняння можемо переписати у вигляді $A(x-0)+B\left(y-\left(-\frac{C}{B}\right)\right)=0$. Це рівняння є рівнянням прямої, що проходить через точку $M\left(0,-\frac{C}{B}\right)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}(A,B)$.

Отже, рівняння

$$Ax+By+C=0 \qquad (2.5)$$

визначає пряму лінію на площині і називається загальним рівнянням прямої.

Канонічне рівняння прямої. Напрямним вектором прямої називається вектор, що лежить на цій прямій, або розташований паралельно їй.

Нехай в декартовій прямокутній системі координат на площині xOy задано пряму l, яка містить точку $M_0(x_0, y_0)$, та напрямний вектор цієї прямої $\bar{s}(m,n)$.

Оберемо на прямій l довільну точку $M(x,y)$ з поточними координатами. Тоді, вектори $\bar{s}(m,n)$ та $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0)$ колінеарні. За умовою колінеарності

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (2.6)$$

Рівняння (2.6) називається канонічним рівнянням прямої.

<u>Рівняння прямої, що проходить через дві точки.</u> Розглянемо в декартовій системі координат пряму l, на якій знаходяться дві відомі точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Треба знайти рівняння прямої l. Вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ можна вважати напрямним вектором прямої l, оскільки він належить прямій.

Тоді з рівняння (2.6) маємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{2.7}$$

Рівняння (2.7) називається рівнянням прямої, що проходить через дві точки.

<u>Рівняння прямої в відрізках на осях.</u> Пряма l відсікає по осях Ox та Oy відрізки, що дорівнюють a та b відповідно (рис.2.2). Треба визначити рівняння прямої.

Скористаємося рівнянням (2.7). Оскільки пряма проходить через точки $A(a;0)$ та $B(0;b)$, маємо $\dfrac{x - a}{0 - a} = \dfrac{y - 0}{b - 0}$, або, остаточно

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{2.8}$$

Рівняння (2.8) називається рівнянням у відрізках на осях.

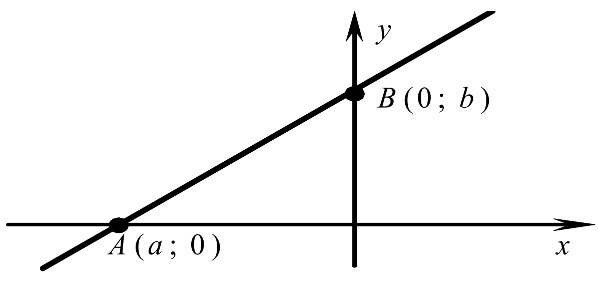


Рис.2.2

Приклад 2.4. Записати рівняння прямої M_1M_2, якщо $M_1(4,-2)$ $M_2(3;5)$ Визначити її кутовий коефіцієнт.

Розв'язання. Згідно з формулою (2.7)

$$\frac{x-4}{3-4}=\frac{y-(-2)}{5-(-2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-4}{-1}=\frac{y+2}{7}, \text{ або } \quad -y-2=7x-28.$$

Отже, маємо $y=-7x+26$. Тоді $k=-7$.

Деякі задачі аналітичної геометрії на площині:

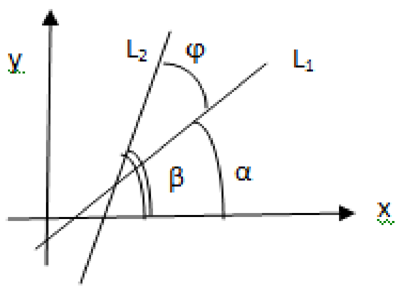


Рис. 2.3

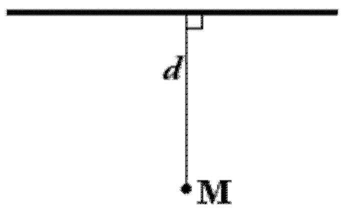
1. Кут між двома прямими. Розглянемо дві прямі на площині:

$$L_1: \quad y=k_1x+b_1 \quad \text{та} \quad L_2: \quad y=k_2x+b_2$$

(рис.2.3). Позначимо гострий кут між прямими L_1 та L_2 через φ. Тоді $tg\,\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Особливі випадки: $L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_2=k_1$;

$$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_2=-\frac{1}{k_1}.$$



2. Відстань від точки до прямої.

Відстань від точки $M(x_0,y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ (рис.2.4) обчислюється за формулою:

Рис.2.4

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. Ділення відрізка у рівному відношенні.

Нехай точка $C(x;y)$ ділить відрізок AB навпіл. Тоді

$$x=\frac{x_A+x_B}{2}, \quad y=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

Приклад 2.5. Знайти кут між прямою $y=4x-2$ та прямою AB, де $A(3;7)$, $B(-2;3)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку рівняння прямої AB за формулою (2.7):

$$\frac{x-3}{-2-3}=\frac{y-7}{3-7} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{-5}=\frac{y-7}{-4} \quad \Rightarrow 5y-35=4x-12$$. Отже, маємо:

$4x-5y+23=0$. Звідси $k_1=\frac{4}{5}$. Кутовий коефіцієнт заданої прямої - $k_2=4$.

Тоді, $tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{4-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}\cdot 4}=\frac{16}{21}$. Отримаємо $\varphi=arctg\frac{16}{21}$.

Приклад 2.6. Обчислити відстань від точки $M(-2;8)$ до прямої $y=3x-2$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння прямої у загальному вигляді: $3x-y-2=0$. Тоді, $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\left|\frac{3\cdot(-2)-1\cdot 8-2}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}\right|=\frac{16}{\sqrt{10}}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2.
ВЕКТОРИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Скалярний добуток векторів

Приклад 1. Обчислити скалярний добуток $\bar{a}\cdot(2\bar{b}+3\bar{c})$, якщо $\bar{a}(1;-2;3)$, $\bar{b}(0;4;1)$, $\bar{c}(2;3;-5)$.

Розв'язання. $(2\bar{b}+3\bar{c})=2(0;4;1)+3(2;3;-5)=$
$=(0;8;2)+(6;9;-15)=(6;17;-13)$,

$\bar{a}\cdot(2\bar{b}+3\bar{c})=1\cdot 6-2\cdot 17+3\cdot(-13)=6-34-39=-67$.

Приклад 2. Обчислити $\cos(\bar{a};3\bar{a}-\bar{b})$, якщо $\bar{a}=(2;-3;2)$ та $\bar{b}=(-2;-1;1)$.

Розв'язання. $\bar{c}=(3\bar{a}-\bar{b})=3(2;-3;2)-(-2;-1;1)=(6;-9;6)-(-2;-1;1)$
$=(8;-8;5)$.

$$\cos\left(\bar{a}\,\hat{;}\,3\bar{a}-\bar{b}\right)=\cos\left(\bar{a}\,\hat{;}\,\bar{c}\right)=\frac{a_x c_x+a_y c_y+a_z c_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}}=$$

$$=\frac{2\cdot 8-3\cdot(-8)+2\cdot 5}{\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{8^2+(-8)^2+5^2}}=\frac{50}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{153}}=\frac{50}{51}.$$

Приклад 3. Обчислити $np_{\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)}\bar{a}$, якщо $\bar{a}=(1;0;3)$ та $\bar{b}=(2;-1;-3)$.

Розв'язання. $\bar{c}=2\bar{a}+3\bar{b}=2(1;0;3)+3(2;-1;-3)=(2;0;6)+(6;-3;-9)=$
$=(8;-3;-3)$,

$$np_{\bar{c}}\,\bar{a}=\frac{a_x c_x+a_y c_y+a_z c_z}{\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}}=\frac{1\cdot 8+0\cdot(-3)+3\cdot(-3)}{\sqrt{8^2+(-3)^2+(-3)^2}}=\frac{-1}{\sqrt{82}}.$$

Приклад 4. Обчислити внутрішній кут A у трикутнику ABC, де $A(1;0;3)$ $B(5;-1;2)$ $C(2;4;-3)$.

Розв'язання. Кут A розташований між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$, тому, треба знайти координати цих векторів:

$\overline{AB}(5-1;\ -1-0;\ 2-3)=(4;-1;-1)$; $\overline{AC}(2-1;\ 4-0;\ -3-3)=(1;4;-6)$.

Тоді, $\cos\hat{A}=\dfrac{4\cdot 1-1\cdot 4-1\cdot(-6)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2+(-6)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{18}\sqrt{53}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{53}}$.

$\hat{A}=\arccos\sqrt{\dfrac{2}{53}}=1{,}375$ рад.

Приклад 5. При якому значенні змінної x вектори $\bar{a}=(x;4;1)$ та $\bar{b}=(2;-1;-3x)$ перпендикулярні?

Розв'язання. $\bar{a}\perp\bar{b}\quad\Leftrightarrow\quad\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

Отже $\bar{a}\cdot\bar{b}=x\cdot 2+4\cdot(-1)+1\cdot(-3x)=0$, або $-4-x=0\quad\Rightarrow x=-4$.

Приклад 6. Сторони трикутника ABC співпадають з векторами $\overline{AB}=2\bar{m}+\bar{n}$ та $\overline{AC}=\bar{m}-2\bar{n}$. Обчислити, чому дорівнює довжина сторони BC, якщо $|\bar{m}|=\sqrt{3}$, $|\bar{n}|=6$ та кут між векторами $\bar{m}$ та $\bar{n}$ дорівнює 30°.

Розв'язання. $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}=(\overline{m}-2\overline{n})-(2\overline{m}+\overline{n})=-\overline{m}-3\overline{n}$.

$$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{\overline{BC}\cdot\overline{BC}}=\sqrt{(-\overline{m}-3\overline{n})\cdot(-\overline{m}-3\overline{n})}=\sqrt{\overline{m}^2+6\overline{m}\cdot\overline{n}+9\overline{n}^2}=$$

$$=\sqrt{\left|\overline{m}\right|^2+6\cdot\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\cdot\cos 30^\circ+9\left|\overline{n}\right|^2}=\sqrt{3+6\sqrt{3}\cdot 6\frac{\sqrt{3}}{2}+9\cdot 36}=\sqrt{381}.$$

Векторний добуток векторів

Приклад 7. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(2;4;-3)$, $B(-2;2;3)$ та $C(5;3;5)$.

Розв'язання. $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Знайдемо координати векторів $\overline{AB}(a_x;a_y;a_z)$ та $\overline{AC}(b_x;b_y;b_z)$:

$\overline{AB}(-4;-2;6)$; $\overline{AC}(3;-1;8)$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -4 & -2 & 6\\ 3 & -1 & 8\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}-2 & 6\\ -1 & 8\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}-4 & 6\\ 3 & 8\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-10\,\overline{i}+50\overline{j}+10\overline{k}.$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2+50^2+10^2}=\frac{1}{2}\sqrt{100+2500+100}=\frac{\sqrt{2700}}{2}$$

$=15\sqrt{3}$ кв. од.

Приклад 8. Знайти довжину висоти CE трикутника ABC, якщо $A(4;0;5)$, $B(2;6;4)$ та $C(5;-5;8)$.

Розв'язання. З курсу планіметрії відомо, що $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|AB\right|\cdot\left|CD\right|$, а з курсу векторної алгебри $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Тоді, маємо $\frac{1}{2}\left|AB\right|\cdot\left|CD\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Тому $\left|CD\right|=\dfrac{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{\left|AB\right|}$.

Знайдемо координати векторів $\overline{AB}(a_x;a_y;a_z)$ та $\overline{AC}(b_x;b_y;b_z)$:

$\overline{AB}(-2;6;-1)$; $\overline{AC}(1;-5;3)$.

Отже, $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ -2 & 6 & -1\\ 1 & -5 & 3\end{vmatrix}=\bar i\begin{vmatrix}6 & -1\\ -5 & 3\end{vmatrix}-$

$-\bar j\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\bar k\begin{vmatrix}-2 & -6\\ 1 & -5\end{vmatrix}=13\,\bar i+5\bar j+4\bar k$.

Довжину вектора $\overline{AB}$ обчислимо за формулою:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{(-2)^2+6^2+3^2}=\sqrt{49}=7$$

$$|CD|=\frac{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{\left|AB\right|}=\frac{\sqrt{13^2+5^2+4^2}}{7}=\frac{\sqrt{210}}{7}.$$

Приклад 9. Обчислити площу паралелограма, сторони якого співпадають з векторами $\bar a=\overline{m}+4\,\bar n$ та $\bar b=\overline{2m}-3\bar n$, якщо $\left|\overline{m}\right|=7$, $\left|\bar n\right|=4$, та кут між векторами $\overline{m}$ та $\bar n$ дорівнює 30°.

Розв'язання. $S_{\Pi}=\left|\bar a\times\bar b\right|=\left|\left(\overline{m}+4\bar n\right)\times\left(\overline{2m}-3\bar n\right)\right|=$

$=\left|\overline{m}\times\overline{2m}+8\bar n\times\overline{m}-3m\times\bar n-12\bar n\times\bar n\right|=\left|-8\overline{m}\times\bar n-3\overline{m}\times\bar n\right|=11\left|m\times\bar n\right|=$

$=11\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\bar n\right|\cdot sin\,30^{\circ}=11\cdot7\cdot4\cdot\frac{1}{2}=154$ (кв. од.)

Мішаний добуток векторів

Приклад 10. Знайти об'єм піраміди $AKLM$, якщо $A(2;1;4)$, $K(-6;4;1)$, $L(4;10;0)$ та $M(-2;-8;8)$.

Розв'язання. $V_{nip}=\pm\frac{1}{6}\bar a\,\bar b\,\bar c=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$

Побудуємо три вектори, що виходять з точки A:

$\overline{AK}\left(a_x;a_y;a_z\right)=(-8;3;-3)$;

$\overline{AL}\left(b_x;b_y;b_z\right)=(2;9;-4)$;

$\overline{AM}\left(c_x;c_y;c_z\right)=(-4;-9;4)$.

Маємо: $\overline{AK}\ \overline{AL}\ \overline{AM} = \begin{vmatrix} -8 & 3 & -3 \\ 2 & 9 & -4 \\ -4 & -9 & 4 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} -$

$-3\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -4 & -9 \end{vmatrix} = -8\cdot 0 - 3\cdot(-8) - 3\cdot 18 = -30.$

Отримаємо $V_{nip} = \frac{1}{6}\cdot 30 = 5$ куб. од.

Приклад 11. При якому значенні змінної x вектори $\overline{a} = (x\,;3\,;5\,)$, $\overline{b} = (0\,;1\,;-2\,)$ та $\overline{c} = (1\,;3\,;-1\,)$ будуть компланарними?

Розв'язання. Вектори будуть компланарними, якщо їх мішаний добуток буде дорівнювати нулю: $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$.

Отже, $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= x\cdot 5 - 3\cdot 2 + 5\cdot(-1) = 0$. Маємо $5x - 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{5}$.

Приклад 12. Знайти довжину висоти $H = OA$ піраміди $OKLM$, якщо O – початок координат, $K(4;-2;6)$, $L(-8;3;2)$ та $M(10;0;-4)$.

Розв'язання. З курсу стереометрії відомо, що $V_{nip} = \frac{1}{3}S_{\Delta_{KLM}}H$, а з курсу векторної алгебри $V_{nip} = \pm\frac{1}{6}\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Тоді, маємо $V_{nip} = \pm\frac{1}{6}\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \frac{1}{3}S_{\Delta_{KLM}}H$, звідки $H = \dfrac{\pm\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}{2\,S_{\Delta_{KLM}}}$.

$S_{\Delta_{KLM}} = \frac{1}{2}\left|\,\overline{KL}\times\overline{KM}\right|$, тоді $H = \dfrac{\pm\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}{\left|\,\overline{KL}\times\overline{KM}\right|}$.

$\bar{a} = \overline{OK}(4;-2;6);\ \bar{b} = \overline{OL}(-8;3;2);\ \bar{c} = \overline{OM}(10;0;-4)$.

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -8 & 3 & 2 \\ 10 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 4\cdot(-12) + 2\cdot 12 + 6\cdot(-30) = -204.$$

Щоб знайти площу трикутника, знайдемо координати векторів $\overline{KL}$ та $\overline{KM}$: $\overline{KL}(-12;5;-4)$; $\overline{KM}(6;2;-10)$.

$$\overline{KL}\times\overline{KM} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -12 & 5 & -4 \\ 6 & 2 & -10 \end{vmatrix} = -42\bar{i} - 144\bar{j} - 54\bar{k};$$

$$\left|\overline{KL}\times\overline{KM}\right| = \sqrt{(-42)^2 + (-144)^2 + (-54)^2} = \sqrt{25416}.$$

Тоді $H = \dfrac{204}{\sqrt{25416}} = \dfrac{34}{706}$ (лін. од.)

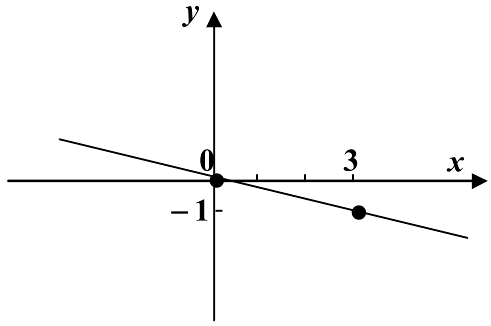
Пряма лінія на площині

Приклад 13. Побудувати прямі : а) $y = -\dfrac{1}{3}x$; б) $2x - 5y - 10 = 0$; в) $y = 2$.

Розв'язання. а) $y = -\dfrac{1}{3}x$.

Для побудови цієї прямої треба вибрати будь-які дві точки, що їй належать:

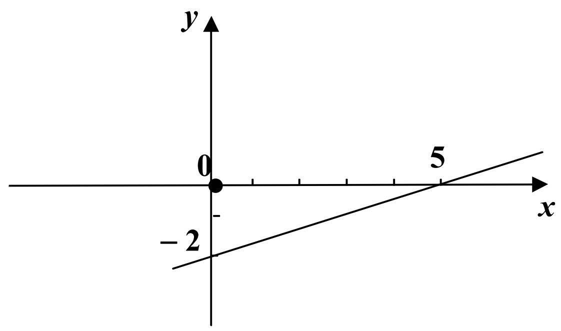
x	y
0	0
3	-1



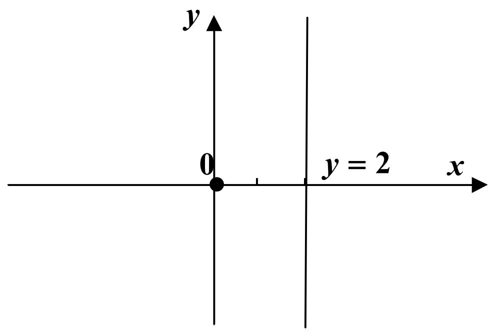
б) $2x - 5y - 10 = 0$.

Для того, щоб побудувати цю пряму доцільно привести її рівняння до рівняння в відрізках на осях $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$:

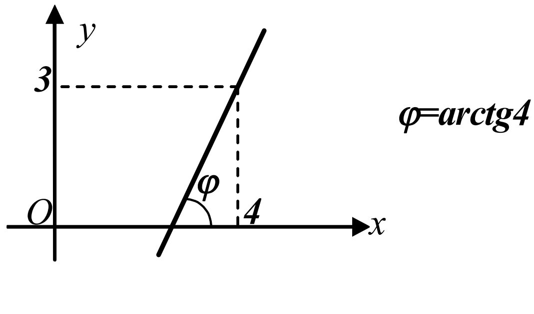
$2x - 5y = 10 \quad \Rightarrow \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{-2} = 1$; отже $a = 5; b = -2$



в) $y = 2$.



Приклад 14. Записати рівняння прямої, зображеної на рисунку. Обчислити відстань від початку координат до цієї прямої.



Розв'язання. Скористаємося рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$. Як відомо, $k = tg\,\varphi$, тоді $k = tg\,arctg4 = 4$. Пряма проходить через точку (4;3).

Отже $3 = 4 \cdot 4 + b; \Rightarrow b = -13$. Рівняння прямої буде мати вигляд: $y = 4x - 13$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ знаходиться за формулою: $d = \dfrac{|A x_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Перепишемо рівняння отриманої прямої у загальному вигляді: $4x - y - 13 = 0$. Тоді відстань від початку координат до цієї прямої буде дорівнювати $d = \dfrac{|4 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 13|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{17}}$.

Приклад 15. Записати рівняння прямої, проведеної через точку $B(2;5)$ паралельно до прямої AC, якщо $A(-4;2)$ та $C(3;7)$.

Розв'язання. Оскільки шукана пряма паралельна до прямої AC, то вектор $\overline{AC}(7;5)$ можна вважати напрямним вектором цієї прямої, і її рівняння за формулою (2.6) буде мати вигляд:

$\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y-5}{5}$ або $5(x-2) = 7(y-5)$.

Остаточно отримаємо: $5x - 7y + 25 = 0$.

Приклад 16. У трикутнику з вершинами $A(4;0)$, $B(5;3)$ та $C(-2;2)$ знайти рівняння та довжину медіани BK.

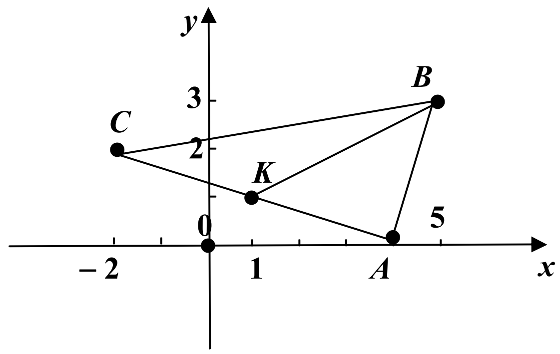
Розв'язання. Оскільки BK - медіана трикутника ABC, то $|AK| = |KC|$ і тоді $x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1$; $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{0+2}{2} = 1$.

Отже $K(1;1), B(5;3)$. Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$;

$\dfrac{x-1}{5-1} = \dfrac{y-1}{3-1} \Rightarrow 2(x-1) = 4(y-1)$, або $x - 2y + 1 = 0$.

Довжина медіани BK:

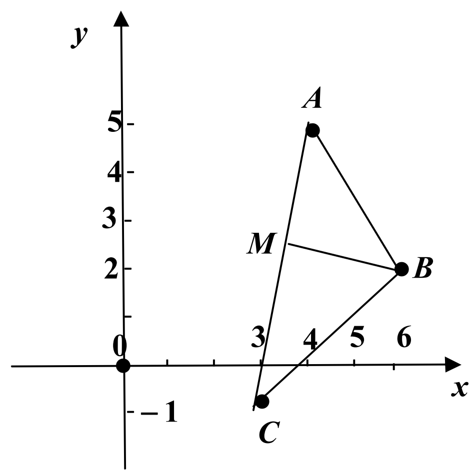
$$|BK|=\sqrt{(x_K-x_B)^2+(y_K-y_B)^2}=\sqrt{(1-5)^2+(1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\,.$$



Приклад 17. У трикутнику з вершинами $A(4;5)$, $B(6;2)$ та $C(3;-1)$ знайти рівняння висоти BM .

Розв'язання. Висота BM перпендикулярна основі AC, тому кутові коефіцієнти цих прямих пов'язані співвідношенням: $k_{BM}=-\dfrac{1}{k_{AC}}$. Кутовий коефіцієнт прямої AC можна обчислити за формулою $k_{AC}=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{-1-5}{3-4}=6$. Тоді $k_{BM}=-\dfrac{1}{6}$.

Скористаємось рівнянням прямої, що проходить через дану точку у даному напрямку: $y-y_B=k_{BM}(x-x_B)$. Маємо $y-2=-\dfrac{1}{6}(x-6)$, або $\dfrac{1}{6}x-y-3=0$, або $x-6y-18=0$



Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити $cos\left(\bar{a}\,\hat{;}\,2\bar{a}-3\bar{b}\right)$, якщо $\bar{a}=(1;4;7)$ та $\bar{b}=(5;-1;-3)$.

2. Обчислити $np_{\left(2\bar{a}\right)}\left(\bar{a}-\bar{b}\right)$, якщо $\bar{a}=(1;4;7)$ та $\bar{b}=(2;3;-5)$.

3.Обчислити зовнішній кут B у трикутнику ABC, де $A(3;0;3)$, $B(5;-2;6)$, $C(2;4;-3)$.

4. При якому значенні параметра x вектори $\bar{a}=(7;x;1)$ та $\bar{b}=(x;-1;-3x)$ перпендикулярні?

5. Сторони трикутника ABC співпадають з векторами $\overline{AB}=3\bar{m}-\bar{n}$ та $\overline{AC}=\bar{m}+4\bar{n}$. Обчислити, чому дорівнює довжина сторони BC, якщо $\left|\bar{m}\right|=1$, $\left|\bar{n}\right|=\sqrt{12}$ та кут між векторами $\bar{m}$ та $\bar{n}$ дорівнює 150°.

6. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(3;1;0)$, $B(-3;4;7)$ та $C(5;3;5)$.

7. Знайти довжину висоти AE трикутника ABC, якщо $A(7;3;9)$, $B(2;6;4)$ та $C(5;-5;8)$.

8. Знайти об'єм піраміди $AKLM$, якщо $A(4;-2;8)$, $K(-6;4;1)$, $L(6;3;1)$ та $M(-2;-8;8)$.

9. Знайти довжину висоти $H=KA$ піраміди $OKLM$, якщо O – початок координат, $K(2;10;3)$, $L(-8;3;2)$ та $M(10;0;-4)$.

10. Побудувати прямі :

а) $y=5x+2$; б) $4x-3y+12=0$; в) $x-6=0$.

11. Записати рівняння прямої, проведеної через точку $B(-4;1)$ перпендикулярно до прямої AC, якщо $A(7;1)$ та $C(2;3)$.

12. У трикутнику з вершинами $A(-2;1)$, $B(8;3)$ та $C(-2;2)$ знайти рівняння та довжину медіани AK.

ЛЕКЦІЯ 3. ВСТУП У МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. ГРАНИЦІ ФУНКЦІЙ

Термін «математичний аналіз» вживають у двох розуміннях, а саме: в широкому – як вивчення будь-яких явищ за допомогою математичних моделей, та вузькому – як назву певної частини математики, у якій функція та її узагальнення вивчаються методом границь. Інша назва цієї математичної дисципліни є «диференціальне та інтегральне числення», оскільки саме диференціювання та інтегрування є основними операціями математики неперервних змінних величин.

Первісними поняттями (або основними об'єктами) цього розділу є поняття ***дійсного числа*** (як моделі для сталої величини) та ***функції*** (як моделі для змінної величини).

3.1. Множини дійсних чисел

Поняття множини є одним з головних понять математики, яке не має визначення. Задати ***множину*** – означає назвати закон чи правило або характерну властивість об'єктів множини, за якими про кожний об'єкт можна зробити висновок: належить він цій множині чи ні. Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x \in X$, якщо $x \notin X$ - елемент x не належить X. Множина, яка не містить жодного елемента, – порожня і позначається $\varnothing$.

У курсі математичного аналізу використовують множини, елементами яких є числа. Такі множини називають ***числовими***. Серед числових множин виділимо такі:

множина натуральних чисел $N = \{1,2,3,...,n,...\}$ (від ***natural*** **-** природний);

множина цілих чисел $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$;

множина раціональних чисел $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N \right\}$.

Кожне ***раціональне*** число є скінченним десятковим або нескінченним періодичним десятковим дробом. ***Ірраціональним*** числом називають нескінченний неперіодичний десятковий дріб. Наприклад, числа $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{5}$, які є коренями алгебраїчних рівнянь, - алгебраїчні ірраціональні числа; числа π, e,

$lg\,3$ - трансцендентні числа. Усі раціональні та ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел $R = \{\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots\}$, де a_0 - невід'ємне ціле число, а кожне з $a_n \in Z_0 = \{0,1,2,\dots,n,\dots\}$.

Отже, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Зауваження 3.1. Якщо для наочного уявлення дійсного числа з різних неперервних величин взяти найпростішу, тобто довжину відрізка, то отримаємо зручне й корисне зображення дійсного числа у вигляді точки ***координатної прямої***, тобто прямої, на якій обрано початкову точку, напрям та одиницю довжини.

Отже, ***дійсне число*** є мірою неперервної величини, що виникає при уявному вимірюванні її значення шляхом порівняння цього значення з відповідним еталоном.

3.2. Функція однієї змінної

3.2.1. Поняття функції. Способи задання функції

Нехай D і $¥$ – дві числові множини. Якщо кожному значенню $x \in D$ за деякими правилами (f) поставлено у відповідність єдине число $y \in ¥$, то ця відповідність задає функцію $y = f(x)$. Множина $D = D(f)$ називається областю визначення, множина $E = f(D) = \{f(x), x \in D\}$ - називається областю значень функції; x називається аргументом функції.

Основними способами завдання функції є такі: ***аналітичний*** – якщо вона задана за допомогою однієї або кількох формул; ***табличний*** – якщо відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці; ***графічний*** – якщо функцію подають на малюнку у вигляді певної кривої, що задає множину точок (x, y) площини, прямокутні координати яких задовольняють рівняння $y = f(x)$.

Приклад 3.1. Знайти область визначення функції:

$$y = \sqrt{25 - 4x^2} - \ ln\frac{2x+1}{x-1}.$$

Розв'язання. Областю визначення першого доданка є множина тих значень x, що задовольняють нерівність $25 - 4x^2 \geq 0$, тобто $X_1 = [-2{,}5; 2{,}5]$. Областю визначення другого доданка є множина тих значень x, що задовольняють нерівність $\frac{2x+1}{x-1} > 0$, тобто $X_2 = (-\infty; -0{,}5) \cup (1; +\infty)$. Областю визначення заданої функції є переріз цих множин, тобто $D(f): x \in [-2{,}5; -0{,}5] \cup (1; 2{,}5]$.

Приклад 3.2. Знайти множину значень функції $y = 12 - 3\sin 5x$.

Розв'язання. Оскільки $|\sin 5x| \leq 1$, тобто $-1 \leq \sin 5x \leq 1$, тоді $-3 \leq -3\sin 5x \leq 3$ та $9 \leq 12 - 3\sin 5x \leq 15$. Отже, $E(f): y \in [9; 15]$.

3.2.2. Деякі класи функцій

Обмежені функції. Функцію $y = f(x), x \in D$ називають ***обмеженою*** на множині D, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$.

Наприклад, функція $y = \cos x$ обмежена на всій числовій осі, $|\cos x| \leq 1$ для $x \in (-\infty; +\infty)$. Графік функції є у смузі між прямими $y = -1$, $y = 1$.

Монотонні функції. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині D. Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу з цієї множини при умові $x_1 < x_2$, то маємо:

а) $f(x_1) < f(x_2)$ - функція зростаюча;

б) $f(x_1) > f(x_2)$ - функція спадна;

в) $f(x_1) \leq f(x_2)$ - функція неспадна;

г) $f(x_1) \geq f(x_2)$ - функція незростаюча.

Всі ці функції називаються ***монотонними***.

<u>Парні і непарні функції</u>. Функцію $y = f(x)$, визначену на ***симетричній*** множині $D = \{-a < x < a\}$, називають ***парною***, якщо для будь-яких $x \in D$ виконується умова $f(-x) = f(x)$, і ***непарною***, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Наприклад, $y = \sin x$ - непарна функція, $y = \cos x$ - парна функція. Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Приклад 3.3. Перевіримо, парною чи непарною є функція $f(x) = x^5 + 4tgx$.

Розв'язання. Для функції $f(x)$ область визначення $D(f) = R$, і якщо $x \in D(f)$, то $-x \in D(f)$. Обчислимо $f(-x) = (-x)^5 + 4tg(-x) = -x^5 - 4tgx = -\left(x^5 + 4tgx\right) = -f(x)$. Отже, функція $f(x)$ непарна.

<u>Періодичні функції.</u> Функцію $y = f(x)$, яка визначена на всій числовій осі, називають ***періодичною***, якщо існує таке число $T > 0$, яке називається ***періодом***, що $f(x \pm T) = f(x)$, $x \in R$.

Якщо число T - період функції $f(x)$, то її періодами є також числа $k \cdot T$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

З означення маємо, що для побудови графіка періодичної з періодом T функції достатньо побудувати її графік на проміжку довжиною T, а потім продовжити цей графік, повторюючи його через кожний проміжок довжини T.

<u>Обернені функції.</u> Нехай на множині D задана функція $y = f(x)$ із множиною значень $E(f)$. Якщо кожному $y \in E$ відповідає єдине значення $x \in D$, які зв'язані формулою $\varphi(y) = x$, то кажуть, що на E задана функція $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$, обернена до функції $y = f(x)$, а функція $y = f(x)$ є оборотною [3]. Функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ називаються ***взаємно оберненими***. Область значень E функції $y = f(x)$ є областю визначення оберненої функції $x = f^{-1}(y)$, а область визначення D функції $y = f(x)$ є множиною значень функції $x = f^{-1}(y)$.

Достатня умова існування оберненої функції. Для того, щоб існувала функція, обернена до функції $y = f(x)$, досить, щоб $f(x)$ монотонно зростала (спадала). У цьому випадку обернена функція також монотонно зростає (спадає).

Приклад 3.4. Перевіримо, чи є оборотними наступні функції:
1) $f(x) = x^2$, $D(f) = R$; 2) $f(x) = 2x + 3$, $D(f) = R$. Для оборотних знайти обернені.

Розв'язання. Функція $f(x) = x^2$, $D(f) = R$ не є оборотною, тому що двом різним значенням $x_1 = -c$ та $x_2 = c$ з області визначення цієї функції відповідає одне число $f(-c) = f(c) = c^2$, тобто не виконується умова існування оберненої функції.

Для функції $f(x) = 2x + 3$ з умови $x_1 \neq x_2$ маємо, що $f(x_1) \neq f(x_2)$, що означає існування для неї оберненої функції, тобто її оборотність. З рівності $y = 2x + 3$ отримаємо, що $x = \dfrac{y-3}{2}$. Отже, функція $y = \dfrac{x-3}{2}$ є оберненою до функції $y = 2x + 3$.

Складні функції. Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині $U(f)$, а функція $u = \varphi(x)$ визначена на множині $D(f)$, і всі її значення $u \in U$. Тоді змінна y через проміжну функцію u є функцією x: $y = f(\varphi(x))$. У цьому випадку y називається ***складною функцією*** від x (композицією, суперпозицією функцій, або функцією від функції).

Наприклад, $y = u^2$, $u = \sin x$, тоді $y = \sin^2 x$ є складною функцією від x, для якої $D(f): x \in R$, $E(f): y \in [0; \infty)$.

Елементарні функції та їх класифікація. Функції $y = C$ $(C = const, C \in R)$, степенева функція $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$, показникова $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, логарифмічна $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$, тригонометричні $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, обернені тригонометричні $y = \arcsin x$,

$y = arccos\, x$, $y = arctgx$, $y = arctgx$ називаються ***основними елементарними*** функціями.

Кожну функцію, яку можна задати за допомогою формули, що містить лише скінченне число арифметичних дій $(+, -, \times, \div)$ і суперпозицій основних елементарних функцій, називають ***елементарною*** функцією.

Наприклад, функція $y = 2^{tg3x} + cos^2\left(x^2 + 4x - 5\right) - x^3 \cdot log_5\, arcsin\, 2x$ елементарна. Функції $y = |\, x \,|$, $y = n\,!$, $n \in N$ не є елементарними.

Елементарні функції поділяють на три класи: раціональні, ірраціональні та трансцендентні.

Функцію $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, де $a_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ - дійсні числа, а $n \in N$, називають ***цілою раціональною функцією***, або ***многочленом*** степеня n. Відношення двох цілих раціональних функцій

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m} \qquad (n, m \in N)$$

називають ***дробово-раціональною функцією***.

Ірраціональні функції – це функції, які задані формулою, отриманою внаслідок скінченної кількості суперпозицій сталих, раціональних і степеневих функцій з дробовими показниками, і чотирьох арифметичних дій, застосованих скінченне число раз.

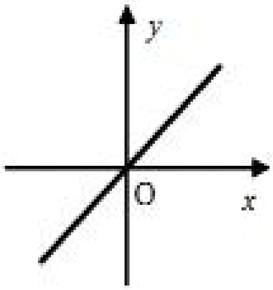
Наприклад, функція $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^3 - 1}{x^4 + \sqrt{x}}}$ є ірраціональною.

Елементарні функції, які не є ні раціональними, ні ірраціональними, називають ***трансцендентними***.

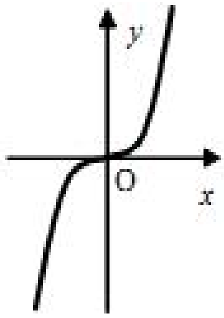
Наприклад, функція $y = sin\, 3x - log_6\, x + 7 \cdot 6^x$ трансцендентна.

ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

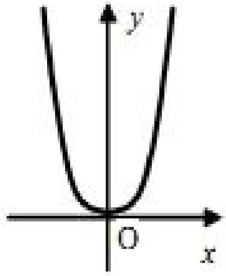
Алгебраїчні функції



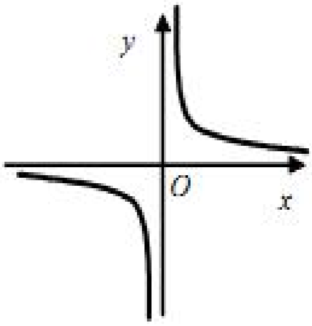
$y = x$



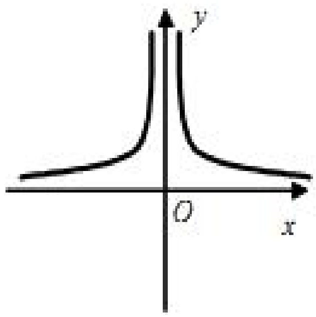
$y = x^3, \; y = x^{2n+1}$



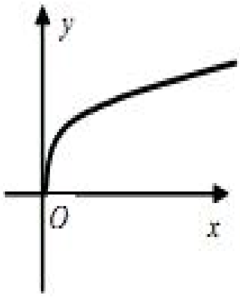
$y = x^2, \; y = x^{2n}$



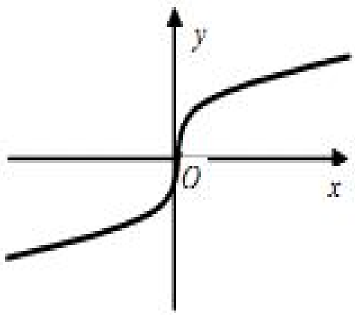
$y = \frac{1}{x}, \; y = \frac{1}{x^{2n+1}}$



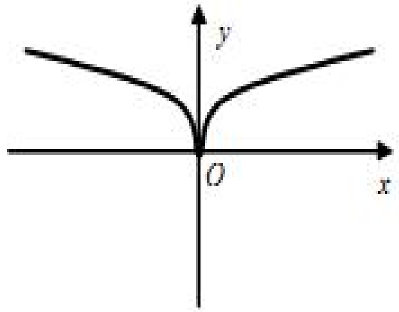
$y = \frac{1}{x^2}, \; y = \frac{1}{x^{2n}}$



$y = \sqrt{x}, \; y = \sqrt[2n]{x}$



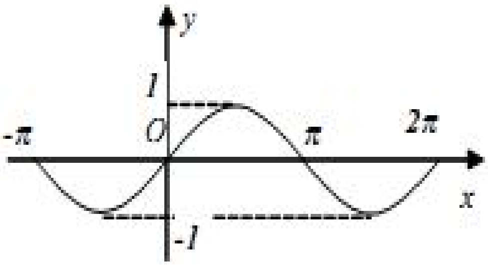
$y = \sqrt[3]{x}, \; y = \sqrt[2n+1]{x}$



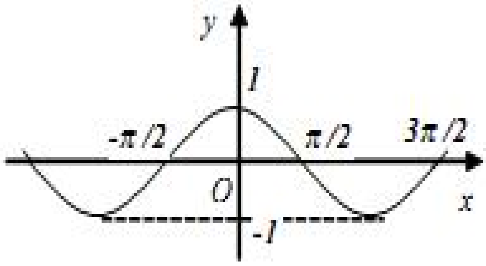
$y^3 = x^2, \; y^{2n+1} = x^{2m}$

$(2n + 1 > 2m)$

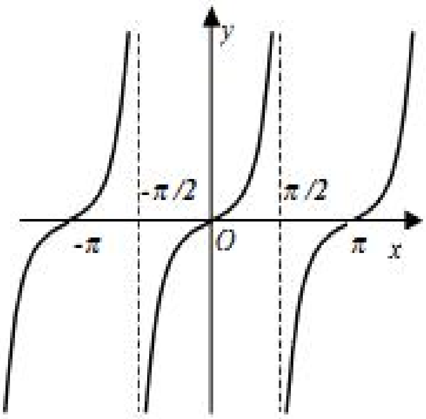
Трансцендентні функції



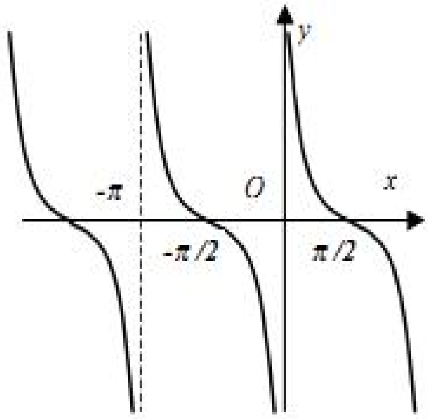
y = sin x



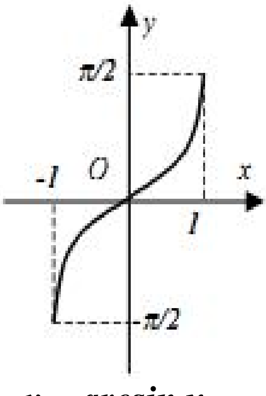
y = cos x



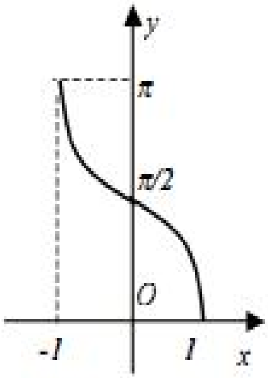
y = tgx



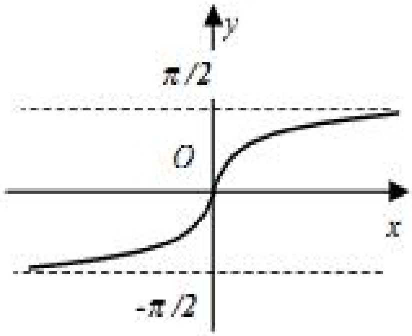
y = ctgx

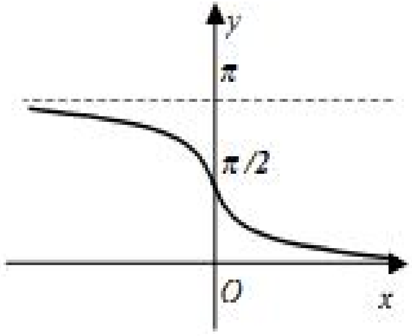


y = arcsin x

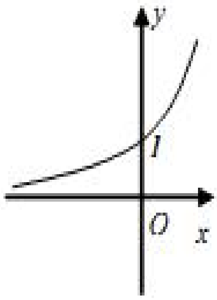


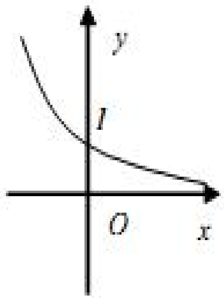
y = arccos x

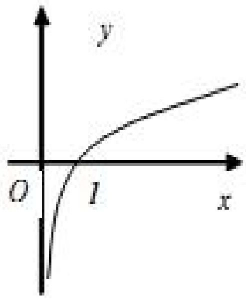


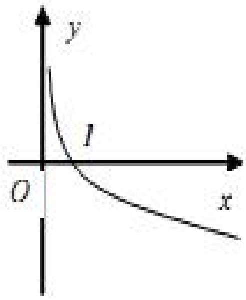


$y = arctgx$ $\qquad\qquad$ $y = arcctgx$





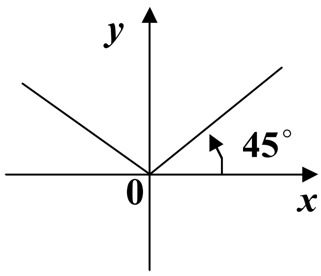




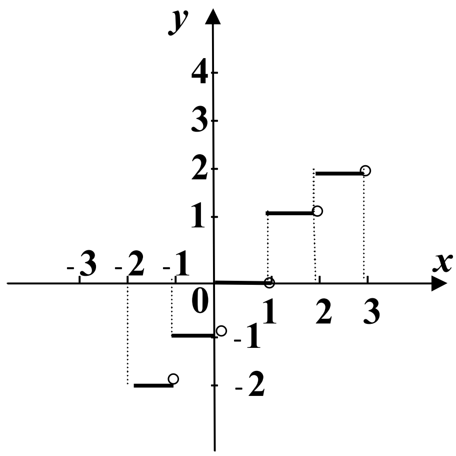
$y = a^x,\ a > 1$ $\quad$ $y = a^x,\ 0 < a < 1$ $\quad$ $y = log_a\ x, a > 1$ $\quad$ $y = log_a\ x, 0 < a < 1$

<u>Деякі неелементарні функції.</u>

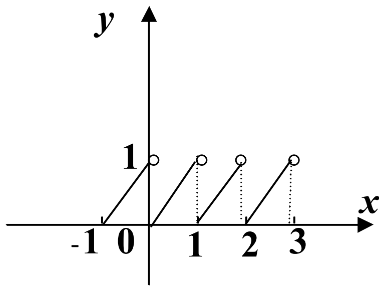
1. $y = |\, x \,|$ - абсолютне значення або модуль числа.



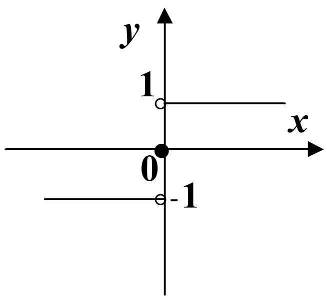
2. $y = [\, x \,]$ - ціла частина числа



3. $y = \{x\}$ - дробова частина числа



4. $y = sign\ x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ - знак числа.



3.3. Границі послідовностей і функцій

3.3.1. Границя числової послідовності

<u>**Числова послідовність.**</u> Функцію $x_n = f(n)$, задану на множині натуральних чисел $N(n \in N)$, називають числовою послідовністю і позначають $\{x_n\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

Числову послідовність зазвичай задають формулою ***загального члена***, який є функцією номера n: $x_n = f(n)$, $n \in N$.

Геометрично послідовність зображується на числовій осі у вигляді послідовності точок, координати яких дорівнюють відповідним членам послідовності, або точками координатної площини xOy, якщо відкладати на осі Ox номери n членів послідовності, а на осі Oy - відповідні члени.

Часто доводиться вивчати поведінку членів послідовності при необмеженому зростанні номера n (при $n \to \infty$). Так, усі члени послідовності

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ відмінні від нуля, але чим більше n, тим менше x_n відрізняється від 0. Кажуть, що члени цієї послідовності прямують до 0 при $n \to \infty$, а число 0 є границею цієї послідовності.

<u>Границя послідовності.</u> Число a називається ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, починаючи з якого виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, як тільки $n \geq N$. У цьому випадку кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа a, і записують це так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Послідовність, яка має границю, називається ***збіжною***, а яка не має границі – ***розбіжною***.

Зауваження 3.2. Означення границі послідовності було дано Огюстом Коші (французький математик, 1789 – 1857) і привело до появи методу границь, застосування якого зумовило створіння диференціального та інтегрального числення математичного аналізу. Суть методу полягає в наступному: для визначення невідомої величини знаходять необмежене число її наближень, а потім знаходять саму величину як границю цих наближень. На основі поняття границі сформульовані поняття похідної і визначеного інтегралу.

<u>Властивості збіжних послідовностей.</u>

1) Якщо границя послідовності існує, то вона єдина. Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ $(a \neq b)$. Це означає, що для $\forall \varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх членів послідовності з номерами $n > N$ виконується нерівність: $|x_n - a| < \varepsilon$, $|x_n - b| < \varepsilon$. Візьмемо $\varepsilon = \frac{1}{3}|a - b|$.

Тоді $|x_n - a| < \frac{1}{3}|a - b|$, $n > N_1$; $|x_n - b| < \frac{1}{3}|a - b|$, $n > N_2$.

Візьмемо тепер натуральне число N, більше за N_1 і N_2. Отже, для $n > N$ одночасно будуть виконуватися обидві вищезазначені нерівності, а саме $|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| = |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{2}{3}|a - b|$.

Тобто $\left|a-b\right| < \frac{2}{3}\left|a-b\right|$, а це неможливо, якщо $a \neq b$. Таким чином, наше припущення, що послідовність може мати різні границі, привело до протиріччя.

2) Кожна збіжна послідовність є обмеженою.

3) Границя сталої величини дорівнює цій сталій величині.

Якщо $x_n = C$, $C = const$, то зрозуміло, що $\left|x_n - C\right| = \left|C - C\right| = 0 < \varepsilon$ для всіх $n = 1,2,3,...$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

4) Якщо існують скінченні границі послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то існують і границі їхньої суми, різниці, добутку та частки, а саме:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b.$$

Наслідок. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(C \cdot y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \Big/ \lim_{n\to\infty} y_n = a/b \quad (b \neq 0).$$

5) Кожна монотонна обмежена послідовність має границю.

Наприклад, відомо [1], що послідовність $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $n \in N$ монотонно зростає і обмежена для будь-якого числа $x \in R$, і тому вона є збіжною. Границю цієї послідовності називають ***експонентою дійсного числа*** x і позначають $\exp x$ або e^x. Отже, $\exp x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$, $x \in R$. Зокрема, якщо $x = 1$, дістаємо число $e = \exp 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828... \approx 2{,}718$.

<u>Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності.</u> Послідовність $\{\alpha_n\}$ називають ***нескінченно малою***, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, тобто для $\forall \varepsilon > 0$ існує такий номер $n_0(\varepsilon)$, що для всіх натуральних $n > n_0$ виконується нерівність $\left|\alpha_n\right| < \varepsilon$.

Послідовність $\{x_n\}$ називають ***нескінченно великою***, якщо для будь-якого $M > 0$ існує такий номер $n_0 = n_0(M)$, що для всіх членів послідовності з номерами $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n| > M$, і записують $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

<u>Зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою послідовностями.</u> Послідовність $\{x_n\}$ - нескінченно велика тоді й тільки тоді, коли послідовність $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно мала.

<u>Невизначені вирази.</u> Властивості границі суми, добутку і частки числових послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ доведені в припущенні, що ці послідовності мають скінченні границі, а границя знаменника в теоремі про границю частки не дорівнює нулю.

Розглянемо випадок, коли послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ є нескінченно великі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Сума та добуток таких послідовностей є нескінченно велика послідовність. Однак про їх різницю та частку у загальному випадку не можна нічого сказати. Отже, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то вираз $x_n - y_n$ є ***невизначеність*** типу $(\infty - \infty)$, а вираз $\dfrac{x_n}{y_n}$ є ***невизначеність*** типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Дослідження таких невизначеностей називають ***розкриттям невизначеності***.

Зауваження 3.3. Для розкриття невизначеності $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, яка задана відношенням двох многочленів, можна користуватися наступним правилом:

1) якщо найвищий степінь чисельника вище найвищого степеня знаменника, то границя дробу ***нескінченно велика***;

2) якщо найвищий степінь чисельника нижче найвищого степеня знаменника, то границя дробу дорівнює ***нулю***;

3) якщо найвищі степені чисельника і знаменника однакові, то границя дорівнює частці від поділу коефіцієнтів перед старшими степенями.

3.3.2. Границя функції

В багатьох прикладних задачах потрібно знайти значення функції $f(x)$ при прямуванні ***неперервного аргументу*** x до деякої точки x_0, в якій функція може бути і невизначена. Така поведінка функції в деякій точці x_0 називається границею функції в точці x_0. Оскільки x_0 може бути як скінченним числом, так і дорівнювати $\pm\infty$, то наведемо декілька означень границі функції.

Означення границі функції за Коші. Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякім околі точки x_0 крім, можливо, самої точки x_0. Число A є границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, і записують $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = A$, або $f(x) \to A$, якщо $x \to x_0$.

Це означення має наступну ***геометричну ілюстрацію***: якщо число A є границею функції $y = f(x)$, то всі значення функції $f(x)$ потрапляють в ε-окіл точки A, як тільки значення аргументу потрапляють в δ-окіл точки a, тобто всі точки графіка функції знаходяться у смузі, що обмежена прямими $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$.

Границя функції на нескінченності. Число A називають границею функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, якщо для довільного малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $M > 0$, що для всіх $x > M$ $(x < -M)$ виконуватиметься нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, і записують $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$). Геометрично це означає: якщо $f(x) \to A$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, то пряма $y = A$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$.

<u>Односторонні границі.</u> У наведених вище означеннях границі функції в точці x_0 змінна x може наближатися до x_0 довільним способом: залишаючись меншою від x_0 (зліва від x_0), більшою від x_0 (справа від x_0) чи коливаючись навколо x_0. Проте у деяких випадках спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому доцільно ввести означення ***односторонніх границь*** функції в точці.

Число A називають ***правосторонньою (лівосторонньою)*** границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що з нерівності $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Односторонні границі позначають так:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A_Л;$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = A_П.$$

Приклад 3.5. Знайти односторонні границі функції $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x + 3^{1/(x-2)}}$, якщо $x \to 2$.

***Розв'язання*.** Якщо $x \to 2 - 0$, то $\dfrac{1}{x-2} \to -\infty$ і $3^{1/(x-2)} \to 0$.

Отже, $\lim\limits_{x \to 2-0}\left(4 + \dfrac{1}{x + 3^{1/(x-2)}}\right) = \left|\begin{matrix} x = 2 - \alpha \\ \alpha \to 0 \end{matrix}\right| = \lim\limits_{\alpha \to 0}\left(4 + \dfrac{1}{2 - \alpha + 3^{1/(2-\alpha-2)}}\right) =$

$= 4 + \dfrac{1}{2} = 4{,}5$. Якщо $x \to 2 + 0$, то $\dfrac{1}{x-2} \to +\infty$ і $3^{1/(x-2)} \to +\infty$, тому

$$\lim_{x \to 2+0}\left(4 + \frac{1}{x + 3^{1/(x-2)}}\right) = \left|\begin{matrix} x = 2 + \alpha \\ \alpha \to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{\alpha \to 0}\left(4 + \frac{1}{2 + \alpha + 3^{1/(2+\alpha-2)}}\right) = 4.$$

Умова $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ є необхідною і достатньою для існування границі функції в точці x_0: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Приклад 3.6. Нехай $f(x)=\begin{cases} x,\ 0\le x\le 1; \\ 2,\ x>1. \end{cases}$ Обчислимо $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Розв'язання **.** $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} x=1$;

$$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} 2=2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, тому границі функції в точці $x_0=1$ не існує.

Зауваження 3.4. Слід відмітити, що теореми про границю суми, різниці, добутку і частки для числових послідовностей (функцій цілочисельного аргументу $x_n=f(n)$, $n\in N$) є справедливими і для функцій неперервного аргументу.

3.4. Нескінченно великі та нескінченно малі функції

Досі розглядались випадки, коли функція мала границею деяке число. Розглянемо тепер випадок, коли границею функції є нескінченність.

Функція $y=f(x)$ називається ***нескінченно великою при*** $x\to x_0$ (має ***границю*** ∞), якщо вона визначена у деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, і для будь-якого великого числа $M>0$ існує таке число $\delta=\delta(M)>0$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|>M$. Символічно записують це так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Зауваження 3.5. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то пряма $x=x_0$ є ***вертикальною асимптотою*** графіка функції $y=f(x)$.

Функцію $y=\alpha(x)$ називають ***нескінченно малою*** в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)=0$. Зазначимо, що x_0 може бути ∞, $+\infty$ або $-\infty$, якщо функція $\alpha(x)$ визначена на множині X і x_0 є ***точкою згущення*** цієї множини [3].

Наприклад, функція $y=\frac{x-2}{3x+4}$ є нескінченно малою в точці $x_0=2$, а функція $y=\frac{1}{x}$ нескінченно мала при $x\to\infty$, тому що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Властивості нескінченно великих функцій. Зв'яжемо з нескінченно великою функцією символ „∞”, з нескінченно малою функцією – символ „0”, а з обмеженою функцією – символ „c”. Тоді властивості нескінченно великих функцій можна записати так:

1. $\infty+\infty\to\infty$ (якщо функції ***одного знака***); 2. $\infty+c\to\infty$; 3. $\infty\cdot\infty\to\infty$; 4. $\infty\cdot c\to\infty\ (c\neq 0)$; 5. $\infty^m\to\infty\ (m>0)$; 6.частка від ділення обмеженої функції на нескінченно велику є ***нескінченно малою*** функцією.

Зауваження 3.6. З останньої властивості випливає ***зв'язок між нескінченно великими і малими функціями***: функція, обернена до нескінченно великої функції, є нескінченно малою, а функція, обернена до нескінченно малої, є нескінченно великою функцією.

Властивості нескінченно малих функцій легко запам'ятати, якщо використовувати їх символічний запис:

1. $0+0+...+0=0$; 2. $0\cdot 0\cdot ...\cdot 0=0$; 3. $0\cdot c=0$; 4. $\frac{0}{c}=0\ \ (c\neq 0)$, якщо розглядати ***скінченну*** кількість нескінченно малих функцій.

Порівняння нескінченно малих функцій. Деколи доводиться порівнювати дві або більше нескінченно малих функцій. Нехай функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі в точці x_0. Для того, щоб порівняти ці функції за швидкістю прямування до нуля, необхідно обчислити границю їх відношення. Подамо ряд означень.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$, де $A\neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають ***нескінченно малими одного порядку малості*** і записують $\alpha(x)=O(\beta(x))$. Якщо при цьому $A=1$, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають ***еквівалентними нескінченно малими*** і записують $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

2. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0$, то функцію $\alpha(x)$ називають ***нескінченно малою порядку k щодо нескінченно малої*** $\beta(x)$ і записують $\alpha(x) = 0\left(\beta^k(x)\right)$.

3. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функцію $\alpha(x)$ називають ***нескінченно малою вищого порядку малості, ніж*** $\beta(x)$, і записують $\alpha(x) = 0(\beta(x))$.

Приклад 3.7. Порівняти наведені нескінченні малі.

1. Нехай $\alpha(x) = x^2 - 3x$, $\beta(x) = x - 3$ нескінченно малі в точці $x = 3$.

2. Нехай $\alpha(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$, $\beta(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

3. Нехай $\alpha(x) = tgx$, а $\beta(x) = x$.

Розв'язання. 1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} x = 3$. Отже, $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ - нескінченно малі одного порядку.

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \beta(x) = 0$, тобто на нескінченності ці функції нескінченно малі. Обчислимо $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1} = 0$. Отже, функція $\alpha(x)$ є нескінченно мала вищого порядку, ніж $\beta(x)$ при $x \to \infty$.

3. Оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \right) = 1$, то $tgx \sim x$ при $x \to 0$. Отже, $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні.

Має місце наступна <u>**теорема**</u>: якщо в точці: x_0 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ і $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Зауваження 3.7. Доведено, що в точці при $x \to 0$:

1) $\sin x \sim x$, $\sin m\,x \sim m\,x$; 5) $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$;

2) $tgx \sim x$, $tg\, m\, x \sim m\, x$; 6) $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n}$;

3) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$; 7) $\arcsin x \sim x$;

4) $\ln(1+x) \sim x$; 8) $arctg\, x \sim x$.

Приклад 3.8. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{e^{6x}-e^{2x}}$.

Розв'язання. Використаємо асимптотичні формули: $\sin 5x \sim 5x$, $e^{6x}-1 \sim 6x$, $e^{2x}-1 \sim 2x$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{e^{6x}-e^{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{e^{6x}-1+1-\left(e^{2x}-1+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{6x-2x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}$.

Зауваження 3.8. При знаходженні границь функцій будемо користуватися тим, що для основних елементарних функцій в будь-якій точці із області визначення має місце рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x_n\right)$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Наприклад, $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x^2+2x\right) = x_0^2 + 2x_0$.

Зазначимо, що як і у випадку границі числової послідовності, для функції неперервного аргументу можливі невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, а також $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$ і $\left(1^\infty\right)$.

Зауваження 3.9. Наступні вирази не є невизначеними:

1) $\infty^\infty = \infty$; 2) $0^\infty = 0$; 3) $a^\infty = \begin{cases}\infty, \text{ якщо } a>1\\ 0, \text{ якщо } 0<a<1\end{cases}$;

4) $a^{-\infty} = \begin{cases}0, \text{ якщо } a>1\\ \infty, \text{ якщо } a<0\end{cases}$; 5) $\infty^a = \begin{cases}\infty, \text{ якщо } a>0\\ 0, \text{ якщо } a<0\end{cases}$.

3.5. Визначні границі

Під час обчислення границь часто доводиться використовувати дві важливі границі.

Для розкриття невизначеностей вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$ у тригонометричних виразах користуються таким твердженням: функція $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ має границю, що дорівнює 1, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ - ***перша визначна границя***.

Друга визначна границя: границя функції $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ при $x\to\infty$ дорівнює e, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=e$, або $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\left(1^{\infty}\right)=e\approx 2{,}71$.

Доведено, що число e - ірраціональне число, і його розклад в десятковий дріб має вигляд $e=2{,}718281828459045...$. Це число в математиці грає таку важливу роль, як і число π. Логарифми за основою e називаються натуральними, вони зв'язані з логарифмами за основою a за допомогою рівності $\ln x=\frac{1}{\log_a e}\cdot\log_a x$.

Зауваження 3.10. При обчисленні границь, зв'язаних з числами e, застосовується твердження:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

3.6. Неперервність функцій

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому її околі. Дамо декілька означень неперервності функції.

1. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною*** в точці x_0, якщо існує границя функції в цій точці, і вона дорівнює значенню функції в точці, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Функцію $y = f(x)$ називають неперервною в точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Приростом аргументу або ***незалежної змінної*** x в точці x_0 називається різниця $\Delta x = x - x_0$. ***Приростом функції*** $y = f(x)$ в точці x_0, що відповідає приросту аргументу Δx, називається різниця: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

3. Функцію $y = f(x)$ називають ***неперервною в точці*** x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

4. Функцію $y = f(x)$ називають ***неперервною*** в точці x_0, якщо лівостороння границя $f(x_0 - 0)$ дорівнює правосторонній границі $f(x_0 + 0)$ і дорівнює значенню функції в точці $f(x_0)$, тобто $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) =$ $= f(x_0)$.

Наведені означення еквівалентні між собою.

Зауваження 3.11. Сума, різниця, добуток декількох неперервних в точці x_0 функцій є неперервні в точці. Якщо $\varphi(x_0) \neq 0$, то частка двох неперервних функцій $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ є неперервною функцією.

Функцію називають ***неперервною на проміжку*** X, якщо вона неперервна в кожній його точці. Кожна ***елементарна*** функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

Виходячи з означення 4 неперервності функції в точці, точка x_0 буде ***точкою розриву*** функції, якщо виконується одна з трьох умов:

1) у точці x_0 функція невизначена;

2) у точці x_0 не існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (наприклад, $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ або одна з односторонніх границь не існує чи дорівнює нескінченності);

3) існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, але вона не дорівнює значенню функції $f(x_0)$.

Приклад 3.9. Функція $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ невизначена в точці $x = 0$, але односторонні границі в цій точці існують, скінченні і рівні між собою: $f(0-0) = f(0+0) = 1$. Досить покласти $f(0) = \dfrac{\sin x}{x} = 1$, щоб функція була неперервною.

Класифікація точок розриву та головні властивості неперервних на відрізку функцій наведені в [1].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3. ФУНКЦІЇ. ГРАНИЦІ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Границя функції не залежить від того, чи визначена функція в граничній точці, чи ні. Але ця умова має істотне значення при знаходженні границь функції.

Якщо функція є елементарною і якщо значення аргументу належить її області визначення, то обчислення границі функції зводиться до простої підстановки граничного значення аргументу, так як границя елементарної функції $f(x)$ при x, що прямує до значення x_0, яке входить в область її визначення, дорівнює значенню функції при $x = x_0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (зауваження 3.8).

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 2}{4 + 5x}$.

Розв'язання. За теоремами про границі (п. 3.3.1.) маємо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-2}{4+5x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(4+5x)}=\frac{3\cdot 2-2}{4+5\cdot 2}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}.$$

Розглянемо приклади на знаходження границь у разі невизначеностей.

Невизначеність $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+2x-3}{4x^2-7x+4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. При розкритті невизначеності виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ чисельник і знаменник дробу ділять на найвищий степінь змінної, який зустрічається в членах дробу.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+2x-3}{4x^2-7x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{8x^2+2x-3}{x^2}}{\dfrac{4x^2-7x+4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{8x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{7x}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{4-\dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(8+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}8+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}}=\frac{8+0-0}{4-0+0}=2.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x-5}{x^3+2x+4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Поділимо чисельник і знаменник на x^3 (найвищий степінь x). Знаходимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3x-5}{x^3+2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^2+3x-5}{x^3}}{\dfrac{x^3+2x+4}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^2}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}-\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{2x}{x^3}+\dfrac{4}{x^3}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}} =$$

$$= \frac{0+0-0}{1+0+0} = 0.$$

Невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$

Розглянемо випадок, коли при $x \to x_0$ функція є відношенням двох нескінченно малих величин (невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$).

Якщо знаходиться границя дробу, чисельник і знаменник якого многочлени, які в граничній точці перетворюються в нуль, то згідно з теоремою Безу обидва многочлени розділяться без залишку на $x - x_0$, тобто такий дріб можна скоротити на $x - x_0$.

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$.

Розв'язання. Спочатку переконаємося, що границю функції не можна знайти безпосередньо підстановкою змінної, тобто при вказаному значенні аргументу вона представляє відношення двох нескінченно малих величин (невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$).

Розкладемо знаменник дробу на множники $(x-3)(x+3)$ і скоротимо дріб на $(x-3)$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{3-3}{3^2-9} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$.

Розв'язання. Переконавшись, що маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники за формулою

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 – корні тричлена.

$2x^2 - 11x + 5 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 81$,

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 + 9}{4} = 5$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 - 9}{4} = \frac{1}{2}$.

$2x^2 - 11x + 5 = 2(x - 5)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

$3x^2 - 14x - 5 = 0$, $D = 14^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 256$.

$x_1 = \frac{14 + 16}{6} = 5$, $x_2 = \frac{14 - 16}{6} = -\frac{1}{3}$. $3x^2 - 14x - 5 = 3(x - 5)\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 5} \frac{2(x - 5)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3(x - 5)\left(x + \frac{1}{3}\right)} = \lim_{x \to 5} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{2x - 1}{3x + 1} = \frac{9}{16}.$$

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x}$.

Розв'язання. З'ясувавши спочатку, що при вказаному значенні аргументу задана функція перетворюється в відношення двох нескінченно малих величин (випадок $\left(\frac{0}{0}\right)$), перетворимо дріб таким чином, щоб скоротити його на множник, який прямує до нуля. Знищимо ірраціональність в чисельнику шляхом множення чисельника і знаменника на вираз $\left(1 + \sqrt{x + 1}\right)$ (спряжений до чисельника, щоб одержати формулу: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$), потім скоротимо дріб на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}$.

Розв'язання. Тут границі чисельника і знаменника дорівнюють нулю, тобто маємо невизначеність $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Перенесемо ірраціональність із чисельника в знаменник. Скористаємося відомою формулою $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$.

Отже, для того, щоб одержати в чисельнику різницю кубів, необхідно його помножити на $\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1$.

Помноживши і знаменник на цю величину, одержуємо:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt[3]{x-6}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1\right)}{(x-7)\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-6-1}{(x-7)\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1}=\frac{1}{3}.$$

Невизначеність $(\infty-\infty)$

Розглянемо випадок, коли при $x\to x_0$ або $x\to\infty$ функція $f(x)$ представляє різницю двох додатних нескінченно великих величин (випадок $(\infty-\infty)$).

Цей випадок знаходження границі функції можна привести до випадку $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ або $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ шляхом перетворення функції до вигляду дробу.

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 9. Зайти $\lim\limits_{x+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{5x}{x}}{\dfrac{x}{x}+\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{5x}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{5}{x}}{1+\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}}=$$

$$=\frac{-5}{1+1}=-2{,}5.$$

Перша визначна границя

Для знаходження границь з невизначеністю $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, які містять тригонометричні функції, використовують **першу визначну границю**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}.$

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$.

Розв'язання. Перетворимо тригонометричну функцію:

$1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}\cdot 4}{2\sin^2\frac{x}{2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2.$$

Приклад 12. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{x^2}$.

Розв'язання. Перетворимо різницю косинусів у добуток за формулою:

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{7x+3x}{2}\cdot\sin\frac{7x-3x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\cdot\sin 2x}{x^2}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=-20.$$

Друга визначна границя

Розглянемо випадок, коли при $x\to x_0$ або $x\to\infty$ функція $f(x)$представляє степінь, основа якого прямує до одиниці, а показник — до нескінченності (невизначеність $\left(1^\infty\right)$). В такому випадку для знаходження границі функції використовується друга важлива границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e.$$

Приклад 13. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+1}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3-3-1}{4x+3}\right)^{3x+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x+3}-\frac{4}{4x+3}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{4x+3}{4}}\right)^{-\frac{4x+3}{4}}\right]^{-\frac{4(3x+1)}{4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{12x+4}{4x+3}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x+4}{4x+3}}=e^{-\frac{12}{4}}=e^{-3}.$$

Приклад 14. Знайти $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{7x}{x^2-1}}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{7x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}((1+3x-1-2))^{\frac{7x}{x^2-1}}=$

$$=\lim_{x\to1}(1+3(x-1))^{\frac{7x}{(x-1)(x+1)}}=\lim_{x\to1}\left[(1+3(x-1))^{\frac{1x}{3(x-1)}}\right]^{\frac{21x}{(x+1)}}=\lim_{x\to1}e^{\frac{21x}{(x+1)}}=e^{\frac{21}{2}}.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчисліть границі.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-8x^2+1}{x^5+3}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+3}{x^2-9x}$;
3. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;
4. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x+3)\sqrt{1-x}}{9-x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{8+x}-3}{x-1}$;
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 8x+\sin 6x}{9x}$;
7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg 8x}{\sin 2x}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x^2}$;
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-1}\right)^{3x+1}$.

ЛЕКЦІЯ 4. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

4.1. Означення похідної. Механічний та фізичний зміст похідної

Нехай на деякому проміжку $[a,b]$ задано функцію $y=f(x)$. Візьмемо деяку точку $x\in[a,b]$, значення функції в ній буде $y=f(x)$. Надамо x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x+\Delta x$ також належала проміжку $[a,b]$. Знайдемо приріст функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Таким чином $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Зауваження 4.1. Якщо в деякій точці x границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, то похідну $f'(x)$ в цій точці називають нескінченною. Якщо границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в деякій точці не існує, то не існує в цій точці і похідна.

Приклад 4.1. Знайти похідну функції $y=x^2$.

Розв'язання. 1) $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$;

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$.

3) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

Отже, $(x_2)'=2x$.

Якщо функцією є шлях, який залежить від часу t, $s = f(t)$, то похідна $\frac{ds}{dt} = s'(t)$ це миттєва швидкість руху в момент t: $v = s'(t)$. Це є ***механічний зміст*** похідної.

В загальному випадку дослідження будь-якого фізичного процесу зводиться до вивчення властивостей функції, що його описує. Похідна $f'(x)$ показує, як швидко змінюється функція $f(x)$ відносно зміни її аргументу. Це ***фізичний зміст*** похідної.

4.2. Геометричний зміст похідної

Дотичною до графіка функції $y = f(x)$ ***в точці*** $M_0(x_0, y_0)$ називають граничне положення M_0T січної M_0P, коли точка P уздовж кривої $f(x)$ прямує до точки M_0 (рис. 4.1) :

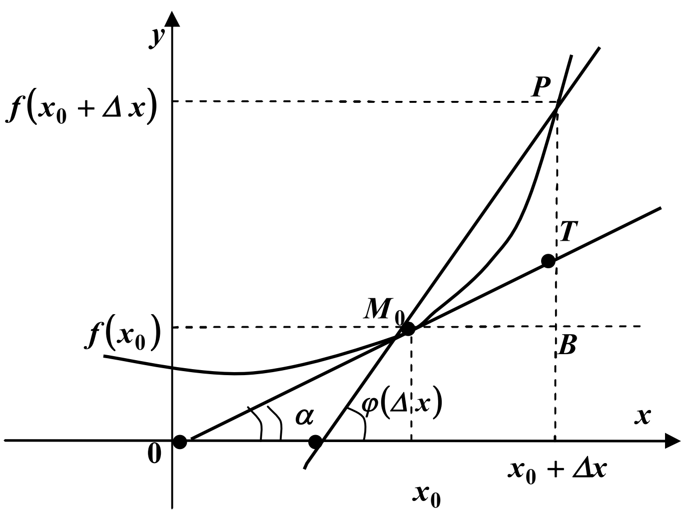


Рис.4.1

З означення дотичної випливає, що вона існує тоді, коли існує кутовий коефіцієнт дотичної $k = tg\alpha$, який є граничним значенням кутового коефіцієнта січної $k(\Delta x) = tg\varphi(\Delta x)$, тобто $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x)$. З трикутника M_0PB маємо:

$$k(\Delta x) = tg\varphi(\Delta x) = \frac{PB}{M_0B} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тоді $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha$.

Таким чином, похідна $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ до графіка функції. Інакше, похідна в даній точці x_0 дорівнює тангенсові кута α, утвореного дотичною до графіка функції в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ з додатнім напрямом осі $0x$.

З курсу аналітичної геометрії відомо, що рівняння пучка прямих, які проходять через точку $M_0(x_0, f(x_0))$, має вигляд $y - f(x_0) = k \cdot (x - x_0)$.

Візьмемо $k = f'(x_0)$, отримаємо ***рівняння дотичної***:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Нормаль до кривої в заданій точці перпендикулярна до дотичної і має кутовий коефіцієнт $k_H = -\dfrac{1}{k} = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Отже, рівняння нормалі $y = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції. Функції, які мають похідні в точці x, називаються ***диференційованими в цій точці***. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

У точках розриву функції $y = f(x)$ скінченна границя відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не існує. Отже, неперервність функції – необхідна умова існування похідної. Обернене твердження неправильне. Так, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x = 0$, але вона не має похідної в цій точці [1].

4.3. Основні правила диференціювання

Теорема 4.1. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ в точці x мають похідну, то їхня сума (різниця), добуток і частка за умови $v'(x) \neq 0$ мають у цій точці похідні, причому, справджуються формули [1]:

1) $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$;

2) $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$;

3) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$.

<u>Теорема 4.2.</u> Похідна постійної величини C дорівнює 0, оскільки $f(x+\Delta x)=C$, $\Delta y = C - C = 0$, $f'(x) = C' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Наслідок 4.1. Сталий множник можна виносити за знак похідної: $(C \cdot u)' = C' \cdot u + C \cdot u' = C_{u'}$, оскільки $C' = 0$.

Наслідок 4.2. Похідна добутку декількох диференційованих функцій дорівнює сумі добутків похідної кожної з цих функцій на всі решта функції співмножники. Наприклад, $(uvw)' = (uv)' \cdot w + uv \cdot (v)' = (u'v + uv') \cdot w + {}$ $+ uvw' = u'vw + v'uw + w'uv$.

Приклад 4.2. Знайти похідну функції $y = x^n$ $(n \in N)$.

Розв'язання. $x^n = \underbrace{x\,x\,x\,...\,x}_{n}$. За наслідком 4.2 маємо:

$$(x^n)' = \underbrace{x'x^{n-1} + x'x^{n-1} + ... + x'x^{n-1}}_{n} = nx^{n-1}.$$

Наслідок 4.3. Доведемо справедливість формул $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$; $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $(x \neq \pi n)$.

Розв'язання. Обчислимо похідну функції $y = \sin x$ за означенням:

$f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x)$;

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = \left\{ \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \right\} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right); \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \lim \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2} \cdot 2} = \cos x, \text{ тобто } (\sin x)' = \cos x.$$

Аналогічно $(\cos x)' = -\sin x$.

Отже, $(tgx)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Аналогічно $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Приклад 4.3. Обчислити $y'(x)$, якщо $y = \dfrac{ctgx}{2 + 3\sin x}$.

Розв'язання. $y' = \dfrac{(ctgx)' \cdot (2 + 3\sin x) - (2 + 3\sin x)' \cdot ctgx}{(2 + 3\sin x)^2} =$

$$= \frac{-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot (2 + 3\sin x) - 3\cos x \cdot ctgx}{(2 + 3\sin x)^2} = \frac{-2 - 3\sin x - 3\cos^2 x \cdot \sin x}{\sin^2 x (2 + 3\sin x)^2} =$$

$$= -\frac{2 + 3\sin x (1 + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cdot (2 + 3\sin x)^2}.$$

4.4. Похідна від складної функції

Нехай y - складна функція x, тобто y - функція від аргументу u: $y = f(u)$, аргумент u, в свою чергу, є деяка функція від незалежної змінної x: $u = \varphi(x)$. Отже, $y = f(\varphi(x))$. Наведемо (без доведення) наступну теорему.

Теорема 4.3. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має в деякій точці $x_0 \in X$ похідну $u'_x = \varphi'(x_0)$, а функція $y = f(u)$ має у відповідній точці $u_0 = \varphi(x_0)$ похідну $y'_u = f'(u_0)$, то похідна складної функції в точці $x_0 \in X$ обчислюється за формулою: $y'_x = f'_u(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = y'_u \cdot u'_x$ ([1], [3]).

Приклад 4.4. Обчислити похідну $y = tg\, ln(x^2+4)$.

Розв'язання. $y' = \left(tg\, ln(x^2+4)\right)' = \dfrac{1}{cos^2\, ln(x^2+4)} \cdot \left(ln(x^2+4)\right)' =$

$$= \frac{1}{cos^2\, ln(x^2+4)} \cdot \frac{1}{x^2+4} \cdot (x^2+4)' = \frac{1}{cos^2\, ln(x^2+4)} \cdot$$

$$\frac{1}{x^2+4} \cdot 2x = \frac{2x}{cos^2\, ln(x^2+4) \cdot (x^2+4)}.$$

4.5. Похідна функції, заданої неявно

Нехай функція y від аргументу x задана неявно рівністю $F(x, y) = 0$. Продиференціюємо обидві частини цього рівняння за x, використовуючи правило диференціювання складної функції, і з отриманого рівняння визначимо $y'(x)$.

Приклад 4.5. Обчислити похідну функції $y = arctg\, x$.

Розв'язання. Оберненою до функції $y = arctg\, x$ є функція $x = tg\, y$, $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ - пара взаємно обернених функцій. Друга рівність задає неявно функцію $y = f(x)$. Продиференціюємо цю рівність по x: $1 = \varphi'_y \cdot y'_x$ або $1 = x'_y \cdot y'_x$. Звідси, якщо $x'_y \ne 0$, $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

Отже, $x'_y = \dfrac{1}{cos^2\, y}$, $y'_x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{cos^2\, y}} = cos^2\, y$. Виразимо $cos^2\, y$ через x.

Маємо $tg\, y = x$, $1 + tg^2 y = \dfrac{1}{cos^2\, y}$. Тому $\dfrac{1}{cos^2\, y} = 1 + x^2$, $cos^2\, y = \dfrac{1}{1+x^2}$ і $y' = (arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Таким чином можна отримати похідні інших обернених тригонометричних функцій.

Приклад 4.6. Обчислити похідну від показникової функції $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини рівності $y = a^x$ при основі e: $\ln y = x \cdot \ln a$.

Продиференціюємо обидві частини одержаної рівності: $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a$.

Звідси, $y' = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$. Якщо $a = e$, то $(e^x)' = e^x$.

4.6. Таблиця похідних

Наведемо таблицю основних формул диференціювання, враховуючи правила 4.3, встановлені формули похідних і узагальнивши їх на складні функції.

№ з/п	Функція	Похідна
1	$y = C$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = Cu$	$y' = Cu'$
4	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
5	$y = uv$	$y' = u'v + v'u$
6	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
7	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
7а)	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$
7б)	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
8	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
9	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$

10	$y = tg\,u$	$y' = \frac{u'}{cos^2\,u}$
11	$y = ctg\,u$	$y' = -\frac{u'}{sin^2\,u}$
12	$y = arcsin\,u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	$y = arccos\,u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$y = arctg\,u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
15	$y = arcctg\,u$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
16	$y = log_a\,u$	$y' = \frac{u'}{u\,ln\,a}$
16а)	$y = ln\,u$	$y' = \frac{u'}{u}$
17	$y = a^u$	$y' = a^u\,ln\,a \cdot u'$
17а)	$y = e^u$	$y' = e^u u'$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №4
ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ. ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

а) $y = 3x^5$; г) $y = 10\sqrt[3]{x}$;

б) $y = \frac{9}{x}$; д) $y = \frac{7}{\sqrt[3]{x^5}}$

в) $y = \frac{2}{x^3}$;

Розв'язання. а) Винесемо сталий множник за знак похідної, а потім застосуємо формули (3,7) таблиці похідних $y' = 3\left(x^5\right)' = 3\cdot 5x^{5-1} = 15\cdot x^4$.

Аналогічно дістанемо: б) $y' = 9\left(\frac{1}{x}\right)' = 9\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{9}{x^2}$ (тут застосовано формули 3,7а);

в) $y' = 2\left(\frac{1}{x^3}\right)' = 2\left(x^{-3}\right)' = 2\cdot(-3)\cdot x^{-3-1} = -\frac{-6}{x^4}$;

г) $y' = 10\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = 10\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{10}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{10}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$;

д) $y' = 7\left(x^{-\frac{5}{3}}\right)' = 7\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot x^{-\frac{5}{3}-1} = -\frac{35x^{-\frac{8}{3}}}{3} = -\frac{35}{3\sqrt[3]{x^8}}$;

Приклад 2. Знайти похідні функції:

а) $y = 3 + 7x^2 + \frac{6}{x^2} - \frac{4\sqrt[3]{x}}{5} - \frac{8}{\sqrt{8}}$; б) $y = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt[5]{x}} - 5\ln 3$;

в) $y = 5^x \arccos x$; г) $y = \frac{8x-7}{2x^3 + x^2}$

Розв'язання. а) Знайдемо похідну від алгебраїчної суми як алгебраїчну суму похідних доданків:

$$y' = (3)' + (7x^2)' + \left(\frac{6}{x^3}\right)' - \left(\frac{4\sqrt{x}}{5}\right)' - \left(\frac{8}{\sqrt{x}}\right)' = 0 + 7\cdot 2x + 6\cdot(-2)\cdot x^{-3-1} -$$

$$-\frac{4\cdot 1}{5\cdot 2\sqrt{x}} - 8\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = 14x - \frac{12}{x^4} - \frac{2}{5\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{x^3}};$$

б) $y' = 2\left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{2-\frac{1}{5}}\right)' - (5\ln 3)' = 2\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{5}\cdot x^{\frac{4}{5}} - 0 = 3\sqrt{x} + \frac{9\sqrt[5]{x^4}}{5}$

в) Знайдемо похідну, використовуючи правило диференціювання добутку: $(u\,v)' = u'v + u\,v'$.

$$y' = \left(5^x\right)' \arccos x + 5^x \cdot (\arccos x)' = 5^x \ln 5 \cdot \arccos x - 5^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

г) Використаємо правило диференціювання частки: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$:

$$y' = \frac{(8x-7)' \cdot \left(2x^3+x^2\right) - (8x-7)\cdot\left(2x^3+x^2\right)'}{\left(2x^3+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{8\cdot\left(2x^3+x^2\right)-(8x-7)\cdot\left(6x^2+2x\right)}{\left(2x^3+x^2\right)^2} = \frac{16x^3+8x^2-48x^3+42x^2-16x^2+14x}{\left(2x^3+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-32x^3+34x^2+14x}{(2x^3+x^2)^2}.$$

Приклад 3. Знайти похідні складних функцій:

а) $y = \left(5x^3+4x^2+8\right)^4$; б) $y = \sqrt[3]{7+x^4}$;

в) $y = 8\sin^2 x$ г) $y = \arcsin 2x$

д) $y = 4^{\cos^2 3x}$ е) $y = e^{\sqrt{x^2+x-3}}$

ж) $y = tg\dfrac{1+x}{3x}$ з) $y = \ln^3 ctg 4x$

і) $y = \left(4x^3+1\right)^2 \cdot 7^{\sqrt{x^3-1}}$; к) $y = \dfrac{\arcsin^5\sqrt{x}}{\ln(3-2x)}$.

Розв'язання. а) Знаходимо похідну за формулою 7:

$$y' = 4\left(5x^3+4x^2+8\right)^3 \cdot \left(5x^3+4x^2+8\right)' =$$

$$= 4\left(5x^3+4x^2+8\right)^3 \cdot \left(15x^2+8x\right).$$

б) $y' = \left(\sqrt[3]{7+x^4}\right)' = \left(\left(7+x^4\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}\left(7+x^4\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \left(7+x^4\right)' =$

$$=\frac{1}{3}\left(7+x^4\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4x^3=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{\left(7+x^4\right)^2}}.$$

в) Сталий множник **8** виносимо за знак похідної. Потім продиференціюємо $\sin^2 x$ за формулою 7, а далі і $\sin x$; знайдені результати перемножуємо.

$$y'=\left(8\sin^2 x\right)'=8\left(\sin^2 x\right)'=8\cdot 2\sin x\cdot\left(\sin x\right)'=16\sin x\cdot\cos x=8\sin 2x.$$

г) $y'=\left(\arcsin 2x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$

д) $y'=\left(4^{\cos^2 3x}\right)'=4^{\cos^2 3x}\ln 4\cdot\left(\cos^2 3x\right)'=$

$$=4^{\cos^2 3x}\ln 4\cdot 2\cos 3x\cdot\left(\cos 3x\right)'=4^{\cos^2 3x}\ln 4\cdot 2\cos 3x\cdot\left(-\sin 3x\right)\cdot 3=$$

$$=-3\cdot 4^{\cos^2 3x}\ln 4\cdot 2\cos 3x\sin 3x=-3\cdot 4^{\cos^2 3x}\ln 4\cdot\sin 6x.$$

е) $y'=\left(e^{\sqrt{x^2+x-3}}\right)'=e^{\sqrt{x^2+x-3}}\cdot\left(\sqrt{x^2+x-3}\right)'=$

$$=e^{\sqrt{x^2+x-3}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+x-3}}\left(x^2+x-3\right)'=\frac{(2x+1)e^{\sqrt{x^2+x-3}}}{2\sqrt{x^2+x-3}}.$$

ж) Перш за все необхідно про диференціювати функцію $tg\, u$ за формулою 10, але оскільки її аргумент є дріб, то слід знайти похідну дробу і одержані похідні перемножити:

$$y'=\left(tg\frac{1+x}{3x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{3x}}\left(\frac{1+x}{3x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{3x}}\frac{(1+x)'\cdot 3x-(1+x)(3x)'}{(3x)^2}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{3x}}\frac{1\cdot 3x-(1+x)3}{9x^2}=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{3x}}\frac{3x-3-3x}{9x^2}=-\frac{1}{3x^2\cos^2\frac{1+x}{3x}}.$$

з) $y'=\left(\ln^3 ctg 4x\right)'=3\ln^2 ctg 4x\cdot\left(\ln ctg 4x\right)'=3\ln^2 ctg 4x\dfrac{1}{ctg 4x}\left(ctg 4x\right)'=$

$$=3\ln^2 ctg 4x\frac{1}{ctg 4x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 4x}\right)(4x)'=-3\ln^2 ctg 4x\frac{\sin 4x}{\cos 4x}\cdot\frac{1}{\sin^2 4x}\cdot 4=$$

$$= -12\,ln^2\, ctg4x\,\frac{1}{cos\,4x\,sin\,4x} = -\frac{24\,ln^2\, ctg4x}{sin\,8x}.$$

і) $$y' = \left(\left(4x^3+1\right)^2 \cdot 7^{\sqrt{x^3-1}}\right)' = \left(\left(4x^3+1\right)^2\right)' \cdot 7^{\sqrt{x^3-1}} +$$

$$+\left(4x^3+1\right)^2 \cdot \left(7^{\sqrt{x^3-1}}\right)' = 2\cdot\left(4x^3+1\right)\left(4x^3+1\right)' \cdot 7^{\sqrt{x^3-1}} +$$

$$+\left(4x^3+1\right)^2 \cdot 7^{\sqrt{x^3-1}} \cdot ln\,7 \cdot \left(\sqrt{x^3-1}\right)' = 2\cdot\left(4x^3+1\right)\cdot 12x^2 \cdot 7^{\sqrt{x^3-1}} +$$

$$+\left(4x^3+1\right)^2 \cdot 7^{\sqrt{x^3-1}} \cdot ln\,7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot 3x^2 = 24\left(4x^3+1\right)x^2 \cdot 7^{\sqrt{x^3-1}} +$$

$$+\left(4x^3+1\right)^2 \cdot 7^{\sqrt{x^3-1}} \cdot ln\,7 \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}.$$

к) $$y' = \frac{\left(arcsin^5\sqrt{x}\right)' \cdot ln\left(3-2x\right) - arcsin^5\sqrt{x} \cdot \left(ln\left(3-2x\right)\right)'}{ln^2\left(3-2x\right)} =$$

$$= \frac{5\,arcsin^4\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' \cdot ln\left(3-2x\right) - arcsin^5\sqrt{x} \cdot \frac{\left(3-2x\right)'}{3-2x}}{ln^2\left(3-2x\right)} =$$

$$= \frac{5\,arcsin^4\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot ln\left(3-2x\right) - arcsin^5\sqrt{x} \cdot \frac{-2}{3-2x}}{ln^2\left(3-2x\right)} =$$

$$= \frac{5\,arcsin^4\sqrt{x} \cdot \frac{ln\left(3-2x\right)}{2\sqrt{\left(1-x\right)x}} + \frac{2\,arcsin^5\sqrt{x}}{3-2x}}{ln^2\left(3-2x\right)}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні функцій:

1) $y = 7x^5 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^4} - 4\sqrt{6};$

2) $y = \sqrt{1 - x^3};$

3) $y = \frac{1 - x^2}{5^x};$

4) $y = x^4 \cdot tgx + sin\frac{3\pi}{2};$

5) $y = e^{cos\,x} \cdot sin^2\,x;$

6) $y = ctg\sqrt[3]{7 + x^2};$

7) $y = 2^{arcsin^3 5x};$

8) $y = log_3\left(2x^4 - 5\right);$

9) $y = \left(x^2 + 1\right) arctg\frac{x}{2};$

10) $y = \frac{ln\,arccos\,4x}{\left(1 - 4x\right)^2}.$

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Дубовик В.П., Юрик І І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
2. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П.Дубовик, І.І.Юрик, І.П.Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 480 с.
3. Тріщ Б.М. Основи вищої математики. – Львів: ЛНУ, 2008. – 403 с.
4. Письменный Д.Г. Конспект лекций по высшей математике полный курс / Дмитрий Письменный. – 7-е изд. М.: Айрис-пресс. 2008. – 608 с.
5. Клепко В.Ю, Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. – 2-ге видання. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.

Навчальне видання

Павленко Анатолій Васильович
Щербина Ірина Володимирівна
Пасічник Ірина Володимирівна
Бас Тетяна Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Тем. план 2014, поз. 92

Підписано до друку 05.06.2014. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 4,94. Умов. друк. арк. 4,88. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ