МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М. КАДИЛЬНИКОВА, І.Б. КОЧЕТКОВА,
Л.Ф. СУШКО, О.В. БІЛОВА

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
У ПРОСТОРІ

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 30.01.2012

Дніпропетровськ НМетАУ 2012

УДК 517(07)

Аналітична геометрія у просторі: Навч. посібник / Т.М. Кадильникова, І.Б. Кочеткова, Л.Ф. Сушко, О.В. Білова. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 48 с.

Наведені докладні рекомендації до вивчення розділу «Аналітична геометрія у просторі». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв’язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів напряму 6.050401 – металургія.

Іл. 39 . Бібліогр.: 4 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

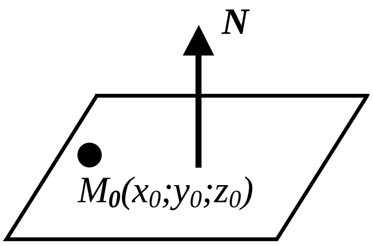
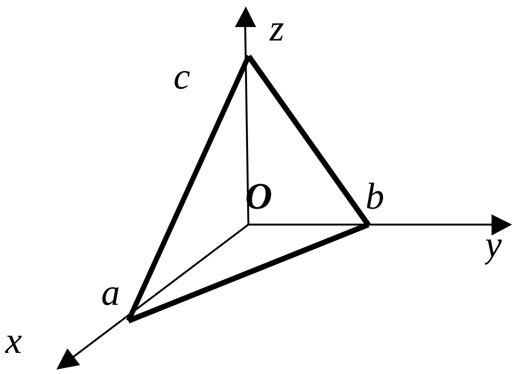
Рецензенти: О.Ю. Дашкова, д-р фіз.-мат. наук, проф. (ДНУ)
Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)

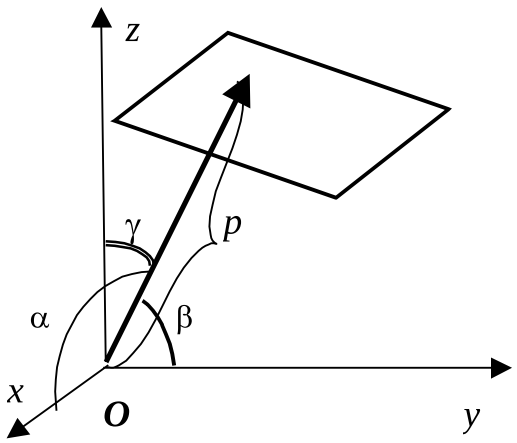
Розділ 1

ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

1.1. Короткі теоретичні відомості

Будь-яке лінійне рівняння зі змінними ***x, y, z*** можна розглядати як рівняння у декартових координатах площини у просторі. Різні форми рівняння площини наведені у таблиці .

Назва	**Загальний вигляд**	**Геометричний зміст параметрів**
Канонічне (рівняння площини, яка проходить через задану точку)	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 	***A, B, C***–координати вектора нормалі до площини; x_0, y_0, z_0 - координати точки, яка належить площині
Загальне	$Ax+By+Cz+D=0$	***A, B, C*** – координати вектора нормалі до площини
У відрізках на осях	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 	a, b, c – координати точок перетину площини з осями Ox, Oy та Oz відповідно

Нормальне	$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$  	α, β, γ – кути, які створює з осями Ox, Oy та Oz проведена з початку координат до площини нормаль
Рівняння площини, яка проходить через три точки	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$	(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) та (x_3, y_3, z_3) – координати трьох точок, які належать площині

Якщо у рівнянні відсутній доданок з якою-небудь змінною, то площина паралельна відповідній координатній осі; наприклад, площина, яку задано рівнянням $Ax + Cz + D = 0$, паралельна осі Oy .

Якщо у рівнянні відсутні доданки з двома змінними, то площина паралельна відповідній координатній площині; наприклад, площина, яку задано рівнянням $Ax + D = 0$, паралельна площині Oyz.

Якщо у загальному або у нормальному рівнянні площини відсутній вільний член, тобто рівняння має вигляд $Ax + By + Cz = 0$, площина проходить через початок координат.

Наведемо рівняння координатних площин :

Oxy – $z = 0$; Oyz – $x = 0$; Oxz – $y = 0$.

Кут між площинами α та β дорівнює гострому куту між їх нормалями $\overline{N}_\alpha$ та $\overline{N}_\beta$, тобто

$$\cos(\alpha \text{€} \beta) = \frac{\left|\overline{N}_\alpha \, \overline{N}_\beta\right|}{\left|\overline{N}_\alpha\right| \left|\overline{N}_\beta\right|} = \frac{\left|A_\alpha A_\beta + B_\alpha B_\beta + C_\alpha C_\beta\right|}{\sqrt{A_\alpha^2 + B_\alpha^2 + C_\alpha^2} \cdot \sqrt{A_\beta^2 + B_\beta^2 + C_\beta^2}}.$$

Умовою паралельності двох площин є колінеарність їх нормалей :

$\boldsymbol{\alpha} \| \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \overline{N}_\alpha \| \overline{N}_\beta$, тобто $\dfrac{A_\alpha}{A_\beta} = \dfrac{B_\alpha}{B_\beta} = \dfrac{C_\alpha}{C_\beta}$.

Умовою перпендикулярності двох площин є перпендикулярність їх нормалей :

$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \overline{N}_\alpha \perp \overline{N}_\beta$,тобто $\overline{N}_\alpha \cdot \overline{N}_\beta = 0$.

Відстань від точки М до площини, заданої за допомогою рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$, обчислюється за формулою

$$d(M) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

1.2. Розв'язання типових задач

Задача 1. Побудувати площини та вказати нормалі до них :

а) $3x - 2y + 6z - 12 = 0$;

б) $2x + 3y - 6 = 0$;

в) $z - 4 = 0$;

г) $x + y - 2z = 0$;

д) $2x - 3z = 0$.

При побудові будемо користуватися рівнянням у відрізках на осях (там, де можливо перетворити рівняння до вказаної форми), та будемо зображати лінії перерізу заданої площини та координатних площин.

а) $3x - 2y + 6z - 12 = 0$;

$3x - 2y + 6z = 12$;

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{2} = 1.$$

Площина перетинає координатні осі Ox, Oy та Oz у точках з відповідними координатами $a = 4$, $b = -6$ та $c = 2$ (рис.1.1).

Нормаль до площини –вектор $\overline{N} = (3; -2; 6)$.

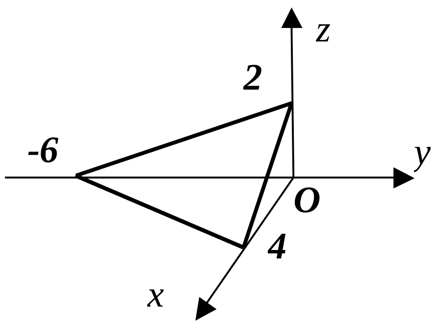


Рис. 1.1

б) $\boldsymbol{2x+3y-6=0}$;

$\boldsymbol{2x+3y=6}$;

$\boldsymbol{\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1}$.

Площина перетинає координатні осі $\boldsymbol{Ox}$ і $\boldsymbol{Oy}$ у точках з відповідними координатами $\boldsymbol{a=3}$та $\boldsymbol{b=2}$ і паралельна осі $\boldsymbol{Oz}$, тобто проходить через прямі, паралельні цій осі (рис. 1.2).

Нормаль до цієї площини – вектор $\boldsymbol{\overline{N}=(2;3;0)}$.

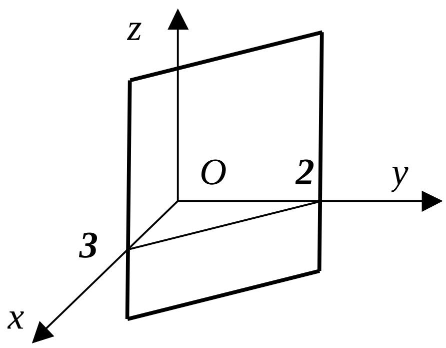


Рис 1.2

в) $\boldsymbol{z-4=0}$;

$\boldsymbol{z=4}$.

Площина перетинає координатну вісь $\boldsymbol{Oz}$ у точці з координатою $\boldsymbol{c=4}$ та паралельна координатній площині $\boldsymbol{Oxy}$, отже проходить через прямі, паралельні осям $\boldsymbol{Ox}$ та$\boldsymbol{Oy}$ (рис. 1.3).

Нормаль до цієї площини – вектор $\overline{N}=(0;0;4)$.

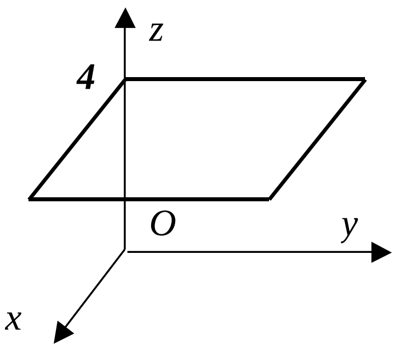


Рис. 1.3

г) $\boldsymbol{x+y-2z=0}$.

Площина проходить через початок координат, тому її рівняння неможливо привести до форми у відрізках на осях. Визначимо лінії перерізу цієї площини та яких-небудь двох координатних площин, наприклад, площин $\boldsymbol{Oxz}$ та $\boldsymbol{Oyz}$.

Лінія перерізу з площиною $\boldsymbol{Oxz}$:

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ y=0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x=2z \\ y=0 \end{cases}.$$

Лінія перерізу з площиною $\boldsymbol{Oxz}$:

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ y=0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x=2z \\ y=0 \end{cases}.$$

Таким чином, при побудові заданої площини треба у координатній площині $\boldsymbol{Oxz}$ зобразити пряму $\boldsymbol{x=2z}$, а у координатній площині $\boldsymbol{Oyz}$ зобразити пряму $\boldsymbol{y=2z}$.

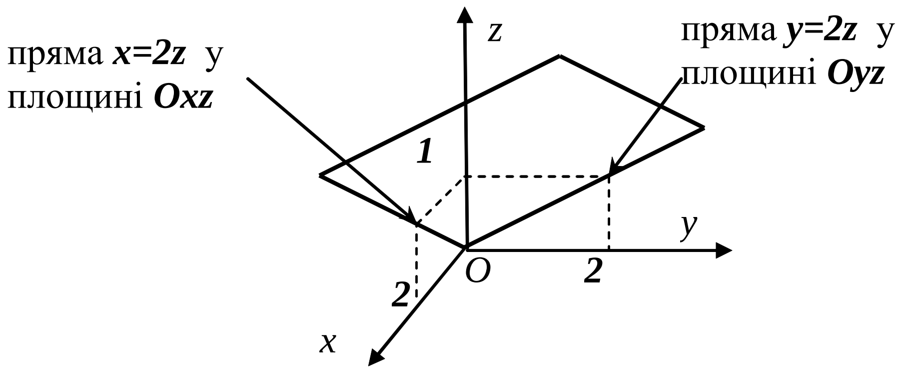


Рис. 1.4

Нормаль до цієї площини – вектор $\overline{\boldsymbol{N}}=(\boldsymbol{1};\boldsymbol{1};-\boldsymbol{2})$.

д) $2x - 3z = 0$.

Площина проходить через початок координат паралельно координатній осі Oy, тобто ця вісь належить площині. Також при побудові заданої площини необхідно у координатній площині Oxz зобразити пряму $2x - 3z = 0$, яка є лінією перерізу вказаних площин.

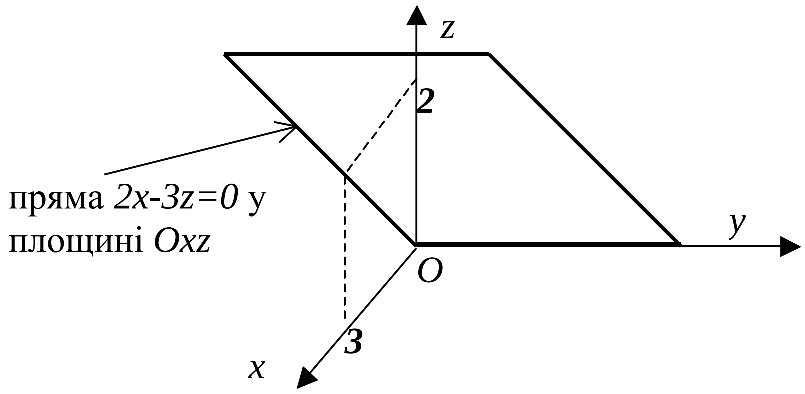


Рис. 1.5

Нормаль до цієї площини – вектор $\overline{N} = (2; 0; -3)$.

Задача 2. Записати рівняння площини, яка проходить через точку **M(3;4;5)** перпендикулярно до вектора $\overline{MK}$**,** де **K(-2;1;3)**.

Нормаль до площини – це вектор $\overline{MK} = (-2-3; 1-4; 3-5) =$
$= (-5; -3; -2)$.

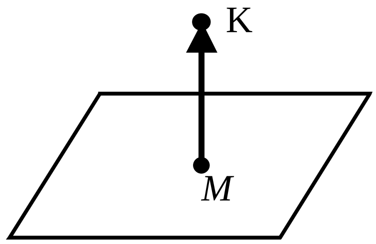


Рис 1.6

Запишемо канонічне рівняння площини:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

$$-5(x-3) - 3(y-4) - 2(z-5) = 0;$$

$$5x + 3y + 2z - 37 = 0.$$

Задача 3. Записати рівняння площини, яка проходить через точку **M(3;2;-1)** та вісь $\boldsymbol{Ox}$.

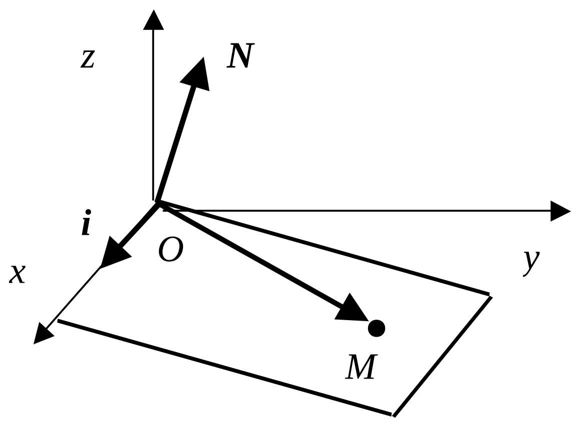


Рис. 1.7

Площина проходить через вісь $\boldsymbol{Ox}$, тобто у площині лежить напрямний вектор осі $\boldsymbol{Ox}$ – вектор $\bar{\boldsymbol{i}}$.

Площина проходить через початок координат та точку **M,** отже у площині лежить також вектор $\overline{\boldsymbol{OM}} = (\mathbf{3};\ \mathbf{2};\ -\mathbf{1})$–радіус-вектор точки **M**.

Векторний добуток векторів, які лежать у площині, перпендикулярний цій площині, отже, його можна вважати її нормаллю, тобто

$$\overline{\boldsymbol{N}} = \bar{\boldsymbol{i}} \times \overline{\boldsymbol{OM}} = \bar{\boldsymbol{i}} \times \left(3\bar{\boldsymbol{i}} + 2\bar{\boldsymbol{j}} - \bar{\boldsymbol{k}}\right) = \bar{\boldsymbol{i}} \times 3\bar{\boldsymbol{i}} + \bar{\boldsymbol{i}} \times 2\bar{\boldsymbol{j}} - \bar{\boldsymbol{i}} \times \bar{\boldsymbol{k}} = 2\bar{\boldsymbol{k}} + \bar{\boldsymbol{j}}$$

(звичайно, векторний добуток можна обчислювати також за допомогою символічного визначника).

Запишемо рівняння площини, яка проходить через точку **M** та має нормаль $\overline{\boldsymbol{N}} = (\mathbf{0};\ \mathbf{1};\ \mathbf{2})$:

$$\mathbf{0}(\boldsymbol{x} - \mathbf{3}) + \mathbf{1}(\boldsymbol{y} - \mathbf{2}) + \mathbf{2}(\boldsymbol{z} + \mathbf{1}) = \mathbf{0};$$

$$\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}.$$

Задача 4. Записати рівняння площини, яка проходить через точки **M(2;3;-1)** та **K(4;-3;5)** паралельно осі $\boldsymbol{Oz}$.

Площина проходить через точки **M** та **K**, отже вектор $\overline{\boldsymbol{MK}} = (\mathbf{2};\ -\mathbf{6};\ \mathbf{4})$ лежить у цій площині. Площина паралельна осі $\boldsymbol{Oz}$, тобто площині належать вектори, колінеарні вектору $\bar{\boldsymbol{k}}$.

Тоді векторний добуток цих векторів перпендикулярний площині, отже можна вважати, що

$$\overline{N} = \overline{k} \times \overline{MK} = \overline{k} \times \left(2\overline{i} - 6\overline{j} + 4\overline{k}\right) = \overline{k} \times 2\overline{i} - \overline{k} \times 6\overline{j} + \overline{k} \times 4\overline{k} = 2\overline{j} + 6\overline{i}\ .$$

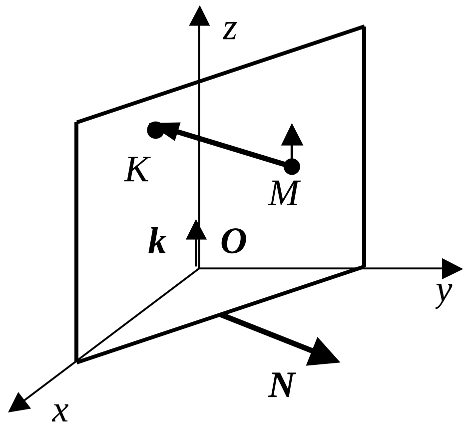


Рис. 1.8

Запишемо рівняння площини, яка проходить через точку **M** та має нормаль $\overline{N} = (0;1;2)$:

$$6(x-2)+2(y-3)+0(z-1)=0;$$

$$6x+2y-18=0;$$

$$3x+y-9=0.$$

Задача 5. Записати рівняння площини, яка проходить через точку **M(1;2;-1)** та відтинає на осях Ox та Oy відрізки **–3** та **4** відповідно.

Запишемо рівняння площини у відрізках на осях $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

За умовою задачі $a=-3$ та $b=4$, отже

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{c}=1.$$

Площина проходить через точку **M**, отже координати цієї точки перетворюють рівняння площини у вірну рівність:

$$\frac{1}{-3}+\frac{2}{4}+\frac{-1}{c}=1\ ; \qquad c=-\frac{5}{6}.$$

Таким чином, рівняння площини має вигляд $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{-\frac{5}{6}}=1$,

або $\qquad 20x-15y+72z+60=0$.

Задача 6. Записати рівняння площини, яка проходить через точки M_1**(1;2;3)**, M_2**(3;1;1)** та M_3**(2;1;3)**.

Скористаємося рівнянням площини, яка проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0; \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Обчислимо визначник розкладанням за елементами першого рядка:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \;;$$

після обчислень отримаємо

$$2x+2y+z-9=0.$$

Задача 7. Знайти кут між площинами $3x+2y-5z+11=0$ та $2x-3y+z=0$.

Нормалями до площин є вектори $\overline{N}_1=(3;\,2;-5)$ та $\overline{N}_2=(2;-3;\,1)$. Кут φ між площинами знайдемо з умови

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overline{N}_1\,\overline{N}_2\right|}{\left|\overline{N}_1\right|\left|\overline{N}_2\right|}=\frac{\left|3\cdot 2+2\cdot(-3)-5\cdot 1\right|}{\sqrt{3^2+2^2+(-5)^2}\,\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{532}},$$

тобто $\varphi=\arccos\dfrac{5}{\sqrt{532}}$.

Задача 8. Чи будуть перпендикулярними площини $3x+2y+4z-1=0$ та $2x+3y-z=0$?

Обчислимо скалярний добуток нормалей до площин $\overline{N}_1=(3;\,2;\,4)$ та $\overline{N}_2=(2;\,3;-1)$:

$$\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2=3\cdot 2+2\cdot 3+4\cdot(-1)=8\neq 0.$$

Отже, за ознакою перпендикулярності площин задані площини не будуть перпендикулярними.

Задача 9. Чи будуть паралельними площини $4x+6y-2z+5=0$ та $2x+3y-z=0$?

Перевіримо, чи будуть колінеарними нормалі до площин $\overline{N}_1 = (4;\, 6;\, -2)$ та $\overline{N}_2 = (2;\, 3;\, -1)$:

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{3} = \frac{-1}{-2}.$$

Нормалі колінеарні, отже, площини є паралельними.

Задача 10. Записати рівняння площини, яка проходить через точку **M(3;-1;0)** паралельно площині $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

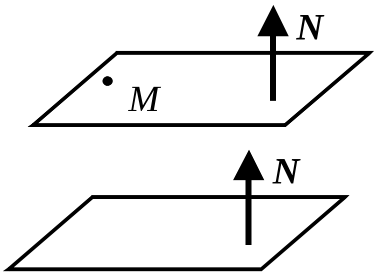


Рис. 1.9

Нормаль до площини, рівняння якої потрібно записати, повинна бути колінеарною вектору $\overline{N} = (2;\, -3;\, 5)$, отже, може й дорівнювати цьому вектору.

Запишемо рівняння площини, яка проходить через точку **M** та має нормаль $\overline{N}$:

$$A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) = 0;$$

$$2(x - 3) - 3(y + 1) + 5(z - 0) = 0;$$

$$2x - 3y + 5z - 9 = 0.$$

Задача 11. Довести, що рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ паралельно векторам $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$та $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$, може мати вигляд $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$.

Оберемо на розглядуваній площині довільну точку $M(x; y; z)$, тоді вектор $\overline{M_1M} = (x - x_1\,;\, y - y_1\,;\, z - z_1)$ лежить у цій площині, тобто вектори $\overline{M_1M} = (x - x_1\,;\, y - y_1\,;\, z - z_1)$, $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$ будуть компланарними.

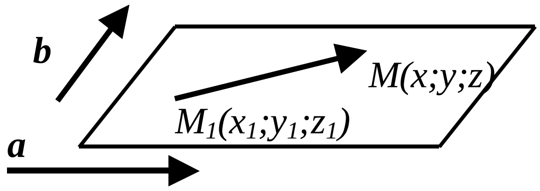


Рис. 1.10

Запишемо умову компланарності трьох векторів $\left(\overline{M_1M}\times\bar{a}\right)\cdot\bar{b}=0$ у координатній формі та отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

Задача 12. Записати рівняння площини, яка проходить через точку **M(2;3;1)** перпендикулярно до площин $3x-y+6=0$ та $2x+y+5z-1=0$.

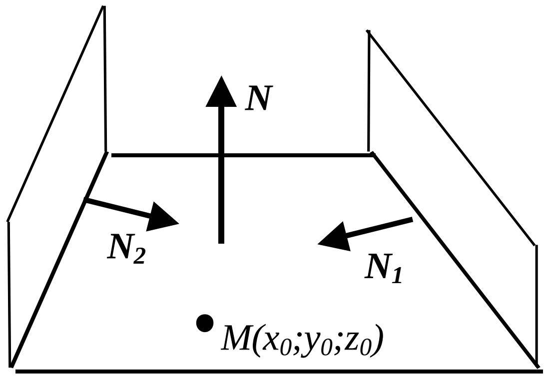


Рис. 1.11

Шукана площина буде перпендикулярною площинам $3x-y+6=0$ та $2x+y+5z-1=0$, отже, нормаль до неї повинна бути перпендикулярною векторам $\overline{N}_1=(3;-1;0)$ та $\overline{N}_2=(2;1;5)$. Можна вважати, що ця нормаль дорівнює векторному добутку векторів $\overline{N}_1$ та $\overline{N}_2$:

$$\overline{N}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5\bar{i}-15\bar{j}+5\bar{k}.$$

Тоді канонічне рівняння шуканої площини має вигляд

$$-5(x-2)-15(y-3)+5(z-1)=0;$$

$$x+3y-z-10=0.$$

Задача 13. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$ перпендикулярно площині $Ax+By+Cz+D=0$.

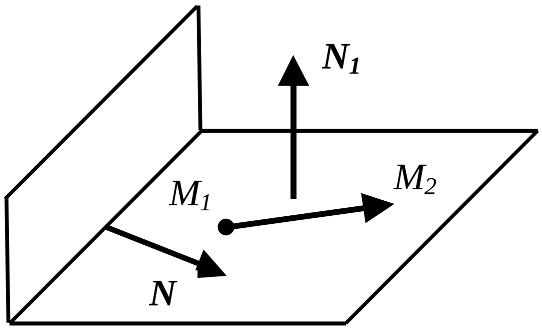


Рис. 1.12

Нормаль шуканої площини $\overline{N_1}$ повинна бути перпендикулярною вектору $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1\,;\,y_2-y_1\,;\,z_2-z_1)$. За умовою, шукана площина перпендикулярна заданій, отже $\overline{N_1}\perp\overline{N}=(A;B;C)$. Тоді можна вважати, що нормаль $\overline{N_1}$ дорівнює векторному добутку векторів $\overline{N}$ та $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{N_1}=\overline{M_1M_2}\times\overline{N}.$$

Оберемо на шуканій площині довільну точку $M(x;y;z)$, тоді вектор $\overline{M_1M}=(x-x_1\,;\,y-y_1\,;\,z-z_1)$ лежить у цій площині і, звичайно, буде перпендикулярним вектору $\overline{N_1}$, тобто

$$\overline{M_1M}\cdot\overline{N_1}=0 \text{ або } \overline{M_1M}\cdot\left(\overline{M_1M_2}\times\overline{N}\right)=0.$$

Запишемо останню рівність у координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка та отримаємо рівняння шуканої площини.

Задача 14. Знайти відстань від точки **M(3;1;-2)** до площини $5x+4y+2z-3=0$.

Скористаємося формулою відстані від точки до площини:

$$d(M)=\frac{|Ax_M+By_M+Cz_M+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$d(M)=\frac{|5x_M+4y_M+2z_M-3|}{\sqrt{5^2+4^2+2^2}}=$$

$$=\frac{|5\cdot 3+4\cdot 1+2\cdot(-2)-3|}{\sqrt{45}}=\frac{12}{\sqrt{45}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}\text{ (од.).}$$

Задача 15. Знайти відстань між паралельними площинами $2x+3y+z-1=0$ та $2x+3y+z+4=0$.

Відстань між паралельними площинами може обчислюватися як відстань від точки на одній площині до іншої площини.

Оберемо будь-яку точку на першій площині. Для цього дві координати виберемо довільно, а третю визначимо з рівняння площини:

$x_M=y_M=0$;

$2\cdot 0+3\cdot 0+z_M-1=0$;

$z_M=1$.

Знайдемо відстань від точки **M(0;0;1)** до площини $2x+3y+z+4=0$:

$$d(M)=\frac{|2x_M+3y_M+z_M+4|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{|2\cdot 0+3\cdot 0+1\cdot 1+4|}{\sqrt{14}}=\frac{5}{\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{14}}{14}\text{ (од.).}$$

Отримана величина й буде відстанню між двома площинами.

Зауваження. При розв’язуванні цієї задачі часто припускаються прикрої помилки: обирають точку на площині та обчислюють відстань до цієї ж площини. У разі вірних підрахунків отримують нульовий результат, який здається парадоксальним.

1.3 Задачі для самостійної роботи

1.Записати рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{M_1}$ **(3;-1;2)** перпендикулярно до вектора $\overline{\boldsymbol{M_1M_2}}$, де M_2 **(4;-2;-1)**.

Відповідь: $\boldsymbol{x - y - 3z + 2 = 0}$.

2. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{M_1}$ **(3;4;-5)** паралельно векторам $\overline{\boldsymbol{a_1}} = (\boldsymbol{3; 1; -1})$ та $\overline{\boldsymbol{a_2}} = (\boldsymbol{1; -2; 1})$.

Відповідь: $\boldsymbol{x + 4y + 7z + 16 = 0}$.

3. Довести, що рівняння площини, яка проходить через точки $\boldsymbol{M_1(x_1; y_1; z_1)}$ та $\boldsymbol{M_2(x_2; y_2; z_2)}$ паралельно вектору $\overline{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{a_x; a_y; a_z})$, може бути записано у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0.$$

4. Записати рівняння площини, яка проходить через точку **М(3;-2;-7)** паралельно площині $\boldsymbol{2x - 3z + 5 = 0}$.

Відповідь: $\boldsymbol{2x - 3z - 27 = 0}$.

5. Записати рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно площинам $\boldsymbol{2x - y + 3z - 1 = 0}$ та $\boldsymbol{x + 2y + z = 0}$.

Відповідь: $\boldsymbol{7x - y - 5z = 0}$.

6. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $\boldsymbol{M_1(1; -1; -2)}$ та $\boldsymbol{M_2(3; 1; 1)}$ перпендикулярно площині $\boldsymbol{x - 2y + 3z - 5 = 0}$.

Відповідь: $\boldsymbol{4x - y - 2z - 9 = 0}$.

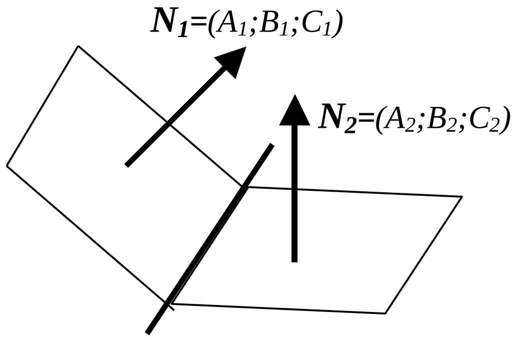
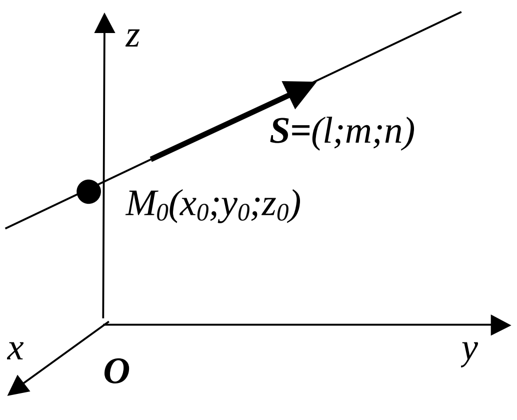
7. Знайти точку перетину трьох площин $\boldsymbol{x - 2y + z - 7 = 0}$, $\boldsymbol{2x + y - z + 2 = 0}$ та $\boldsymbol{x - 3y + 2z - 11 = 0}$.

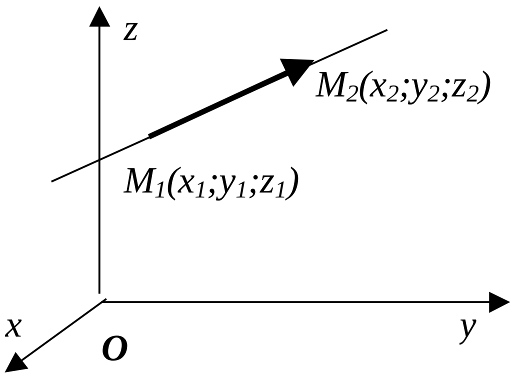
Відповідь: **(1;-2;2)**.

Розділ 2
ПРЯМА У ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА ТА ПРЯМА

2.1. Короткі теоретичні відомості

Пряму у просторі ми будемо розглядати як лінію перерізу двох площин; лінію, будь-які точки якої задають вектор, колінеарний заданому, або траєкторію руху зі сталою швидкістю заданої точки. Різні форми рівнянь прямої наведені у таблиці.

Назва	**Загальний вигляд рівнянь**	**Геометричний зміст параметрів**
Загальні	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 	Пряма розглядається як лінія перерізу двох площин з нормалями $\overline{N}_1=(A_1;B_1;C_1)$ та $\overline{N}_2=(A_2;B_2;C_2)$
Канонічні	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 	l,m,n — координати напрямного вектора прямої; (x_0,y_0,z_0) - координати точки, яка належить прямій

Параметричні	$\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \\ z = z_0 + n\,t \end{cases}$	l, m, n — координати напрямного вектора прямої; (x_0, y_0, z_0) — координати точки, яка належить прямій; з механічної точки зору параметричні рівняння – це рівняння рівномірного руху зі швидкістю $\bar{v} = (l, m, n)$ точки, яка у момент часу $t_0 = 0$ займає положення (x_0, y_0, z_0)
Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ 	(x_1, y_1, z_1) та (x_2, y_2, z_2) – координати двох точок, які належать прямій

Параметричні рівняння прямої, перпендикулярної до осі Ox, мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + m\,t \\ z = z_0 + n\,t \end{cases}.$$

Рівняння прямої, перпендикулярної до осі $\boldsymbol{Oy}$, мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 \\ z = z_0 + n\,t \end{cases}.$$

Рівняння прямої, перпендикулярної до осі $\boldsymbol{Oz}$, мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \\ z = z_0 \end{cases}.$$

Кут між двома прямими – це гострий кут, який створено напрямними векторами цих прямих

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}\right|}{\left|\overline{S_1}\right|\left|\overline{S_2}\right|}.$$

Умовою ***паралельності*** двох прямих є колінеарність їх напрямних векторів :

$$s_1 \| s_2 \Leftrightarrow \overline{S_1} \| \overline{S_2}, \text{ тобто } \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Умовою ***перпендикулярності*** двох прямих є перпендикулярність їх напрямних векторів :

$$s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow \overline{S_1} \perp \overline{S_2}, \text{тобто } \overline{S_1}\cdot\overline{S_2} = 0 .$$

Гострий кут φ, який створений нормаллю до площини, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, та напрямним вектором прямої, доповнює кут θ між прямою та площиною до 90^0 (рис. 2.1):

$$\sin\theta = \cos\varphi = \frac{\left|\overline{S}\cdot\overline{N}\right|}{\left|\overline{S}\right|\left|\overline{N}\right|} = \frac{\left|A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

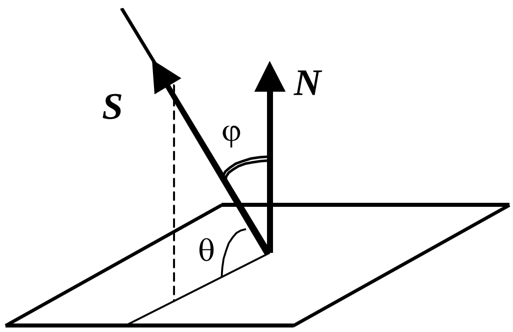


Рис. 2.1

Умовою ***перпендикулярності*** прямої та площини є колінеарність нормалі до площини та напрямного вектора прямої (рис. 2.2):

$$s \perp \alpha \Leftrightarrow \overline{S} \,||\, \overline{N}, \text{ тобто } \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

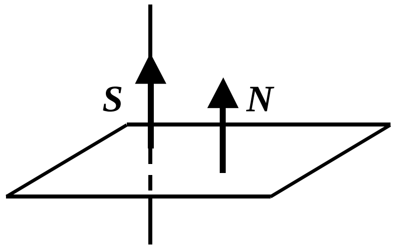


Рис. 2.2

Умовою ***паралельності*** прямої та площини є перпендикулярність нормалі до площини та напрямного вектора прямої (рис. 2.3):

$$s \,||\, \alpha \Leftrightarrow \overline{S} \perp \overline{N}, \text{тобто } \overline{S} \cdot \overline{N} = 0 .$$

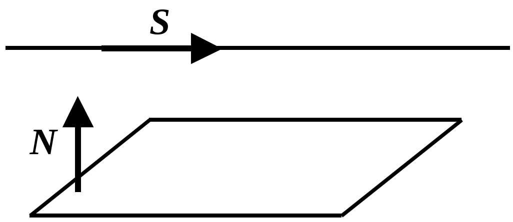


Рис. 2.3

Більшість задач, пов’язаних з прямими у просторі, розв’язується за допомогою канонічних або параметричних рівнянь, тобто якщо пряма задана загальними рівняннями, необхідно перейти до вищезгаданих форм рівнянь.

2.2 Розв’язання типових задач

Задача 1. Записати канонічні та параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x + 5y + z - 4 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Пряма належить двом площинам, отже, вона буде перпендикулярною нормалям до цих площин $\overline{N_1} = (3; 5; 1)$ та $\overline{N_2} = (1; 1; 1)$.

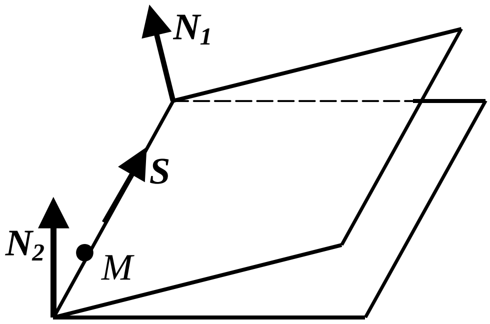


Рис. 2.4

Тоді напрямний вектор прямої можна обчислити як векторний добуток векторів $\overline{N_1}$ та $\overline{N_2}$:

$$\overline{S}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}\,.$$

Оберемо яку-небудь точку, що належить прямій. Для цього одну з координат виберемо довільно, інші визначимо з рівнянь прямої:

$$x_M=0\ ,\ \begin{cases}3\cdot 0+5y_M+z_M-4=0\\ 0+y_M+z_M=0\end{cases},\ \begin{cases}y_M=1\\ z_M=-1\end{cases}.$$

Точка $M(0;1;-1)$ належить прямій.

Тоді канонічні рівняння прямої мають вигляд

$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{-2}$ або $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Параметричні рівняння цієї прямої – $\begin{cases}x=4t\\ y=1-2t\\ z=-1-2t\end{cases}$ або $\begin{cases}x=2t\\ y=1-t\\ z=-1-t\end{cases}$.

Задача 2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $M(3;2;-1)$ та $N(4;-1;2)$.

Рівняння прямої, яка проходить через точки **M** та **N**, мають вигляд

$$\frac{x-x_M}{x_N-x_M}=\frac{y-y_M}{y_N-y_M}=\frac{z-z_M}{z_N-z_M};$$

$\dfrac{x-3}{4-3}=\dfrac{y-2}{-1-2}=\dfrac{z-(-1)}{2-(-1)}$, або $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{3}$.

Задача 3. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-3;2;1)$ та $M_2(2;-1;1)$.

Канонічні рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 та M_2, мають вигляд $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Але при розв'язанні цієї задачі, на відміну від попередньої, ми не маємо права записувати канонічні рівняння через те, що $z_2=z_1$, і, таким чином, знаменник третього дробу перетворюється у нуль.

Визначимо напрямний вектор прямої

$$\overline{S}=(x_2-x_1;\,y_2-y_1;\,z_2-z_1)=(2-(-3);-1-2;1-1)=(5;-3;0)$$

та запишемо її параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \\ z=z_1+nt \end{cases};\quad \begin{cases} x=-3+5t \\ y=2-3t \\ z=1 \end{cases}.$$

Задача 4. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1;3;-5)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=z+1$.

Напрямним вектором шуканої прямої можна вважати напрямний вектор заданої прямої $\overline{S}=(4;2;1)$. Отже, канонічні рівняння мають вигляд

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}=z+5\ .$$

Задача 5. Знайти точку перетину прямих $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2+3t \end{cases}$ та $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-3t \\ z=1-t \end{cases}$.

Будемо вважати, що точці перетину у рівняннях першої прямої відповідає значення параметра $t=t_1$, а у рівняннях другої прямої – значення параметра $t=t_2$, тобто $\begin{cases} x_0=1+t_1 \\ y_0=1-t_1 \\ z_0=2+3t_1 \end{cases}$ та $\begin{cases} x_0=3+2t_2 \\ y_0=-2-3t_2 \\ z_0=1-t_2 \end{cases}$.

Координати точки перетину прямих повинні задовольняти рівнянням обох прямих, отже

$$\begin{cases}1+t_1=3+2t_2\\1-t_1=-2-3t_2\\2+3t_1=1-t_2\end{cases};\quad\begin{cases}t_1-2t_2=2\\t_1-3t_2=3\\3t_1+t_2=-1\end{cases};\quad\begin{cases}t_2=-1\\3t_1+t_2=-1\\t_1-3t_2=3\end{cases};\quad\begin{cases}t_2=-1\\t_1=0\end{cases}.$$

Тоді шукана точка має координати $\begin{cases}x_0=1+0\\y_0=1-0\\z_0=2+3\cdot 0\end{cases};\ \begin{cases}x_0=1\\y_0=1\\z_0=2\end{cases}$, тобто точка $M(1;1;2)$ є точкою перетину заданих прямих.

Зауваження. Якщо отримана система трьох рівнянь з двома змінними не має розв'язку, це означає, що прямі не перетинаються.

Задача 6. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;2;-1)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-2}$ та $\frac{x-2}{4}=y+1=\frac{z-1}{3}$.

Шукана пряма перпендикулярна прямим з напрямними векторами $\overline{S_1}=(3;5;-2)$ та $\overline{S_2}=(4;1;3)$. Тоді напрямний вектор прямої можна обчислити як векторний добуток векторів $\overline{S_1}$ та $\overline{S_2}$:

$$\overline{S}=\overline{S_1}\times\overline{S_2}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\3&5&-2\\4&1&3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}5&-2\\1&3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}3&-2\\1&3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}3&5\\4&1\end{vmatrix}=17\bar{i}-17\bar{j}-17\bar{k}.$$

Тоді канонічні рівняння прямої мають вигляд

$$\frac{x-3}{17}=\frac{y-2}{-17}=\frac{z+1}{-17}\quad\text{або}\quad x-3=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}.$$

Задача 7. Записати рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно прямій $\frac{x+7}{-1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{-4}$.

Умовою перпендикулярності прямої та площини є колінеарність нормалі до площини та напрямного вектора прямої, тобто можна вважати, що $\overline{N}=\overline{S}=(-1;5;-4)$.

Запишемо рівняння площини , яка проходить через початок координат та має нормаль $\overline{N}=(-1;5;-4)$:

$$-1(x-0)+5(y-0)-4(z-0)=0;$$

$$-x+5y-4z=0.$$

Задача 8. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;0;1)$ перпендикулярно площині $2x-3y+4z-1=0$.

Умовою перпендикулярності прямої та площини є колінеарність нормалі до площини та напрямного вектора прямої, тобто можна вважати, що $\overline{S}=\overline{N}=(2;-3;4)$.

Запишемо канонічні рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}.$$

Задача 9. Знайти кут між прямими $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-1}{-2}$ та $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-4+2t. \\ z=5-t \end{cases}$

Напрямні вектори заданих прямих – це вектори $\overline{S_1}=(2;5;-2)$ та $\overline{S_2}=(3;2;-1)$. Кут φ між прямими знайдемо з умови

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}\right|}{\left|\overline{S_1}\right|\left|\overline{S_2}\right|}=\frac{\left|2\cdot3+5\cdot2+(-2)\cdot(-1)\right|}{\sqrt{2^2+5^2+(-2)^2}\ \sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{18}{\sqrt{462}}.$$

Отже, $\varphi=\arccos\dfrac{18}{\sqrt{462}}$.

Задача 10. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x-y-4z-5=0 \\ 2x+y-2z-4=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x-6y-6z=0 \\ 2x+2y+9z=0 \end{cases}$.

Для визначення куту між прямими необхідно знати напрямні вектори цих прямих.

Якщо розглядати першу пряму як лінію перерізу площин $x-y-4z-5=0$ та $2x+y-2z-4=0$, то напрямним вектором цієї прямої $\overline{S_1}$ можна вважати векторний добуток векторів $\overline{N_1}=(1;-1;-4)$ та $\overline{N_2}=(2;1;-2)$:

$$\overline{S_1}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=6\bar{i}-6\bar{j}+3\bar{k}.$$

Аналогічно, напрямним вектором другої прямої $\overline{S_2}$ можна вважати векторний добуток векторів $\overline{N_3} = (1; -6; -6)$ та $\overline{N_4} = (2; 2; 9)$:

$$\overline{S_2} = \overline{N}_3 \times \overline{N}_4 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -6 & -6 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -42\bar{i} - 21\bar{j} + 14\bar{k}.$$

Обчислимо кут φ між прямими за умовою

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}\right|}{\left|\overline{S_1}\right|\left|\overline{S_2}\right|} = \frac{\left|-42 \cdot 6 - 6 \cdot (-21) + 3 \cdot 14\right|}{\sqrt{6^2 + (-6)^2 + 3^2}\sqrt{(-42)^2 + (-21)^2 + 14^2}} = \frac{4}{21};$$

тобто $\varphi = \arccos\frac{4}{21}$.

Задача 11. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ та площиною $2x - 5y + z - 2 = 0$.

Знайдемо напрямний вектор прямої з умови $\bar{S} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$, де $\overline{N_1} = (1; -1; 1)$, $\overline{N_2} = (1; 2; 2)$ (див. задачу 10).

$$\overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$$,отже $\bar{S} = \{-4; -1; 3\}$.

Обчислимо кут між прямою та площиною за формулою

$$\sin\theta = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}};$$

$$\sin\theta = \frac{|2 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-1) + 1 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{|-8 + 5 + 3|}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{26}} = 0,$$

тобто $\theta = 0$.

Задача 12. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ та площини $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Параметричні рівняння прямої мають вигляд $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 6t \end{cases}$. З'ясуємо, при якому значенні параметра t точка, що належить прямій, водночас належить і площині (інакше кажучи, у якій точці пряма перетинає площину):

$2(1+t)+3(-1-2t)+(6t)-1=0$;

$2+2t-3-6t+6t-1=0$;

$t=1$.

Підставимо $t=1$ у параметричне рівняння прямої та одержимо координати шуканої точки:

$$\begin{cases} x = 1+1 \\ y = -1-2\cdot 1 \\ z = 6\cdot 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad M(2;-3;6).$$

Задача 13. Записати рівняння площини, яка містить пряму $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$ та точку $M_1(1;-1;2)$.

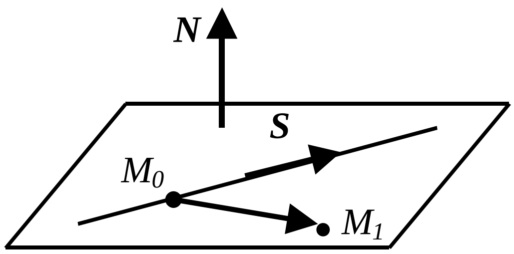


Рис. 2.5

Пряма $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$ проходить через точку $M_0(1;0;-1)$, яка, зрозуміло, належить також і шуканій площині. Отже, нормаль площини $\overline{N}$ буде перпендикулярною векторам $\overline{M_0M_1}=(0;-1;3)$ та $\overline{S}=(2;-1;3)$, тобто

$$\overline{N}=\overline{S}\times\overline{M_0M_1}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0\cdot\bar{i}-6\cdot\bar{j}-2\cdot\bar{k}.$$

Канонічне рівняння шуканої площини має вигляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

$$0(x-1)-6(y-0)-2(z+1)=0;$$
$$3y+z+1=0.$$

Задача 14. Записати рівняння площини, яка проходить через прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$ та $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{1}$.

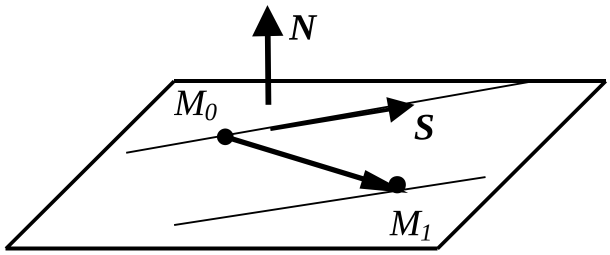


Рис. 2.6

Задані прямі є паралельними $\left(\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}=\frac{1}{1}\right)$, тобто шукана площина існує. Цій площині повинні належати напрямний вектор прямих $\overline{S}=(2;-1;1)$ та вектор $\overline{M_0M_1}=(-3;1;-3)$, що з'єднує точки $M_0(1;0;0)$ та $M_1(-2;1;-3)$, через які проходять задані прямі.

Нормаль до площини перпендикулярна цим векторам:

$$\overline{N}=\overline{S}\times\overline{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot\bar{i}+3\cdot\bar{j}-\bar{k}.$$

Запишемо рівняння площини, що має нормаль $\overline{N}=(2;3;-1)$ та проходить через точку $M_0(1;0;0)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$
$$2(x-1)+3(y-0)-1(z-0)=0;$$
$$2x+3y-z-2=0.$$

Задача 15. Записати рівняння площини, яка проходить через прямі $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-8}{2}$ та $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z}{4}$.

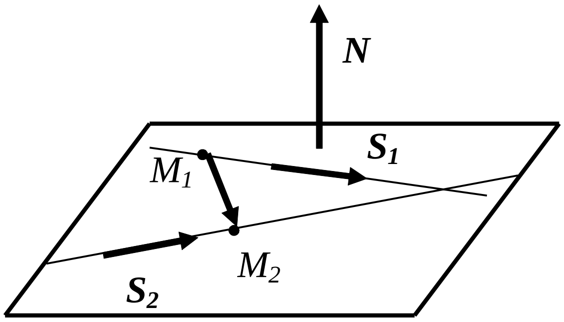


Рис. 2.7

Задані прямі не є паралельними, отже, існування розв'язку задачі не є очевидним. Доведемо, що ці прямі дійсно лежать в одній площині.

Очевидно, що умовою цього є компланарність напрямних векторів прямих $\overline{S_1} = (1; -3; 2)$, $\overline{S_2} = (-1; 1; 4)$ та вектора $\overline{M_1M_2} = (2; -2; -8)$, який з'єднує точки цих прямих .

Обчислимо мішаний добуток цих векторів:

$$\overline{S_1}\ \overline{S_2}\ \overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -8 \end{vmatrix}.$$

Другий та третій рядки отриманого визначника є пропорційними, отже, визначник дорівнює нулю, тобто вектори є компланарними, а розглядувані прямі лежать в одній площині.

Нормаль шуканої площини $\overline{N}$ повинна бути перпендикулярною напрямним векторам $\overline{S_1} = (1; -3; 2)$ та $\overline{S_2} = (-1; 1; 4)$, тому

$$\overline{N} = \overline{S_1} \times \overline{S_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -14\bar{i} - 6\bar{j} - 2\bar{k}\ .$$

Запишемо рівняння площини, що має нормаль $\overline{N} = (-14; -6; -2)$ та проходить через точку $M_1(1; -3; 8)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0;$$

$$-14(x - 1) - 6(y + 3) - 2(z - 8) = 0;$$

$$7(x - 1) + 3(y + 3) + (z - 8) = 0;$$

$$7x + 3y + z - 6 = 0.$$

Задача 16. Визначити проекцію точки $M_1(1;2;-1)$ на пряму $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-4}$ та знайти відстань від точки до прямої.

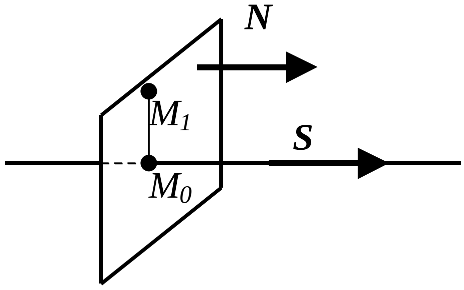


Рис. 2.8

1 спосіб. Знайдемо рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно заданій прямій. Можна вважати, що нормаль $\overline{N}$ до площини дорівнює напрямному вектору прямої :

$$\overline{N}=\overline{S}=(-1;2;-4).$$

Запишемо рівняння шуканої площини:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0;$$

$$-1(x-1)+2(y-2)-4(z+1)=0;$$

$$-x+2y-4z-7=0;$$

$$x-2y+4z+7=0.$$

Параметричні рівняння заданої прямої мають вигляд $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \\ z=-4t \end{cases}$. З'ясуємо, при якому значенні параметра t пряма перетинає площину:

$$(2-t)-2(1-2t)+4(-4t)+7=0 \Rightarrow t=\frac{11}{21}.$$

Обчислимо координати точки перетину M_0:

$$\begin{cases} x_0=2-\dfrac{11}{21} \\ y_0=-1+2\cdot\dfrac{11}{21} \\ z_0=-4\cdot\dfrac{11}{21} \end{cases} \Rightarrow \quad M_0\left(\frac{31}{21};\frac{1}{21};-\frac{44}{21}\right).$$

Пряма M_0M_1 є перпендикулярною до заданої прямої, отже точка $M_0\left(\dfrac{31}{21};\dfrac{1}{21};-\dfrac{44}{21}\right)$ є шуканою проекцією точки M_1.

2спосіб. Запишемо параметричні рівняння заданої прямої :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = -4t \end{cases}.$$

Будемо вважати, що шуканій точці M_0 відповідає значення параметра $t = t_0$. Тоді її координати – $M_0(-t_0 + 2;\, 2t_0 - 1\,; -4t_0)$. Напрямний вектор прямої $\overline{S} = (-1; 2; -4)$ та вектор $\overline{M_1M_0} = \big((-t_0 + 2) - 1; (2t_0 - 1) - 2\,; (-4t_0) - (-1) \big)$ перпендикулярні, отже

$$\overline{M_1M_0} \cdot \overline{S} = 0.$$

Запишемо останню рівність у координатній формі:

$$(-t_0 + 1)\cdot(-1) + (2t_0 - 3)\cdot 2 + (-4t_0 + 1)\cdot(-4) = 0;$$

$$t_0 - 1 + 4t_0 - 6 + 16t_0 - 4 = 0;$$

$$21t_0 = 11;$$

$$t_0 = \frac{11}{21}.$$

Отже,

$$\begin{cases} x_0 = 2 - \dfrac{11}{21} \\ y_0 = -1 + 2\cdot\dfrac{11}{21} \\ z_0 = -4\cdot\dfrac{11}{21} \end{cases} \Rightarrow \quad M_0\left(\frac{31}{21}; \frac{1}{21}\,; -\frac{44}{21}\right).$$

Відстань від точки M_1 до прямої – це відстань до проекції M_0 заданої точки на пряму, тобто

$$d(M_1) = M_1M_0 = \sqrt{\left(\frac{31}{21} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{21} - 2\right)^2 + \left(-\frac{44}{21} - (-1)\right)^2} = \frac{\sqrt{2310}}{21} \text{ (од.)}$$

Задача 17. Знайти відстань від точки M_1**(2;3;-1)** до прямої $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{4}$.

Відстань від точки M_1 до прямої – це відстань до проекції M_0 заданої точки на пряму, тому задачу можна розв’язати шляхом пошуку цієї проекції та обчислення довжини відрізку M_0M_1 (див. задачу 16). Наведемо більш раціональний метод розв’язання задачі.

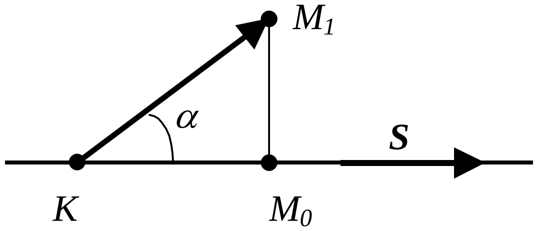


Рис. 2.9

З рівнянь прямої зрозуміло, що прямій належить точка $\boldsymbol{K}$**(-1;2;0)**. Розглянемо прямокутний трикутник та позначимо кут між вектором $\overline{KM_1}$ та заданою прямою як α. Тоді

$$|M_0M_1| = |KM_1|\sin\alpha .$$

Довжина векторного добутку вектора $\overline{KM_1} = (\,2-(-1);\,3-2;\,-1-0\,) = (3;\,1;\,-1)$ та напрямного вектора прямої $\overline{S} = (3;\,-1;\,4)$ дорівнює добутку їх довжин на синус куту між ними:

$$\left|\overline{KM_1}\times\overline{S}\right| = \left|\overline{KM_1}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|\cdot\sin\alpha ,$$

отже,

$$\left|\overline{M_0M_1}\right| = \frac{\left|\overline{KM_1}\times\overline{S}\right|}{\left|\overline{S}\right|}.$$

Обчислимо величини, які входять до останньої рівності:

$$\overline{KM_1}\times\overline{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - 15\bar{j} - 6\bar{k};$$

$$\left|\overline{KM_1}\times\overline{S}\right| = \sqrt{3^2 + (-15)^2 + (-6)^2} = \sqrt{270};$$

$$\left|\overline{S}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}.$$

Тоді $|M_0M_1| = \dfrac{\sqrt{270}}{\sqrt{26}} = \dfrac{3\sqrt{195}}{13}$ (од.)

Задача 18. Записати рівняння перпендикуляра, проведеного з точки $\boldsymbol{M}$**(7;5;-3)** до прямої $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{-1}$.

1 спосіб. Перпендикуляр, проведений з точки М до прямої – це пряма, яка проходить через точку М та її проекцію M_0 на задану пряму. Визначимо координати вказаної проекції.

Запишемо параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = -t - 2 \end{cases}.$$

Будемо вважати, що шуканій точці M_0 відповідає значення параметра $t = t_0$. Тоді її координати – $M_0(2t_0 + 1; 3t_0 ; -t_0 - 2)$. Напрямний вектор заданої прямої $\overline{S} = (2;3;-1)$ та вектор $\overline{M_1M_0} = ((2t_0 + 1) - 7; (3t_0) - 5 ; (-t_0 - 2) - (-3))$ перпендикулярні, отже $\overline{M_1M_0} \cdot \overline{S} = 0$.

Запишемо останню рівність у координатній формі:

$(2t_0 - 1) \cdot 2 + (3t_0 - 5) \cdot 3 + (-t_0 + 1) \cdot (-1) = 0$;

$4t_0 - 12 + 9t_0 - 15 + t_0 - 1 = 0$;

$14t_0 = 28$; $t_0 = 2$.

Тоді $x_0 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $y_0 = 3 \cdot 2 = 6$, $z_0 = -2 - 2 = -4$, отже $M_0(5; 6 ;-4)$.

Запишемо рівняння прямої MM_0:

$$\frac{x-7}{5-7} = \frac{y-5}{6-5} = \frac{z+3}{-4+3};$$

$$\frac{x-7}{-2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+3}{-1}.$$

2спосіб. Через задані пряму та точку можна провести площину. Тоді шуканий перпендикуляр – це пряма, яка лежить у площині та є перпендикулярною до заданої прямої.

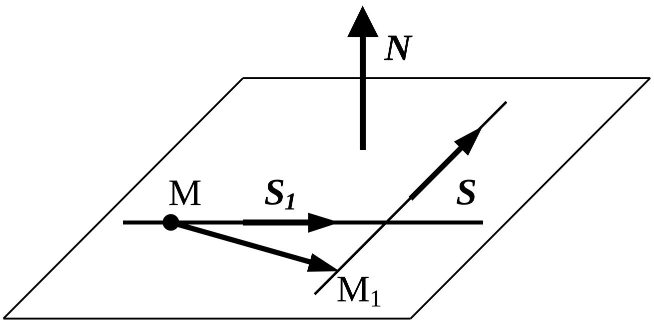


Рис. 2.10

Нормаль до площини є перпендикуляром до напрямного вектора $\overline{S} = (2;3;-1)$ заданої прямої та вектора $\overline{MM_1} = (-6; -5; 1)$, який з’єднує задану точку $M(7;5\ ;-3)$ та точку $M_1(1;0\ ;-2)$, що належить прямій, отже можна вважати, що

$$\overline{N}=\overline{S}\times\overline{MM_1}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & -1\\ -6 & -5 & 1\end{vmatrix}=-2\bar{i}+4\bar{j}+8\bar{k},$$

або

$$\overline{N}=(-1;2;4).$$

Шукана пряма повинна бути перпендикулярною заданій прямій та нормалі, тобто її напрямний вектор можна обчислити як векторний добуток векторів $\overline{N}$ та $\overline{S}$:

$$\overline{S_1}=\overline{N}\times\overline{S}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=-14\bar{i}+7\bar{j}-7\bar{k}.$$

Запишемо канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку M та має напрямний вектор $\overline{S_1}$:

$$\frac{x-7}{-14}=\frac{y-5}{7}=\frac{z+3}{-7},\ \text{або}\ \frac{x-7}{-2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+3}{-1}.$$

Задача 19. Знайти відстань між схрещуваними прямими $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-5}=z-2$ та $\frac{x-5}{2}=y=\frac{z-7}{-1}$.

Відстань між схрещуваними прямими – це відстань від точки, яка належить одній прямій, до площини, що проходить через другу пряму паралельно до першої прямої.

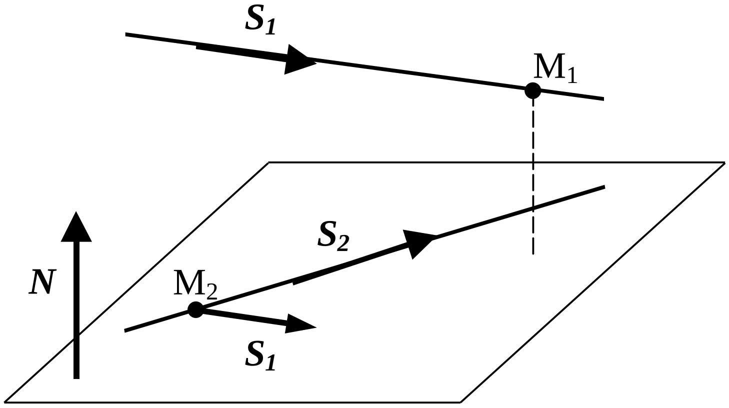


Рис. 2.11

Визначимо рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-5}{2}=y=\frac{z-7}{-1}$ паралельно до прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-5}=z-2$. Цій площині належить точка $M_2(5;0\;;7)$, а її нормальний вектор є перпендикулярним до напрямних векторів заданих прямих $\overline{S_1}=(2;-5;1)$ та $\overline{S_2}=(2;1;-1)$, тобто можна вважати, що

$$\overline{N}=\overline{S_1}\times\overline{S_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -5 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=4\bar{i}+4\bar{j}+12\bar{k}.$$

Запишемо рівняння площини, що має нормаль $\overline{N}=(4;4;12)$ та проходить через точку $M_2(5;0;7)$:

$$4(x-5)+4(y-0)+12(z-7)=0;$$

$$4x+4y+12z-104=0;$$

$$x+y+3z-26=0.$$

Обчислимо відстань від точки $M_1(1;-3\;;2)$ до цієї площини:

$$d(M_1)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot 1+1\cdot(-3)+3\cdot 2-26|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}}=\frac{|-22|}{\sqrt{11}}=2\sqrt{11}\text{ (од.)}$$

Ця величина є відстанню між заданими прямими.

2.3 Задачі для самостійної роботи

1.Записати параметричні рівняння прямої, якій належать точки M_1**(1;2;-4)** та M_2**(-1;2;-4)**.

Відповідь: $\begin{cases}x=t-1\\ y=2\\ z=-4\end{cases}.$

2. Записати параметричні рівняння прямих, які проходять через точку M**(1;-1;-3)** паралельно: а) вектору $\bar{c}=(2;-3;4)$; б) прямій $\begin{cases}x=2t+1\\ y=4t-2\\ z=1\end{cases};$

в) прямій $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{5}$.

Відповідь: а) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-3t-1 \\ z=4t-3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=4t-1 \\ z=-3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=-2t-1 \\ z=5t-3 \end{cases}$.

3. Записати канонічні рівняння прямої $\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0 \end{cases}$.

Відповідь: $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$.

4. Довести паралельність прямих $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ та $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$.

5. Довести перпендикулярність прямих $\begin{cases} x=t \\ y=-2t+1 \\ z=3t \end{cases}$ та $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$.

6. Знайти кут між прямими $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ та $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

Відповідь: $\varphi=60^0$.

7.Знайти координати точки перетину прямих $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{4}$ та

$\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-4}{2}$.

Відповідь: (1; -1; 2).

8.Записати рівняння прямої, яка проходить через початок координат перпендикулярно до прямих $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=z+3$ та $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{4}$.

Відповідь: $\frac{x}{2}=\frac{y}{9}=\frac{z}{5}$.

9.Знайти кут між площиною $3x - y + 5 = 0$ та прямою $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = z - 1$.

Відповідь: $\arcsin\frac{11\sqrt{35}}{70}$.

10. Знайти точку перетину площини $3x + y - 2z = 0$ та прямої $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-6}{4}$.

Відповідь: (1; 1; 2).

11.Записати рівняння площини, яка містить прямі:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ та $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z}{2}$;

б) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$ та $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$.

Відповідь: а) $6x - 5y - 3z - 17 = 0$; б) $x - 2y - z + 1 = 0$.

12.Знайти проекцію точки ***M*****(-5; 7; -4)** на пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$.

Відповідь: (1; 4; -1).

13.Знайти відстань між прямими $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ та $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{-1}$.

Вказівка: відстань між паралельними прямими – це відстань від точки, яка належить одній прямій, до іншої прямої.

Відповідь: $\sqrt{21}$ од.

14.Записати рівняння перпендикуляра, проведеного з точки ***M*****(3; 1; 2)** до прямої $\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{4}$.

Відповідь: $\frac{x-3}{-2} = y - 1 = z - 2$.

15.Знайти відстань між схрещуваними прямими $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-4}$ та $x-2=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

Відповідь: $\sqrt{30}$ од.

Розділ 3
ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3.1. Короткі теоретичні відомості

Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+l=0,$$

де принаймні один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля.

Серед поверхонь другого порядку існують такі, що мають центр симетрії і три взаємно перпендикулярні площини симетрії, що проходять через нього. Якщо обрати ці площини за координатні площини, то до рівняння поверхні не можуть увійти члени з першими степенями координат і члени з їхніми парними добутками, через те що зміна знаку в одній з координат, в двох з них чи у всіх трьох не має відобразитися на рівнянні. Таким чином, будь-яка ***центральна поверхня***, при відповідному виборі системи координат, зображується рівнянням

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}=0,$$

і, залежно від знаків коефіцієнтів, це рівняння зображує різні типи поверхонь, а саме: до поверхонь другого порядку належать, зокрема, циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди.

Циліндричною поверхнею називається поверхня, утворена рухом прямої, що перетинає задану лінію і паралельна заданому напрямку.

Задана лінія, через точки якої проходить пряма, яка переміщується, називається ***направляючою***, а кожне положення такої прямої називається ***твірною*** розглядуваної циліндричної поверхні.

Очевидно, що якщо твірні циліндричної поверхні паралельні осі $\boldsymbol{Oy}$, а рівняння направляючої має вигляд $\boldsymbol{y=0}, \quad \boldsymbol{F(x,z)=0}$, то рівняння циліндричної поверхні $\boldsymbol{F(x,z)=0}$.

Аналогічно для циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі $\boldsymbol{Ox}$, маємо рівняння $\boldsymbol{F(y,z)=0}$.

Якщо направляючою є коло, яке лежить в площині $\boldsymbol{Oxy}$, з центром в точці **(*a; b;* 0)** і радіусом $\boldsymbol{R}$, а твірні паралельні осі $\boldsymbol{Oz}$, тоді циліндрична поверхня називається ***круговим циліндром***, а її рівняння має вигляд

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}.$$

Рівняння $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ задає ***еліптичний циліндр*** з твірними, паралельними осі $\boldsymbol{Oz}$, та направляючою –еліпсом, півосі якого дорівнюють $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, а центр розташований у початку координат.

Поверхня, визначена рівнянням $\boldsymbol{y^2=2px}$, називається ***параболічним циліндром*** **(**рис.3.1**)**.

Поверхня, визначена рівнянням $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$, називається ***гіперболічним циліндром*** **(**рис.3.2**)**.

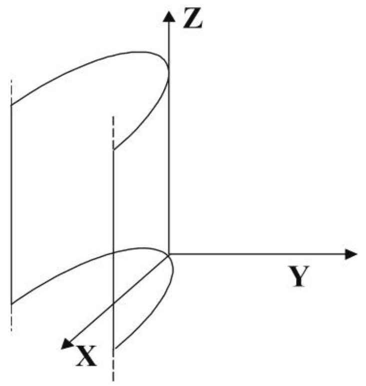


Рис. 3.1

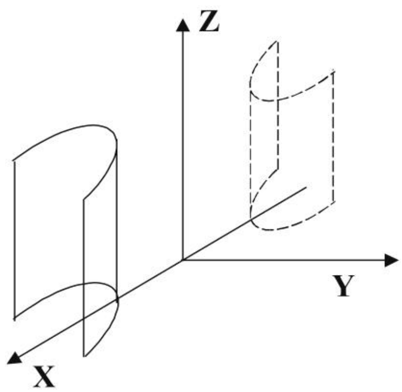


Рис.3.2

Крім вже наведених, існують ще 6 типів поверхонь 2-го порядку. Їх найпростіші, або ***канонічні рівняння***, одержані при найбільш зручному для вивчення поверхонь розташуванні осей координат, мають вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ – еліпсоїд (рис. 3.3) ;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ – однопорожнинний гіперболоїд (рис. 3.4);

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ – двопорожнинний гіперболоїд (рис. 3.5);

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$ – еліптичний параболоїд (рис. 3.6);

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$ – гіперболічний параболоїд (рис. 3.7);

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$ - конус 2-го порядку (рис. 3.8).

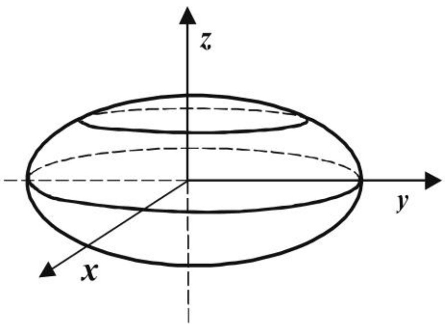


Рис. 3.3

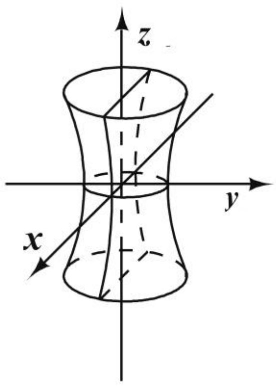


Рис. 3.4

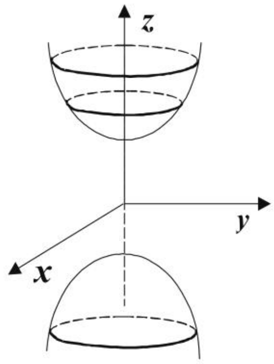


Рис. 3.5

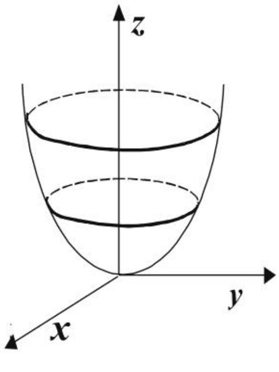


Рис. 3.6

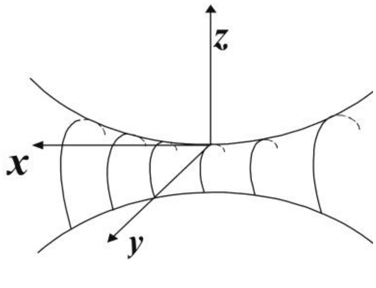


Рис. 3.7

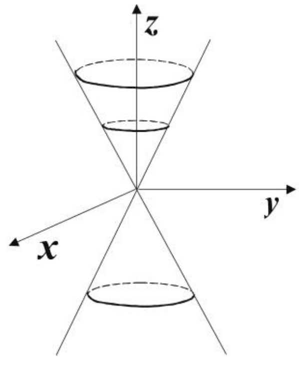


Рис. 3.8

При обертанні лінії, яка розташована в площині, навколо однієї з прямих цієї площини створюється поверхня, яку називають ***поверхнею обертання***.

Наприклад, при обертанні навколо осі Oz розташованої в площині Oyz кривої $\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ отримаємо поверхню $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$, а при обертанні цієї кривої навколо осі Oz рівняння поверхні матиме вигляд $F\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$. Аналогічно перетворюються рівняння і при обертанні навколо координатних осей ліній, розташованих в інших координатних площинах.

3.2. Розв'язання типових задач

Задача 1. Яку поверхню визначає в просторі рівняння:

а) $x^2=4y$; б) $z^2=xz$?

а) Рівняння $x^2=4y$ визначає параболічний циліндр з твірними, паралельними осі Oz.

Направляючою циліндричної поверхні є парабола $x^2=4y$, $z=0$.

б) Рівняння $z^2=xz$ може бути представлено у вигляді $z(z-x)=0$ і розпадеться на два рівняння: $z=0$ і $z-x=0$, тобто воно визначає дві площини – площину Oxy і бісектральну площину $z=x$, яка проходить через вісь Oy.

Задача 2. Привести до канонічного вигляду рівняння

$$4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0.$$

Згрупуємо члени з однаковими координатами та доповнимо відповідні вирази до повних квадратів:

$$4(x^2-2x)+9(y^2-2y)+36(z^2-2z)=-13;$$

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2-2y+1)+36(z^2-2z+1)=-13+4+9+36;$$

$$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36.$$

Зробимо паралельний перенос осей координат, де за новий початок координат виберемо точку $\boldsymbol{O^1(1;1;1)}$, тоді формули перетворення координат мають вигляд

$$\boldsymbol{X = x - 1},$$
$$\boldsymbol{Y = y - 1},$$
$$\boldsymbol{Z = z - 1}.$$

В новій системі координат рівняння поверхні має вигляд:

$$\boldsymbol{\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{1} = 1}.$$

Це рівняння визначає еліпсоїд; центр якого знаходиться в точці $\boldsymbol{O^1}$, а півосі дорівнюють відповідно **3**; **2** і **1**.

Виконаємо побудову в системі координат $\boldsymbol{O^1XYZ}$ (рис.3.9).

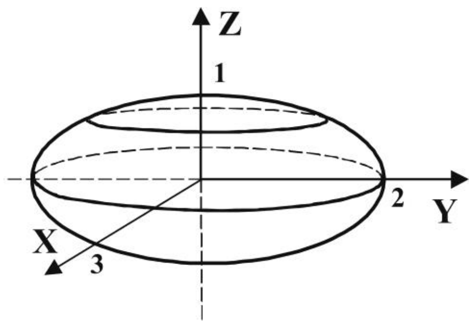


Рис. 3.9

Задача 3. Яку поверхню визначає рівняння

$$\boldsymbol{2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4x + 2y + 8z + 1 = 0}\ ?$$

Аналогічно розв'язку задачі 2, зводимо до канонічного виду рівняння поверхні:

$$\boldsymbol{2(x^2 + 2x - 1) - 2 - (y^2 - 2y + 1) + 1 + 2(z^2 + 4z + 4) - 8 + 1 = 0};$$

$$\boldsymbol{2(x+1)^2 - (y-1)^2 + 2(z+2)^2 = 8}.$$

Тоді

$$\boldsymbol{\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{8} + \frac{(z+2)^2}{4} = 1}.$$

Це рівняння однопорожнинного гіперболоїда, центр якого зміщений у точку $\boldsymbol{O^1(-1;1;-2)}$. Якщо ввести нові координати

$$\boldsymbol{X = x + 1},\ \boldsymbol{Y = y - 1},\ \boldsymbol{Z = z + 2},$$

то рівняння матиме вигляд:

$$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{8}-\frac{Z^2}{4}=1$$

Виконаємо побудову в системі координат O^1XYZ (рис.3.10).

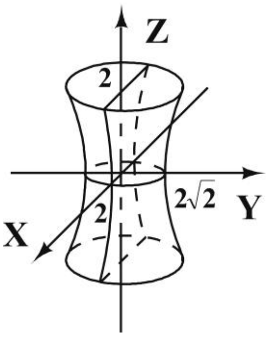


Рис. 3.10

Задача 4. Скласти рівняння конічної поверхні, вершиною якої є точка ***M(0;0;1)***, а направляючою – еліпс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, ***z***=**3**.

Запишемо рівняння твірної ***AM***, де $A(x_0;y_0;z_0)$ –точка, яка лежить на еліпсі:

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}.$$

Оскільки точка ***A*** лежить на еліпсі, то її координати задовольняють рівнянню еліпса, тобто

$$\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1,\ z_0=3.$$

Виключимо параметри x_0, y_0 і z_0 із системи рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x_0}=\dfrac{z-1}{z_0-1}\\ \dfrac{y}{y_0}=\dfrac{z-1}{z_0-1}\\ \dfrac{x_0^2}{25}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\\ z_0=3\end{cases}$$

та одержимо шукане рівняння конуса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{4}=0.$$

Задача 5. Показати, що рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ визначає однопорожнинний гіперболоїд обертання навколо осі Oy.

Розглянемо переріз даної поверхні площинами $y=h$, які перпендикулярні до координатної осі Oy. У перерізі отримаємо лінію

$$x^2+z^2=R,\ y=h, \text{ де } R=\frac{a}{b}\sqrt{b+h}.$$

Таким чином, будь-який переріз, що перпендикулярний до Oy, є колом радіуса R, тобто поверхня, що досліджується, є поверхнею обертання навколо Oy.

Щоб дізнатись, обертанням якої лінії вона отримана, перетнемо поверхню площиною $z=0$. Лінією перерізу буде гіпербола на площині Oxy

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0.$$

Це є гіпербола с піввісями a, b. Обертаючись навколо Oy, вона й створює дану поверхню, яка є однопорожнинним гіперболоїдом обертання навколо осі Oy (рис. 3.11).

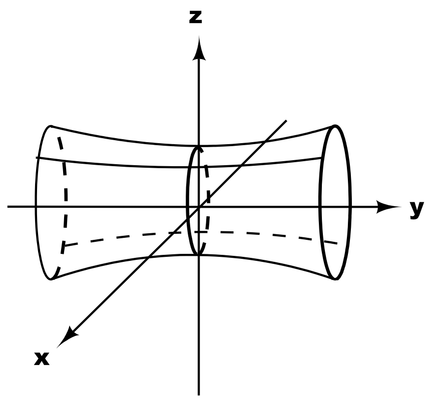


Рис. 3.11

Задача 6. Дослідити форму та розміщення відносно системи координат поверхні $4-z=x^2+y^2$.

Застосуємо метод перерізів.

Припустимо, що $z = h$.Тоді $x^2+y^2=4-h$.

Зрозуміло, що вираз $4-h$ повинен бути невід'ємним. Нехай $4-h=R^2$. Тоді отримаємо у перерізі площиною $z = h$ лінію

$$x^2+y^2=R^2;\ z=h.$$

Ця лінія є колом радіуса $\boldsymbol{R}$ з центром на вісі $\boldsymbol{Oz}$. Таким чином, розглядувана поверхня є поверхнею обертання навколо $\boldsymbol{Oz}$.

Дізнаємося, обертанням якої лінії вона отримана. Для цього перетнемо поверхню площиною $\boldsymbol{x = 0}$. У перерізі отримаємо параболу на площині $\boldsymbol{Oyz}$

$$y^2 = 4 - z\ ;\ x = 0\ .$$

Вершиною параболи є точка **(0; 0; 4)**; параболу напрямлено у від’ємну сторону осі $\boldsymbol{Oz}$. Таким чином, досліджувана поверхня – це параболоїд обертання (рис. 3.12).

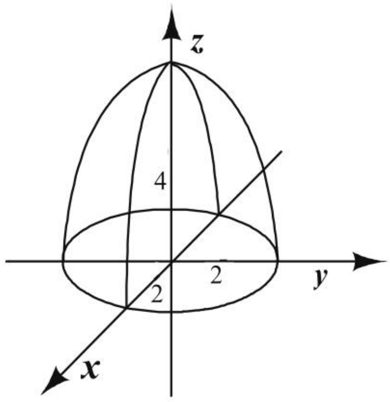


Рис. 3.12

Задача 7. Яку поверхню визначає рівняння

$$9y^2 - 16z^2 + 64z - 18y - 199 = 0\,?$$

Ця поверхня є гіперболічним циліндром із твірними, що паралельні вісі $\boldsymbol{Ox}$. Насправді, дане рівняння не містить $\boldsymbol{x}$, а направляюча циліндра є гіпербола:

$$\begin{cases} 9y^2 - 16z^2 + 64z - 18y - 199 = 0 \\ x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 9\left(y^2 - 2y\right) - 16\left(z^2 - 4z\right) - 199 = 0 \\ x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 9\left(y^2 - 2y + 1\right) - 16\left(z^2 - 4z + 4\right) - 199 - 9 + 64 = 0 \\ x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 9(y-1)^2 - 16(z-2)^2 = 144 \\ x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(z-2)^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Центр гіперболи розташований у точці $(0;1;2)$, дійсна вісь є паралельною до Oy.

Задача 8. Записати рівняння поверхні, отриманої при обертанні параболи $\begin{cases} x^2 = y \\ z = 0 \end{cases}$ навколо координатної осі Oy.

Парабола міститься у координатній площині Oxy. Для побудови рівняння шуканої поверхні обертання у рівнянні плоскої кривої замінимо змінну x на вираз $\pm\sqrt{x^2+z^2}$:

$$\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 = y;$$

$$x^2 + z^2 = y.$$

Це рівняння параболоїду обертання.

Задача 9. Записати рівняння поверхні, отриманої при обертанні лінії $\begin{cases} x-1=z \\ y=0 \end{cases}$ навколо координатної осі Oz.

Задана лінія є прямою, яка розташована в координатній площині Oxz. Замінимо в рівнянні цієї прямої змінну x на вираз $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} - 1 = z;$$

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = z+1;$$

$$x^2 + y^2 = (z+1)^2.$$

Отримане рівняння задає круговий конус з віссю Oz та центром $(0;0;-1)$.

3.3 Задачі для самостійної роботи

1. Визначити тип поверхні ,заданої рівнянням:

а) $x^2+4y^2-9z^2-36=0$; б) $x^2+y^2+z^2-36=0$;

в) $x^2+4y^2-z=0$; г) $x^2-4y^2-z=0$.

Відповідь: а) однопорожнинний гіперболоїд; б) сфера; в) еліптичний параболоїд; д) гіперболічний параболоїд.

2. Звести рівняння до канонічного виду та визначити тип поверхні:

а) $x^2-y^2-2x-3=0$; б) $x^2+y^2+4x-6y-z+9=0$;

в) $x^2-4y^2+z^2+4z+4=0$.

Відповідь: а) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ –гіперболічний циліндр;

б) $(x+2)^2+(y-3)^2=z+4$ –параболоїд обертання;

в) $x^2+(z+2)^2=4y^2$ –круговий конус з вершиною $(0;0;-2)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

2. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Аналитическая геометрия: – М.: Физматлит, 2002.– 240 с.

3. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Наука, 1979.–511с.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: – М.: Оникс, 2003. – 304 с.

З М І С Т

Розділ 1
Площина у просторі

1.1. Короткі теоретичні відомості ……………………………………………3
1.2. Розв'язання типових задач …………………………………………………..5
1.3. Задачі для самостійної роботи………………………………………………16

Розділ 2
Пряма у просторі. Площина та пряма

2.1. Короткі теоретичні відомості ……………………………………………17
2.2. Розв'язання типових задач …………………………………....................20
2.3. Задачі для самостійної роботи………………………………………………34

Розділ 3
Поверхні другого порядку

3.1. Короткі теоретичні відомості …………...37
3.2. Розв'язання типових задач …………………………………………………40
3.3. Задачі для самостійної роботи………………………………………………46

ЛІТЕРАТУРА…………………………………………………………………. .46

Навчальне видання

Кадильникова Тетяна Михайлівна
Кочеткова Інна Борисівна
Сушко Лариса Федорівна
Білова Оксана Вікторівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
У ПРОСТОРІ

Навчальний посібник

Тематичний план 2012, поз. 98

Підписано до друку 14.12.2012. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 2,82. Умов. друк. арк. 2,79. Тираж 100 пр. Замовлення №
Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ