МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

А.В. ПАВЛЕНКО, І.В. ЩЕРБИНА,
І.В. ПАСІЧНИК, Т.П. БАС

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Дніпропетровськ НМетАУ 2015

УДК 517(07)
Вища математика. Частина 2: Навч. посібник / А.В. Павленко, І.В. Щербина, І.В. Пасічник, Т.П. Бас. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2015. – 103 с.

Наведені докладні теоретичні відомості до вивчення розділів «Похідні та диференціали вищих порядків», «Застосування диференціального числення до обчислення границь функцій. Правило Лопіталя», «Наближені методи розв'язання рівнянь», «Застосування диференціального числення до дослідження функцій». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів напряму 6.050402 – ливарне виробництво.

Іл. 14. Бібліогр.: 6 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (ДВНЗ НГУ)
А.В. Сясєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ЗМІСТ

ВСТУП

Даний навчальний посібник є продовженням попереднього навчального посібника «Вища математика. Частина 2» для студентів напряму 6.050402 – ливарне виробництво.

Оновлення програми для студентів названого напряму і зменшення часів аудиторних занять передбачає новий підхід до викладання матеріалу з дисципліни «Вища математика».

Посібник складено згідно з робочою програмою дисципліни, матеріал подається у звичній для студентів формі – спочатку теорія, а потім практичні завдання. Наявність великої кількості прикладів та детально розібрані розв'язання задач допоможуть студентам активно засвоїти теоретичний матеріал.

Автори посібника сподіваються, що ця робота буде корисною для кожного студента.

ЛЕКЦІЯ 5. МЕТОД ЛОГАРИФМІЧНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Поняття диференціала тісно пов'язане з поняттям похідної, і є одним із найважливіших в математиці. Диференціал наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу. Внаслідок цього диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ. Заміну дійсного приросту величини, що характеризує будь-який процес, диференціалом цієї величини на даному проміжку часу називається ***лінеаризацією процесу***. Термін «***диференціал***» (від латинського слова differentia – різниця) ввів у математику В.Лейбніц [2].

5.1. Логарифмічне диференціювання

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно спочатку прологарифмувати задану функцію, а потім знайти її похідну як від функції, заданої у неявній формі. Така операція називається ***логарифмічним диференціюванням***.

Припустимо, що функція $y = f(x) > 0$ на деякій множині значень аргументу і диференційовна на цій множині. Тоді за формулою похідної складної функції $(\ln f(x))' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$, звідки

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'. \tag{5.1}$$

Цією формулою користуються для обчислення похідних степенево-показникових функцій $u(x)^{v(x)}$, а також похідних громіздких добутків та часток.

Приклад 5.1. Знайти похідну функції $y = \dfrac{(2x+3)^6 \sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8 \, 6^{tg\, x}}$.

Розв'язання. Користуючись властивостями логарифмів та правилом логарифмічного диференціювання:

$$\ln y = \ln\left(\frac{(2x+6)^6\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\, 6^{tg\, x}}\right);$$

$$\ln y = 6\ln(2x+3) + \frac{1}{5}\ln(3x-7) - 8\ln(4x-1) - tg\, x \ln 6;$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6\cdot 2}{2x+3} + \frac{3}{5(3x-7)} - \frac{8\cdot 4}{4x-1} - \ln 6 \cdot \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$y' = \frac{(2x+3)^6\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\cdot 6^{tg\, x}}\left(\frac{12}{2x+3} + \frac{3}{5(3x-7)} - \frac{32}{4x-1} - \frac{\ln 6}{\cos^2 x}\right).$$

Приклад 5.2. Знайти похідну степенево-показникової функції $y = x^{\cos 4x}$.

Розв'язання. За формулою (5.1) маємо $y' = x^{\cos 4x}\left(\ln x^{\cos 4x}\right)' =$ $= x^{\cos 4x}\left(\cos 4x \cdot \ln x\right)' = x^{\cos 4x}\left(-4\sin 4x\cdot \ln x + \dfrac{\cos 4x}{x}\right).$

Зауваження 5.1. В загальному випадку похідна степенево-показникової функції $y = u^v$, де u, v – задані і диференційовні функції від x, дорівнює сумі похідної показникової функції за умови, що $u = const$, і похідної степеневої функції за умови, що $v = const$: $\left(u^v\right)' = u^v \ln u \cdot v' + v\, u^{v-1}\cdot u'$.

5.2. Диференціювання функцій, заданих параметрично

Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$.

Припустимо, що функція $x = \varphi(t)$ на сегменті $[\alpha, \beta]$ задовольняє теорему про існування похідної оберненої функції [2], а функція $\psi(t)$ має похідну в інтервалі (α, β). Тоді існує обернена функція $t = \Phi(x)$, яка має похідну $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$.

Функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складну функцію $y = \psi(t) = \psi(\Phi(x))$ з проміжним аргументом $t = \Phi(x)$. За правилом диференціювання складної функції знаходимо $y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'_t(t) \cdot \Phi'(x) = \dfrac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}$.

Таким чином, похідну функції, заданої параметрично, знаходимо за формулою

$$y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (5.2)$$

Приклад 5.3 Знайти похідну функції $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0$ – параметричні рівняння кривої, що називається циклоїдою.

Розв'язання. Маємо $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \sin t$, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} =$

$$= \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = ctg \frac{t}{2}.$$

5.3. Диференціал функції

5.3.1. Означення, геометричний та механічний зміст диференціала

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x \in [a, b]$, тобто має в цій точці похідну $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді різниця між функцією і її границею є нескінченно малою величиною [2]:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x),\ \alpha(x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0,$$

звідки $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$.

У цьому виразі доданок $f'(x)\Delta x$ є нескінченно малою функцією одного порядку з Δx, а доданок $\alpha(x) \cdot \Delta x$ – нескінченно малою функцією вищого порядку, ніж Δx, тобто $f'(x)\Delta x$ – головна частина приросту функції Δy, лінійна відносно приросту аргументу.

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x називають головну, лінійну щодо Δx, частину приросту функції в цій точці: $dy = f'(x)\Delta x$.

Диференціалом dx незалежної змінної x називають її приріст Δx, оскільки якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$ і $dy = dx = \Delta x$. Тоді

$$dy = f'(x)dx. \tag{5.3}$$

Ця формула дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної, тобто $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Приклад 5.4. Знайти диференціал функції $y = \ln\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ при $x = 0$.

Розв'язання. За означенням $dy = \left(\ln\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)' dx = \dfrac{1}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)} \cdot$

$\cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) dx = ctg\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) dx$. Отже, $dy|_{x=0} = ctg\left(0 + \dfrac{\pi}{2}\right) dx = 0$.

Диференціал функції має просте геометричне тлумачення. Нехай маємо графік функції $y = f(x)$ (рис. 5.1).

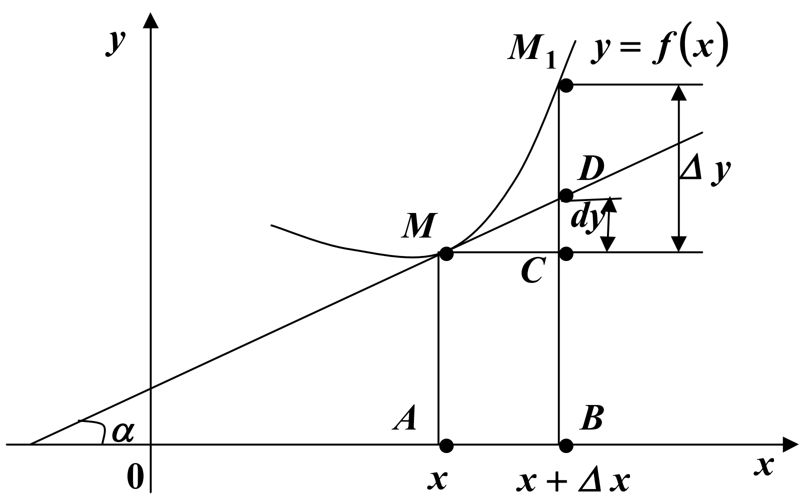


Рис. 5.1

Візьмемо на цій кривій точку $M(x, y)$ і проведемо в ній дотичну до графіка функції. Нехай α – кут нахилу дотичної з додатнім напрямом осі $0x$. Тоді $tg\,\alpha = f'(x)$.

Надамо координаті x приросту Δx: $\Delta x = AB = MC$. Тоді ордината точки M дістане приріст $\Delta y = CM_1$, а ордината точки M дотичної – приріст CD. Враховуючи, що $\angle DMC = \alpha$, маємо $CD = MC\, tg\,\alpha = f'(x)\Delta x = dy$.

Таким чином, диференціал функції $f(x)$, який відповідає даним значенням x і Δx, дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в даній точці x.

З'ясуємо механічний зміст диференціала. Нехай матеріальна точка рухається за відомим законом $s = f(t)$. Тоді диференціал цієї функції $ds = f'(t)\Delta t$ при фіксованих значеннях t і Δt – це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt, якби вона рухалась прямолінійно і рівномірно із сталою швидкістю $v = f'(t)$.

5.3.2. Властивості диференціала

Оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то властивості диференціала можна легко дістати із відповідних властивостей похідної. Тому наведені властивості диференціала випливають із відповідних правил диференціювання сталої, суми, добутку та частки функцій. Отже, якщо u і v – диференційовні функції від x, а c – стала, то маємо такі правила знаходження диференціалів:

$dc = 0$;

$d(cu) = c\,du$;

$d(u \pm v) = du \pm dv$;

$d(uv) = v\,du + u\,dv$;

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

5.3.3. Інваріантність форми диференціала

Нехай задана складна функція $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f[\varphi(x)]$. Якщо існують похідні y'_u і u'_x, то існує $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Тоді $dy = y'_x dx = = y'_u \cdot u'_x dx = y'_u du$.

Оскільки $dy = d[f(x)] = f'(x)dx$, то можемо зробити висновок: якщо замість незалежної змінної x підставити довільну функцію від x, то форма диференціала не змінюється. Ця властивість носить назву ***інваріантності форми диференціала***.

5.3.4. Застосування диференціалів до наближених обчислень

Диференціали використовують при наближених обчисленнях значень функцій, застосовуючи наближену рівність $\Delta y \approx dy$, тобто при ***малих приростах аргументу*** Δx приріст функції можна замінити її диференціалом.

Враховуючи, що $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, отримаємо $f(x + \Delta x) - f(x) \approx \approx dy$, звідки

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (5.4)$$

Ця формула визначає спосіб наближеного обчислення значення функції в точці.

Приклад 5.5. Знайти диференціал функції $y = cos^3 3x$:

а) при довільних значеннях x і Δx; б) при $x = \frac{\pi}{18}$; в) при $x = \frac{\pi}{18}$, $\Delta x = 0{,}01$.

Розв'язання. а) Згідно з формулою $dy = y'dx = \left(cos^3 3x\right)' dx = = 3 cos^2 3x \cdot (-sin 3x) \cdot 3dx = -9 cos^2 3x \cdot sin 3x\, dx$;

б) $dy|_{x=\frac{\pi}{18}} = -9 cos^2 \frac{3\pi}{18} \cdot sin \frac{3\pi}{18} dx = -9 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} dx = -\frac{27}{8} dx = -3{,}375\, dx$;

в) $dy|_{\substack{x=\frac{\pi}{18} \\ \Delta x = 0{,}01}} = (y' \cdot \Delta x)|_{\substack{x=\frac{\pi}{18} \\ \Delta x = 0{,}01}} = -3{,}375 \cdot 0{,}01 = -0{,}03375$.

Приклад 5.6. Обчислити наближено $\ln 1{,}02$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = \ln x$, тоді маємо

$$\ln(x + \Delta x) \approx \ln x + (\ln x)' \Delta x;$$

$$\ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}.$$

Якщо $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, то $\ln 1{,}02 \approx \ln 1 + \dfrac{0{,}02}{1} = 0 + 0{,}02 = 0{,}02$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5.
ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.
ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Приклад 1. Обчислити за допомогою логарифмічного диференціювання похідну функції:

а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2(x+1)}{x-5}}$; б) $y = \dfrac{(3-x)^4}{7^x \sqrt{5x+2}}$; в) $y = \left(\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}\right)^5$.

Розв'язання. а) Спочатку прологарифмуємо за основою e обидві частини рівності $\ln y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x^2(x+1)}{x-5}}$.

Згадаємо, що:

$$\log_a x^n = n \log_a x; \quad \log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Тоді отримаємо:

$$\ln y = \frac{1}{3}\left(\ln x^2 + \ln(x+1) - \ln(x-5)\right);$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\left(2 \ln x + \ln(x+1) - \ln(x-5)\right);$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-5}\right) = \frac{1}{3} \frac{2(x+1)(x-5) + x(x-5) - x(x+1)}{x(x+1)(x-5)} =$$

$$= \frac{2x^2 - 10x + 2x - 10 + x^2 - 5x - x^2 - x}{3x(x+1)(x-5)} = \frac{2x^2 - 14x - 10}{3x(x+1)(x-5)};$$

$$y' = y \cdot \frac{2x^2 - 14x - 10}{3x(x+1)(x-5)}; \qquad y' = \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{x-5}} \cdot \frac{2x^2 - 14x - 10}{3x(x+1)(x-5)}.$$

б) $y = \dfrac{(3-x)^4}{7^x \sqrt{5x+2}}$.

$$\ln y = \ln \frac{(3-x)^4}{7^x\sqrt{5x+2}}; \qquad \ln y = 4\ln(3-x) - x\ln 7 - \frac{1}{2}\ln(5x+2);$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\frac{4}{3-x} - \ln 7 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5x+2} = \frac{-40x - 16 - 15x + 5x}{2(x-3)(5x+2)} - \ln 7 =$$

$$= -\frac{35x+31}{2(x-3)(5x+2)} - \ln 7;$$

$$y' = -y \cdot \left(\frac{35x+31}{(x-3)(5x+2)} + \ln 7\right);$$

$$y' = -\frac{(3-x)^4}{7^x\sqrt{5x+2}} \cdot \left(\frac{35x+31}{(x-3)(5x+2)} + \ln 7\right).$$

в) $y = \left(\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}\right)^5$.

$$\ln y = \ln\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^5; \qquad \ln y = 5(\ln\cos x - \ln(1+\sin x));$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 5\left(-\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{1+\sin x} \cdot \cos x\right) = 5 \cdot \left(-\frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}\right) =$$

$$= -5 \cdot \frac{\sin x + 1}{\cos x(1+\sin x)} = -\frac{5}{\cos x};$$

$$y' = -y \cdot \frac{5}{\cos x}; \qquad y' = -\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^5 \cdot \frac{5}{\cos x}.$$

Приклад 2. Знайти похідні степенево-показникових функцій:

а) $y = (\sin x)^x$;   б) $y = (tg 2x)^{ctg\frac{x}{2}}$;   в) $y = (3 + \ln x)^{x^2}$.

Розв'язання. а) Застосовуємо логарифмічне диференціювання:

$$\ln y=\ln(\sin x)^{x};\quad \ln y=x\cdot\ln\sin x;\qquad \frac{1}{y}\cdot y'=1\cdot\ln\sin x+x\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x;$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln\sin x+xctgx;\qquad y'=y(\ln\sin x+xctgx);$$

$$y'=(\sin x)^{x}\cdot(\ln\sin x+xctgx).$$

б) $y=(tg2x)^{ctg\frac{x}{2}}$.

$$\ln y=\ln(tg2x)^{ctg\frac{x}{2}};\qquad \ln y=ctg\frac{x}{2}\cdot\ln(tg2x);$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=-\frac{1}{\sin^{2}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln(tg2x)+ctg\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{tg2x}\cdot\frac{1}{\cos^{2}2x}\cdot 2;$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=-\frac{\ln(tg2x)}{2\sin^{2}\frac{x}{2}}+\frac{2ctg\frac{x}{2}}{\sin 2x\cdot\cos 2x};\ \frac{1}{y}\cdot y'=-\frac{\ln(tg2x)}{2\sin^{2}\frac{x}{2}}+\frac{4ctg\frac{x}{2}}{\sin 4x};$$

$$y'=y\left(\frac{4ctg\frac{x}{2}}{\sin 4x}-\frac{\ln(tg2x)}{2\sin^{2}\frac{x}{2}}\right);\qquad y'=(tg2x)^{ctg\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{4ctg\frac{x}{2}}{\sin 4x}-\frac{\ln(tg2x)}{2\sin^{2}\frac{x}{2}}\right).$$

в) $y=(3+\ln x)^{x^{2}}$.

$$\ln y=\ln(3+\ln x)^{x^{2}};\quad \ln y=x^{2}\cdot\ln(3+\ln x);$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=2x\cdot\ln(3+\ln x)+\frac{x^{2}}{(3+\ln x)}\cdot\frac{1}{x};$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=2x\cdot\ln(3+\ln x)+\frac{x}{3+\ln x};\qquad y'=y\left(2x\cdot\ln(3+\ln x)+\frac{x}{3+\ln x}\right);$$

$$y'=(3+\ln x)^{x^{2}}\cdot\left(2x\cdot\ln(3+\ln x)+\frac{x}{3+\ln x}\right).$$

Приклад 3. Знайти диференціали функцій:

а) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{5}} - x^7 + \sqrt[5]{x^3}$; в) $y = \frac{3^x}{5 + \cos 2x}$;

б) $y = e^{2x} \cdot \sin 5x$; г) $y = arctg^3 \sqrt{x}$.

Розв'язання. а) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{5}} - x^7 + \sqrt[5]{x^3} = x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-2} + \frac{4}{\sqrt{5}} - x^7 + x^{\frac{3}{5}}$.

Знаходимо похідну даної функції: $y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 4x^{-3} - 7x^6 + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$.

Користуючись формулою (5.3), маємо:

$$dy = \left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 4x^{-3} - 7x^6 + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}\right)dx.$$

б) $y = e^{2x} \cdot \sin 5x$.

$$y' = 2e^{2x} \cdot \sin 5x + 5e^{2x} \cdot \cos 5x = e^{2x}(2\sin 5x + 5\cos 5x);$$

$$dy = e^{2x}(2\sin 5x + 5\cos 5x)dx.$$

в) $y = \frac{3^x}{5 + \cos 2x}$.

$$y' = \frac{3^x \ln 3(5 + \cos 2x) + 3^x \cdot 2\sin 2x}{(5 + \cos 2x)^2};$$

$$dy = \frac{3^x \ln 3(5 + \cos 2x) + 3^x \cdot 2\sin 2x}{(5 + \cos 2x)^2}dx.$$

г) $y = arctg^3 \sqrt{x}$.

$$y' = 3arctg^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3arctg^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1 + x)};$$

$$dy = \frac{3arctg^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1 + x)}dx.$$

Приклад 4. Замінивши приріст функції диференціалом, знайти наближене значення функції: $\sqrt[4]{15,8}$.

Розв'язання. Число $\sqrt[4]{15,8}$ – значення функції $y = \sqrt[4]{x}$ при $x = 15,8$.

$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta y = \sqrt[4]{x_0} + \Delta y$.

Приріст функції замінюємо диференціалом $\Delta y = dy(x_0)$.

$$dy(x_0) = \left(\sqrt[4]{x_0}\right)' \cdot \Delta x = \frac{1}{4} x_0^{-\frac{3}{4}} \cdot \Delta x = \frac{1}{4\sqrt[4]{x_0^3}} \cdot \Delta x.$$

У нашому випадку $x_0 = 16$, $\Delta x = 15,8 - 16 = -0,2$.

Тому $dy(x_0) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} \cdot (-0,2) = -0,0125$. $\sqrt[4]{15,8} \approx \sqrt[4]{16} - 0,0125 = 1,9875$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити за допомогою логарифмічного диференціювання похідну функції:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4} \cdot \cos 3x}{x\sqrt[3]{3x^2 + 1}}$;

в) $y = (ctgx)^{\sqrt{\cos 2x}}$ 4;

б) $y = \dfrac{x^2 (x^3 + 1)^5}{6^{\ln x^4}}$;

г) $y = (2x^3 + 1)^{\sin x}$.

2. Знайти диференціали функцій:

а) $y = 3x^5 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x^7} + \sqrt[6]{5}$;

в) $y = \sqrt{4x^2 + 5x - 1}$;

б) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$;

г) $y = 5^{\ln tgx}$.

3. Знайти наближене значення функції $y = f(x)$ при $x = x_1$.

а) $y = \sqrt[3]{3x^2 + 8x - 16}$, $x_1 = 3,94$;

б) $y = arctgx$, $x_1 = 1,05$.

ЛЕКЦІЯ 6. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

6.1. Похідні вищих порядків явно заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана на інтервалі (a,b) і диференційовна у кожній точці цього інтервалу.

Тоді на інтервалі (a,b) буде визначена функція $y = f'(x)$, яку називають ***першою похідною*** (або ***похідною першого порядку***). Якщо і ця функція є диференційовною в деякій точці x інтервалу (a,b), тобто має у цій точці похідну, то значення похідної від функції $f'(x)$ в точці x називається ***другою похідною*** функції $f(x)$ або похідною другого порядку і позначається одним із символів:

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Отже, $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Другу похідну можна тлумачити як величину, що дорівнює прискоренню рухомої точки в даний момент часу (механічний зміст другої похідної).

Похідна від другої похідної, якщо вона існує, називається ***третьою похідною*** або ***похідною третього порядку*** $y''' = f'''(x)$. Так можна ввести похідні четвертого, п'ятого і взагалі n-го порядку:

$$y^{(IV)} = \left(y'''\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Похідні порядку вище першого називають ***похідними вищих порядків***.

Приклад 6.1. Знайти четверту похідну функції $y = x^4 - 5x^3 + 2x - 1$.

Розв'язання. Маємо $y' = 4x^3 - 15x^2 + 2$; $y'' = 12x^2 - 30x$; $y''' = 24x - 30$; $y^{(IV)} = 24$.

Приклад 6.2. Знайти похідну n-го порядку від функції $y = sin\, x$.

Розв'язання. $y' = cos\, x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

$y'' = -sin\, x = sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$;

$y''' = -cos\, x = sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$;

$y^{(IV)} = sin\, x = sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ і за методом індукції $y^{(n)} = sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right)$.

Зауваження 6.1. В таблиці 6.1 наведені формули для обчислення похідних n-го порядку деяких елементарних функцій.

Таблиця 6.1

Таблиця похідних вищих порядків

$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0 \Rightarrow (P_m(x))^{(n)} = \begin{cases} a_m m!, & n = m \\ 0, & n > m \end{cases}$	
$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot ... \cdot (\alpha - n + 1) \cdot x^{\alpha - n}$, $x > 0$, $\alpha \in R$	$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, $x \neq 0$
$(a^x)^{(n)} = a^x \cdot ln^n a$, $0 < a \neq 1$	$(e^x)^{(n)} = e^x$
$(log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n \cdot ln^n a}$, $0 < a \neq 1$, $x > 0$	$(ln\, x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}$, $x > 0$
$(sin\, x)^{(n)} = sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$	$(cos\, x)^{(n)} = cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$

Приклад 6.3. Обчислити похідні функції $y = x^3 \cdot cos\, x$ до третього порядку включно.

Розв'язання. Обчислимо похідні, застосовуючи наступні формули:

$(uv)' = u'v + uv'$,

$(uv)'' = u''v + u'v' + v'u' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$,

$$(uv)''' = u'''v + u''v' + 2\left(u''v' + u'v''\right) + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Отже, $y' = 3x^2 \cos x + x^3\left(-\sin x\right)$;

$$y'' = \left(x^3\right)'' \cdot \cos x + 2\left(x^3\right)' \cdot \left(\cos x\right)' + x^3 \cdot \left(\cos x\right)'' = 6x \cdot \cos x + 2 \cdot 3x^2 \cdot \left(-\sin x\right) + \\ + x^3\left(-\cos x\right) = 6x \cdot \cos x - 6x^2 \cdot \sin x - x^3 \cos x;$$

$$y''' = (x^3)''' \cdot \cos x + 3\left(x^3\right)'' \cdot \left(\cos x\right)' + 3\left(x^3\right)' \cdot \left(\cos x\right)'' + x^3 \cdot (\cos x)''' = 6 \cdot \cos x + \\ + 3 \cdot 6x \cdot \left(-\sin x\right) + 3 \cdot 3x^2 \cdot \left(-\cos x\right) + x^3 \cdot \sin x = 6\cos x - 18x \sin x - 9x^2 \cos x + \\ + x^3 \sin x.$$

Зауваження 6.2. Формули, що застосовані при розв’язанні приклада 6.3, є частинним випадком формули Лейбниця:

$\left(uv\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$, де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n!$, $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

6.2. Похідні вищих порядків неявно заданої функції

Нехай функція $y = f\left(x\right)$ задана неявно рівністю $F\left(x, y\right) = 0$. Диференціюючи цю рівність по x і розв’язуючи одержане рівняння відносно y', знайдемо першу похідну.

Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати по x першу похідну і в одержане співвідношення підставити її значення.

Приклад 6.4. Знайти y'', якщо $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Розв’язання. Продиференціюємо задану рівність по x і знайдемо y':

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3y - 3xy' = 0,$$

$$y'\left(3y^2 - 3x\right) = 3y - 3x^2,$$

$$y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Далі маємо $y'' = \dfrac{(y' - 2x)(y^2 - x) - (2yy' - 1)(y - x^2)}{(y^2 - x)^2} =$

$$= \frac{y'(-y^2 - x + 2yx^2) + x^2 + y - 2xy^2}{(y^2 - x)^2} = \frac{\dfrac{y - x^2}{y^2 - x} \cdot (-y^2 - x + 2yx^2) + x^2 + y - 2xy^2}{(y^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{2xy(3xy - 1 - x^3 - y^3)}{(y^2 - x)^2}.$$

6.3. Похідні вищих порядків параметрично заданої функції

Похідна другого порядку функції, що задана параметрично, знаходиться за формулою:

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}. \tag{6.1}$$

Дійсно, користуючись правилами диференціювання складної та оберненої функцій, дістаємо:

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \cdot t'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{x'_t \cdot y''_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}, \quad \text{або}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Приклад 6.5. Знайти похідну другого порядку, якщо $x = ln\,t$, $y = t^3$.

Розв'язання. $y'_x = \dfrac{(t^3)'_t}{(ln\,t)'_t} = \dfrac{3t^2}{1/t} = 3t^3$;

$$y''_{xx} = \frac{(3t^3)'_t}{(ln\,t)'_t} = \frac{9t^2}{1/t} = 9t^3.$$

6.4. Диференціали вищих порядків

Диференціал від диференціала функції називається ***другим диференціалом*** або ***диференціалом другого порядку*** та позначається $d^2y = d(dy)$.

При обчисленні другого диференціала врахуємо, що dx не залежить від x та при диференціюванні виноситься за знак похідної як сталий множник. Отже, $d^2y = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'\,dx = f''(x)dx^2$.

Аналогічно можна знайти третій диференціал: $d^3y = d(d^2y) = f'''(x)dx^3$, а також диференціали більш високих порядків.

Диференціалом n-го порядку називається перший диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right) = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (6.2)$$

Зауваження 6.3. Якщо x – незалежна змінна, то похідну будь-якого порядку можна подати як відношення диференціалів відповідного порядку:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},\ f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Зауваження 6.4. Диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності. Покажемо це на прикладі другого диференціала. Якщо $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, то $d^2y = d(f'(u)du) = d(f'(u))du + f'(u)d(du) = f''_{uu}(u)du^2 + f'_u(u)d^2u = f''_{uu}(u)du^2 + f'_u(u)\cdot u''_{xx}(x)dx^2$. Отже, форма другого диференціала змінилась при переході до аргументу u.

Приклада 6.6. Знайти d^2y для функції $y = sin^2 x$.

Розв'язання. Маємо $dy = \left(sin^2 x\right)' dx = 2\,sin\,x\,cos\,x\,dx = sin\,2x\,dx$;

$d^2y = \left(sin^2 x\right)'' dx^2 = 2\,cos\,2x\,dx^2$.

6.5. Застосування диференціального числення до обчислення границь функцій. Правило Лопіталя

Розглянемо правило, що дозволяє знаходити границі функцій з використанням диференціювання.

6.5.1. Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ та $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

Теорема Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, і в указаному околі $\varphi'(x)\neq 0$. Тоді якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=k$, то існує також границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, і має місце рівність $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=k$.

Коротко це правило можна сформулювати так: для невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ границя відношення двох функцій дорівнює границі відношення їх похідних.

Теорема справедлива і в тому випадку, коли $x\to\infty$.

Зауваження 6.5. Правило Лопіталя можна застосувати і до функцій $f'(x)$, $\varphi'(x)$, якщо вони задовольняють умовам теореми Лопіталя, тобто повторювати дії знову, якщо це потрібно для одержання результату:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=\ldots\,.$$

Приклад 6.7. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^4-16\right)'}{\left(x^3+5x^2-6x-16\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3}{3x^2+10x-6}=\dfrac{32}{26}=\dfrac{16}{13}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}}{x^2}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(e^{3x}\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3e^{3x}}{2x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(e^{3x}\right)'}{(x)'}=$

$=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3e^{3x}}{1}=\infty$.

Зауваження 6.6. Правило Лопіталя застосовується лише для розкриття невизначеностей виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, які називають ***основними***. Відомі ще й такі невизначеності, як $\{0\cdot\infty\}$, $\{\infty-\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$, які зводяться до основних за допомогою алгебраїчних перетворень.

6.5.2. Розкриття невизначеностей типу $\{0\cdot\infty\}$ та $\{\infty-\infty\}$

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то невизначеність виду $\{0\cdot\infty\}$ можна звести до основних наступним чином:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left\{\frac{0}{0}\right\},\text{ або}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}.$$

Приклад 6.8. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg 2x$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg2x = \{0\cdot\infty\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tg2x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x)'}{(tg2x)'} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{cos^2 2x}\cdot 2} = \lim_{x\to 0}\frac{cos^2 2x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$, то невизначеність $\{\infty-\infty\}$ зводиться до невизначеності $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$: $f(x)-\varphi(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{1/f(x)\cdot 1/\varphi(x)}$.

Приклад 6.9. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{sin\,x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{sin\,x}-\dfrac{1}{x}\right) = \{\infty-\infty\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-sin\,x}{sin\,x\cdot x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x-sin\,x)'}{(x\cdot sin\,x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{1\cdot sin\,x + x\cdot cos\,x} = 0.$$

6.5.3. Розкриття невизначеностей типу $\{0^0\}$, $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$

Якщо, наприклад, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \{0^0\} =$ $= e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot ln(f(x))}$, і невизначеність виду $\{0^0\}$ зводиться до невизначеності $\{0\cdot\infty\}$, що розглянута вище.

Приклад 6.10. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx} = \{\infty^0\} = e^{ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} ln\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} tgx \cdot ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-\lim\limits_{x\to 0} tgx \cdot ln\, x} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\, x}{ctgx}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}} =$$

$$= \left\{\frac{0}{0}\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{1}} = e^0 = 1.$$

Приклад 6.11. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\{1^\infty\}$. Розглянемо дещо інший спосіб розв'язання цього типу невизначеностей. Позначимо $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = k$ і прологарифмуємо цю рівність:

$$ln\, k = \lim_{x\to 0} ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot ln\cos 2x = \{\infty\cdot 0\} = \lim_{x\to 0}\frac{ln\cos 2x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{tg 2x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = -\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}}{1} = -2 .$$

Отже, $ln\, k = -2$, звідки $k = e^{-2}$.

Остаточно маємо $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6
ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ДИФЕРЕНЦІАЛИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Приклад 1. Знайти похідні другого порядку:

а) $y = x^2\, ln\, x + \arcsin\frac{2}{5}$; б) $y = \frac{3x}{3x+5}$;

в) $y = (3x+5)\cdot e^{2x}$; г) $y = arctg\, x^2$;

д) $y = e^{tg 7x}$; є) $y = 5\cos\frac{x^3}{2}$.

Розв'язання. Знаходимо послідовно першу, потім другу похідні. Маємо:

а) $y' = \left(x^2 \cdot ln\,x\right)' + \left(arcsin\frac{2}{5}\right)' = \left(x^2\right)' \cdot ln\,x + x^2 \cdot \left(ln\,x\right)' + 0 = 2x\,ln\,x +$

$+ x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\,ln\,x + x$;

$y'' = \left(2x\,ln\,x + x\right)' = \left(2x\right)' \cdot ln\,x + 2x \cdot \left(ln\,x\right)' + 1 = 2\,ln\,x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 =$

$= 2\,ln\,x + 3$.

б) $y' = \frac{\left(3x\right)' \cdot \left(3x+5\right) - 3x \cdot \left(3x+5\right)'}{\left(3x+5\right)^2} = \frac{3\left(3x+5\right) - 3x \cdot 3}{\left(3x+5\right)^2} = \frac{9x + 15 - 9x}{\left(3x+5\right)^2} =$

$= \frac{15}{\left(3x+5\right)^2}$;

$y'' = \left(\frac{15}{\left(3x+5\right)^2}\right)' = \left(15 \cdot \left(3x+5\right)^{-2}\right)' = -30\left(3x+5\right)^{-3} \cdot \left(3x+5\right)' =$

$= -\frac{90}{\left(3x+5\right)^3}$.

в) $y' = \left(3x+5\right)' \cdot e^{2x} + \left(3x+5\right) \cdot \left(e^{2x}\right)' = 3e^{2x} + \left(3x+5\right) \cdot 2e^{2x} =$

$= e^{2x}\left(3 + 6x + 10\right) = \left(6x+13\right) \cdot e^{2x}$;

$y'' = \left(6x+13\right)' \cdot e^{2x} + \left(6x+13\right) \cdot \left(e^{2x}\right)' = 6e^{2x} + \left(6x+13\right) \cdot 2e^{2x} =$

$= e^{2x}\left(6 + 12x + 26\right) = \left(12x+32\right) \cdot e^{2x}$.

г) $y' = \frac{1}{1 + \left(x^2\right)^2} \cdot \left(x^2\right)' = \frac{2x}{1 + x^4}$;

$$y'' = \frac{(2x)' \cdot (1+x^4) - 2x \cdot (1+x^4)'}{(1+x^4)^2} = \frac{2(1+x^4) - 2x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{2+2x^4-8x^4}{(1+x^4)^2} =$$

$$= \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2};$$

д) $y' = e^{tg 7x} \cdot \frac{7}{cos^2 7x} = \frac{7e^{tg 7x}}{cos^2 7x}$;

$$y'' = \frac{7e^{tg7x} \cdot \frac{7}{cos^2 7x} \cdot cos^2 7x - 7e^{tg7x} \cdot 2cos 7x(-sin 7x) \cdot 7}{cos^4 7x} =$$

$$= \frac{49e^{tg7x} + 49e^{tg7x} \cdot sin 14x}{cos^4 7x} = \frac{49e^{tg7x}(1+sin 14x)}{cos^4 7x};$$

є) $y' = -5 sin \frac{x^3}{2} \cdot \frac{3}{2} x^2 = -\frac{15}{2} x^2 \cdot sin \frac{x^3}{2}$;

$$y'' = -\frac{15}{2} \cdot 2x \cdot sin \frac{x^3}{2} - \frac{15}{2} x^2 \cdot cos \frac{x^3}{2} \cdot \frac{3x^2}{2} = -15x\, sin \frac{x^3}{2} - \frac{45}{4} x^4 \cdot cos \frac{x^3}{2}.$$

Приклад 2. Знайти прискорення рухомої точки у момент часу $t = 2c$, якщо відомий закон руху точки $s(t) = 2t^3 - t + 3$ (s вимірюється у метрах).

Розв'язання. Знайдемо швидкість $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 1$.

Прискорення $a(t) = v'(t) = 12t$. $a(2) = 24\ (м / c^2)$.

Відповідь: $23(м / c^2)$.

Приклад 3. Знайти похідні третього порядку:

а) $y = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 4$; б) $y = sin^2 \frac{x}{6}$.

Розв'язання. а) Знаходимо послідовно y', y'' та y''':

$y = 10x^4 - 12x^3 + 21x^2$;

$y'' = 40x^3 - 36x^2 + 42x$;

$y''' = 120x^2 - 72x + 42$.

б) $y' = 2\sin\frac{x}{6}\cdot\left(\sin\frac{x}{6}\right)' = 2\sin\frac{x}{6}\cdot\cos\frac{x}{6}\cdot\left(\frac{x}{6}\right)' = \frac{1}{6}\sin\frac{x}{3}$;

$$y'' = \frac{1}{6}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{18}\cos\frac{x}{3};$$

$$y''' = \frac{1}{18}\cdot\left(-\sin\frac{x}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}\right)' = -\frac{1}{54}\sin\frac{x}{3}.$$

Приклад 4. Знайти другу похідну від функції заданої параметрично:

а) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \ln t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Розв'язання. а) Застосовуючи формулу $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ знайдемо y'_x:

$$y'_t = \frac{1}{t}, \qquad x'_t = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \qquad y'_x = \frac{1/t}{1/2\sqrt{t}} = \frac{2\sqrt{t}}{t} = \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Другу похідну знайдемо за формулою $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

$$y''_x = \frac{\left(2/\sqrt{t}\right)'_t}{1/2\sqrt{t}} = \frac{\left(2t^{-\frac{1}{2}}\right)'_t}{1/2\sqrt{t}} = \frac{-2\cdot\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{3}{2}}}{1/2\sqrt{t}} = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{t^3}} = -\frac{2}{t}.$$

б) $y'_t = a\sin t, \quad x'_t = a(1 - \cos t)$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = ctg\frac{t}{2};$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(ctg\frac{t}{2}\right)'}{a(1-\cos t)} = \frac{-\frac{1}{\sin^2 t/2}\cdot\frac{1}{2}}{2a\sin^2 t/2} = -\frac{1}{4a\sin^4 t/2}.$$

Приклад 5. Знайти d^2y від заданих функцій:

а) $y = 3x^7 - \frac{2}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[3]{7} - 3\sqrt{x^2} + \frac{1}{x^2}$; б) $y = \sqrt{3 + x^2}$.

Розв'язання. а) $y = 3x^7 - \frac{2}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^2} = 3x^7 - 2x^{-\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{7} -$

$- 3x^{\frac{2}{3}} + x^{-2}$.

Знаходимо послідовно першу, потім другу похідні:

$$y' = 21x^6 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{1}{4}-1} + 0 - 3 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - 2x^{-3} = 21x^6 + \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{4}} -$$

$$- 2x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-3};$$

$$y'' = 21 \cdot 6x^5 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot x^{-\frac{5}{4}-1} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} + 6x^{-4} = 126x^5 - \frac{5}{8}x^{-\frac{9}{4}} +$$

$$+ \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 6x^{-4} = 126x^5 - \frac{5}{8\sqrt[4]{x^9}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{6}{x^4}.$$

За формулою (6.2) маємо: $d^2y = \left(126x^5 - \frac{5}{8\sqrt[4]{x^9}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{6}{x^4}\right)dx^2$.

б) $y' = \frac{1}{2\sqrt{3 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{3 + x^2}}$;

$$y'' = \frac{x'\sqrt{3 + x^2} - x\left(\sqrt{3 + x^2}\right)'}{\left(\sqrt{3 + x^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3 + x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{3 + x^2}}}{3 + x^2} = \frac{3 + x^2 - x^2}{\left(3 + x^2\right)\sqrt{3 + x^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{\left(3 + x^2\right)^3}};$$

$$d^2y = y''dx^2 = \frac{3dx^2}{\sqrt{\left(3 + x^2\right)^3}}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідні другого порядку:

а) $y = \dfrac{x^3}{1-x}$; в) $y = ln\left(5x^3 - 1\right)$;

б) $y = x \cdot cos\, 2x + ln\, 3$; г) $y = e^{2\, sin\, x}$.

2. Знайти похідну третього порядку $y = 7x^4 - 3x^2 + \dfrac{x^6}{2} - 5$.

3. Знайти другу похідну від функції, заданої параметрично:

а) $\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 4t + t^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = arctg\, t, \\ y = ln\left(1 + t^2\right). \end{cases}$

4. Знайти $d^2 y$ від заданих функцій:

а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2}{x^5} + \dfrac{4}{\sqrt[7]{5}} - x^3 + \sqrt[5]{x^8}$; б) $y = 5^{cos\, 3x}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7.
ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

7.1. Застосування правила Лопіталя для розкриття основних невизначеностей

Знаходження границь, які вимагають розкриття невизначеностей типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, значно спрощується за допомогою правила Лопіталя. Нагадаємо, що із існування границі відношення похідних випливає існування границі відношення функцій (лекція 6, п. 6.5):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$ і в околі точки x_0 $\varphi'(x) \neq 0$.

Аналогічне правило має місце і для односторонніх границь, а також коли $x \to \infty$.

Правило Лопіталя можна застосовувати декілька разів.

Приклад 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{e^{3x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^3-7x^2+11x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin x^2}$.

Розв'язання. Спочатку встановлюємо, що частка даних функцій має невизначеність $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ в граничній точці та функції диференційовані в околі цієї точки. Після цього застосовуємо правило Лопіталя.

а) Оскільки $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-1\right)=0$ і $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$, виконується перша умова теореми Лопіталя (п. 6.5.1). Друга умова теж виконується, оскільки $\left(x^3-1\right)'=3x^2$ і $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$.

Знайдемо $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{1/x}=\lim\limits_{x\to 1}3x^3=3$.

Отже, маємо $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^3-1\right)'}{\left(\ln x\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{1/x}=3$.

В наступних розв'язках при обчисленні границь за допомогою правила Лопіталя будемо записувати лише необхідні перетворення, а умови перевіряти в процесі обчислень.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{e^{3x}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\ln x\right)'}{\left(e^{3x}\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{3e^{3x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{3xe^{3x}}=0$.

в) При розв'язанні цього прикладу правило Лопіталя потрібно застосовувати 2 рази:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-7x^2+11x-5}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-2x^2+x\right)'}{\left(x^3-7x^2+11x-5\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{3x^2-14x+11}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(3x^2-4x+1\right)'}{\left(3x^2-14x+11\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x-4}{6x-14}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}.$$

г) Для розкриття цієї невизначеності за правилом Лопіталя застосуємо ще теорему про заміну однієї нескінченно малої функції іншою, еквівалентною їй функцією [5].

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{matrix}x\to 0\Rightarrow\\ \sin x^2\sim x^2\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=$$

$$=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\arcsin 2x-2\arcsin x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to 1}\underbrace{\sqrt{1-4x^2}}_{\to 1}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}\right)'}{\left(x^2\right)'}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}}{2x}=$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x^2}-4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{3}\cdot(-3)=1.$$

7.2. Застосування правила Лопіталя для розкриття невизначеностей типу $\{0\cdot\infty\}$, $\{\infty-\infty\}$

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то невизначеність $\{0\cdot\infty\}$ можна звести до основних так:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$$ або так

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}.$$

Приклад 2. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to+0} x^5 \ln x$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)ctg2x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\,arctg\,x}-\frac{1}{x^2}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\,tg\,x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - x^2\right)$.

Розв'язання. а) Маємо невизначеність виду $\{0\cdot\infty\}$. Запишемо приклад так:

$$\lim_{x\to+0} x^5 \ln x = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^5}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^5}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-5x^{-6}} =$$

$$= -\frac{1}{5}\lim_{x\to+0}\frac{x^6}{x} = -\frac{1}{5}\lim_{x\to+0} x^5 = 0.$$

б) Маємо невизначеність виду $\{0\cdot\infty\}$. Зведемо її до невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ і застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)ctg2x = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{tg2x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}{(tg2x)'} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x = \frac{1}{2}.$$

в) У даному прикладі невизначеність виду $\{\infty-\infty\}$. Приведемо функцію, границю якої знаходимо, до спільного знаменника, одержимо невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ і застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\,arctg\,x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-arctg\,x}{x^2 arctg\,x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-arctg\,x)'}{(x^2 arctg\,x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{2x\cdot arctg\,x+\frac{x^2}{1+x^2}}==\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2-1)(1+x^2)}{(1+x^2)(2(1+x^2)arctgx+x)\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(2(1+x^2)\frac{arctg\,x}{x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x^2)\frac{arctg\,x}{x}+1}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}2(1+x^2)\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,x}{x}+1}=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}.$$

г) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\,tg\,x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-x}{x^2 tg\,x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(tg\,x-x)'}{(x^2 tg\,x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2\,x}-1}{2x\,tg\,x+x^2\cdot\frac{1}{cos^2\,x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2\,x}{\left(2x\cdot\frac{sin\,x}{cos\,x}+x^2\cdot\frac{1}{cos^2\,x}\right)\cdot cos^2\,x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2\,x}{2x\cdot sin\,x\cdot cos\,x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2\,x}{x^2\left(\frac{2\,sin\,x\,cos\,x}{x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sin^2\,x}{x^2}}{2\cdot\frac{sin\,x}{x}\cdot cos\,x+1}=$$

$$=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - x^2\right) = \{\infty - \infty\} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1 - \frac{x^2}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$, то маємо $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = 1$. Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1 - \frac{x^2}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} = +\infty$.

7.3. Застосування правила Лопіталя для розкриття невизначеностей типу $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$, $\{1^\infty\}$

Розглянемо степенево-показникову функцію $[f(x)]^{\varphi(x)}$. Якщо, наприклад, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\varphi(x)} = \{0^0\} =$
$= e^{\ln \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\varphi(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\ln[f(x)]^{\varphi(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)\cdot\ln f(x))} = \{0\cdot\infty\}$.

Аналогічно розкриваються невизначеності $\{1^\infty\}$ і $\{\infty^0\}$. Зауважимо, що вирази $(\infty^\infty)\to\infty$ та $(0^\infty)\to 0$ не є невизначеностями.

Приклад 3. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to+0} x^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(ctg\, x)^{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 2\sin x)^{\frac{1}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \{0^0\} = e^{\lim\limits_{x\to+0} \ln x^x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln x} = \{0\cdot\infty\} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}}$

$= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{-\lim\limits_{x\to+0} x} = e^0 = 1.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(ctg\, x)^{\sin x} = \{\infty^0\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(ctgx)^{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln ctgx} = \{0\cdot\infty\} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln ctg\, x}{\sin^{-1} x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{ctg\, x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{(-1)\cdot\sin^{-2} x\cdot\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{ctg\, x\cdot\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = e^0 = 1.$

в) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = \{\infty^0\} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} =$

$= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left|\begin{array}{l}\frac{1}{x} = t\\ t\to+\infty \text{ при } x\to+0\end{array}\right| = e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(\ln t)}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln t}\cdot\frac{1}{t}}{1}} = e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\ln t\cdot t}} = e^0 = 1.$

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = \{1^\infty\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\sin 2x)} = \{\infty\cdot 0\} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{x}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\sin 2x}\cdot 2\cos 2x}{1}} = e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}} = e^2.$

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x} = \{1^\infty\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)^{ctg^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} ctg^2 x\cdot\ln\cos x} = \{\infty\cdot 0\} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{tg^2 x}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2tgx\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx\cdot\cos^2 x}{2tgx}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

Зауваження. Умова про існування границі похідних є суттєвою. Наприклад, дослідимо можливість застосування правила Лопіталя для границі $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Маємо, $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sin x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$. Проте $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}tg^2\dfrac{x}{2}$ – не існує, тому застосовувати правило Лопіталя неможливо. Однак ця границя існує, оскільки

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\sin x}=\left|\begin{array}{l}x\to\infty\Rightarrow\\ \frac{1}{x}\cdot\sin x\to 0\end{array}\right|=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 2\pi x}{\sin 4\pi x}$, відповідь $-\dfrac{1}{2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3}$, відповідь $\dfrac{3}{4}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x-3}{5x^2+2x+7}$, відповідь $\dfrac{1}{5}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$, відповідь 0;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2x\,tg\,x}\right)$, відповідь $\dfrac{1}{6}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{e^{x-1}-1}$, відповідь -1;

7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$, відповідь 1;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, відповідь $\dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

ЛЕКЦІЯ 7. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ. ЧАСТИНА 1

7.1. Зростання і спадання функції. Екстремуми функції

7.1.1. Ознаки монотонності функції

Теорема 7.1. Для того, щоб функція, неперервна на проміжку (a,b) і диференційована в інтервалі (a,b), була неспадною (або не зростаючою в (a,b), необхідно і достатньо, щоб на (a,b) $f'(x)\geq 0$ (або $f'(x)\leq 0$).

Доведення. Необхідність. Нехай $y=f(x)$ є неспадною в проміжку (a,b) функція. Довести, що $f'(x)\geq 0$. Згідно з означенням неспадної функції $\Delta y\geq 0$ при $\Delta x>0$ і $\Delta y<0$ при $\Delta x<0$, тобто $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$. За теоремою про перехід до границі в нерівностях дістанемо: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$, тобто $f'(x)\geq 0$.

Достатність. Нехай в (a,b) виконується умова $f'(x)\geq 0$.

$f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ і $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$, де $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$.

Нехай $f'(x_0)\geq 0$, тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$ при достатньо малих Δx. Отже, якщо $\Delta x>0$ то і $\Delta y\geq 0$, якщо $\Delta x<0$ то і $\Delta y\leq 0$, тоді за означенням, функція $f(x)$ є неспадною.

Теорема 7.2. (Ознака строгої монотонності). Для того, щоб функція, неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в інтервалі $(a;b)$, була на $[a;b]$ зростаючою (спадною), необхідно і достатньо, щоб:

1) $f'(x)\geq 0 \quad (f'(x)\leq 0) \qquad x\in(a;b)$;

2) не існувало на відрізку $[a;b]$ проміжку, в якому $f'(x)\equiv 0$.

Цю теорему можна для практичних задач переформулювати таким чином: якщо $f'(x)>0$, або $f'(x)<0$ всюди, крім, можливо у скінченному числі точок, в яких вона перетворюється на нуль, то в $(a;b)$ вона зростає, або спадає.

Ці теореми дозволяють дуже просто дослідити функцію на монотонність, тобто, знайти інтервали, в яких функція спадає або зростає.

Для більшості елементарних функцій область існування функції можна розбити на інтервали, у яких функція буде монотонно зростаючою або спадною. Кожен такий інтервал обмежений точками, у яких похідна функції або дорівнює нулю або не існує. Такі точки називаються ***критичними***.

7.2. Екстремуми функції

Означення. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$. Точка x_0 називається ***точкою максимуму функції*** $y=f(x)$, якщо існує такий δ-окіл точки x_0, що для всіх точок $x \neq x_0$, які належать цьому околу, виконується нерівність: $f(x)<f(x_0)$.

Аналогічно наводиться означення мінімуму функції $y=f(x)$: x_1 – називається ***точкою мінімуму функції***, якщо $\exists \delta > 0$: $\forall x$: $0<|x-x_1|<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $f(x)>f(x_1)$.

Максимум і мінімум функції називається ***екстремумами функції***.

Оскільки поняття екстремуму функції пов'язані з певним околом, то зрозуміло, що функція може мати екстремум тільки у внутрішніх точках області визначення.

7.2.1. Ознаки екстремуму функції

Теорема 7.3. (Необхідна умова екстремуму функції). Якщо диферен - ційована функція $y=f(x)$ має екстремум в точці x_0, то її похідна в цій точці дорівнює нулю: $f'(x_0)=0$.

Доведення. Нехай для визначеності x_0 – точка максимуму. Тоді в околі цієї точки виконується нерівність $f(x_0) > f(x)$. Звідси маємо:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \text{, якщо } \Delta x > 0 \text{ та } \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \text{, якщо } \Delta x < 0.$$

Похідна $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ існує. Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо $f'(x_0) \geq 0$, якщо $x < 0$ та $f'(x_0) \leq 0$, якщо $\Delta > 0$. Це можливо тільки у випадку, якщо $f'(x_0) = 0$. Аналогічно доводиться ця теорема, якщо x_0 – точка мінімуму.

Геометрично рівність $f'(x_0) = 0$ означає, що в точці екстремуму диференційованої функції, дотична до її графіка паралельна осі $0x$.

Теорема 7.3 ілюструє тільки необхідну умову екстремуму функції. Обернена теорема є невірною, тобто, якщо $f'(x_0) = 0$, то в точці x_0 екстремум може бути, а може і не бути. Наприклад, для функції $y = x^3$ маємо $y' = 3x^2$. Тоді $y'(0) = 0$, але у точці $x = 0$ функція не має екстремуму (рис.7.1).

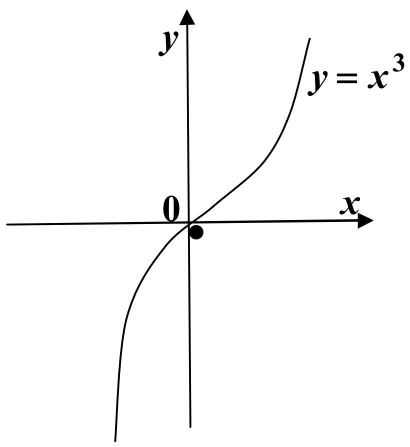


Рис. 7.1

Зауваження. Бувають функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, тобто $y'(0)$ не існує, але в точці $x = 0$ функція $y = \sqrt[3]{x^2}$ має мінімум (рис.7.2).

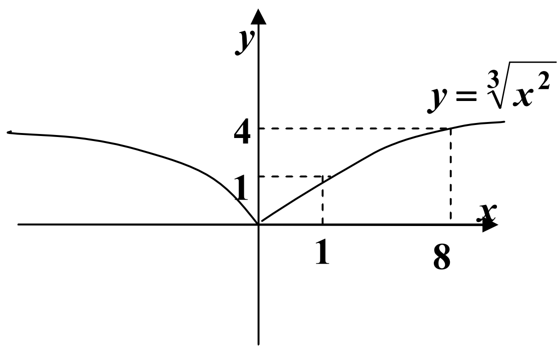


Рис. 7.2

Отже, неперервна функція може мати екстремум у точках, де її похідна або дорівнює нулю, або не існує. Як зазначено вище, такі точки називають ***критичними***.

<u>Теорема 7.4. (Додатня умова екстремума).</u> Якщо неперервна функція $y=f(x)$ диференційована у деякому δ-околі критичної точки x_0, мабуть за винятком самої точки x_0, і при переході зліва-направо через цю точку, похідна $f'(x)$ змінює знак " + " на знак " – ", то x_0 є точкою максимуму, а якщо знак " – ", на знак " + ", то x_0 – точка мінімуму.

Доведення. Розглянемо δ-окіл точки x_0. Нехай виконуються умови: $f'(x)>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta; x_0)$; $f'(x)<0 \; \forall x\in(x_0; x_0+\delta)$, тобто $f'(x)$ змінює знак " + " на знак " – " при переході через точку x_0. Тоді маємо, що функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(x_0-\delta, x)$ і спадає на інтервалі $(x_0, x_0+\delta)$.

Звідси випливає, що значення функції $f(x)$ у точці x_0 є найбільшим на інтервалі $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, тобто $f(x)<f(x_0)$ для всіх точок $x\in(x_0-\delta; x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$. Це означає, що x_0 – точка максимуму функції.

Аналогічно теорема доводиться для випадку мінімуму функції.

7.2.2. План дослідження функції на екстремум

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти похідну функції.
3. Знайти критичні точки, тобто точки, в яких $y'=0$, або y' не існує.

4. Дослідити знак похідної зліва і справа від критичних точок, які є внутрішніми точками області визначення.

5. Користуючись теоремою 7.4, записати точки екстремуму і обчислити значення функції в кожній з отриманих точок.

Приклад 7.1. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції, якщо вони є: $y = x^4 e^{-2x}$.

Розв'язання. 1. Область визначення функції $x \in (-\infty;+\infty)$.

2. $y' = \left(x^4 e^{-2x}\right)' = \left(x^4\right)' \cdot e^{-2x} + x^4\left(e^{-2x}\right)' = 4x^3 \cdot e^{-2x} + x^4 e^{-2x}(-2) =$
$= 2x^3 e^{-2x}(2 - x)$.

3. Знайдемо критичні точки. Для цього прирівняємо похідну функції до нуля:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3(2 - x)e^{-2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

4.

x	$-\infty;0$	0	$0;2$	2	$2;+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Отже, $y_{min} = y(0) = 0^4 \cdot e^{-0} = 0$, $y_{max} = y(2) = 2^4 e^{-4} = \dfrac{16}{e^4}$.

7.2.3. Інші способи знаходження екстремуму функції

Екстремуми функції можна також визначити за допомогою другої похідної функції.

<u>Теорема 7.5.</u> Якщо у точці x_0 перша похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю ($f'(x_0) = 0$), а друга похідна функції існує та відмінна від нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то якщо $f''(x_0) < 0$, то у точці x_0 функція $f(x)$ має максимум, а якщо $f''(x_0) > 0$ – то мінімум.

Доведення. Доведення проводиться для випадку $f''(x) > 0$. За означенням похідної функції другого порядку

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0.$$

Маємо $\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ в околі точці x_0. Звідки, якщо $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, якщо $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$. Таким чином, при переході через точку x_0 перша похідна змінює знак з " – " на " + " , отже x_0 – точка мінімуму за теоремою 7.4.

Аналогічно доводиться теорема для випадку $f''(x) < 0$.

Приклад 7.2. Дослідити функцію $y = x^2 - 10 \ln x$ за допомогою другої похідної функції.

Розв'язання. 1. ОДЗ: $x \in (0; +\infty)$.

2. $y' = 2x - \frac{10}{x} = \frac{2x^2 - 10}{x} = 2\frac{x^2 - 5}{x}$.

3. $y' = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 5}{x} = 0, \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5},\ x = -\sqrt{5} \notin ОДЗ$. y' не існує, якщо $x = 0$, але $x = 0 \notin ОДЗ$.

4. $y'' = 2 + \frac{10}{x^2} = \frac{2x^2 + 10}{x^2}$; $y''(\sqrt{5}) > 0$, тобто, $x = \sqrt{5}$ – точка мінімуму.

5. $y_{min} = y(\sqrt{5}) = 5 - 10 \ln \sqrt{5} = 5 - 5 \ln 5 = 5(1 - \ln 5)$.

7.3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$. Тоді ця функція досягає свого найбільшого і найменшого значень на ньому. Ці означення можуть бути або у внутрішніх точках $[a; b]$, або на кінцях відрізку. Якщо найбільше чи найменше значення функція досягає в деякій внутрішній точці x_0, то ця точка належить до критичних точок функції.

7.3.1. План знаходження найбільшого та найменшого значень функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$

1. Знайти похідну функції $f(x)$.

2. Знайти критичні точки функції, тобто, розв'язати рівняння $y' = 0$ та крім того знайти точки в яких y' не існує.

3. З отриманих точок виключити ті, що не належать відрізку $[a;b]$.

4. Обчислити значення функції у всіх залишившихся критичних точках та на кінцях відрізку.

5. Серед всіх отриманих значень функції обрати найменше і найбільше.

Приклад 7.3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ на відрізку $[-3;2]$.

Розв'язання. 1. $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

2. $y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 12x - 9 = 0, \qquad x^2 - 4x + 3 = 0$.

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$.

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2}; \quad x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3; \quad x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$.

3. Ми отримали дві критичні точки $x_1 = 3$ та $x_2 = 1$. Точка $x = 3 \notin [-3;2]$, тому виключимо її з розглядання.

4. Обчислимо значення функції в критичній точці $x = 1$ та на кінцях відрізку: $y(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 2 = 6$,

$$y(-3) = (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + 2 = -106,$$

$$y(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 2 = 4.$$

5. Отже, видно, що найбільшого свого значення дана функція досягає у точці $x = 1$ і воно дорівнює 4, а найменше значення функції – $y = -106$ у точці $x = -3$.

Знаходження найбільшого та найменшого значень функції має застосування при розв'язанні широкого кола практичних задач математики, фізики, хімії, економіки. Декілька таких задач будуть розглянуті на відповідному практичному занятті.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ: НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Алгебраїчні рівняння першого та другого степенів (або лінійні та квадратні рівняння) розв'язуються за певними формулами, що відомі з шкільного курсу математики. Є формули і для розв'язання рівнянь третього степеня (так звані формули Кардано), є метод Феррарі для розв'язування рівнянь четвертого степеня. Кажуть, що рівняння ***розв'язуються в радикалах***, якщо існують такі формули, що дають змогу виразити його корені через його коефіцієнти за допомогою скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і добування кореня.

Для рівнянь вище четвертого степеня у загальному випадку доведено теорему про те, що не існує формул для визначення коренів рівняння. Для розв'язування таких рівнянь застосовують наближені методи [1], [3], [6].

Отже, нехай треба розв'язати рівняння $f(x)=0$. Для визначення одного якогось дійсного кореня цього рівняння треба знайти ті відрізки, які містять тільки один його корінь. Способи відшукання таких відрізків називають ***способами відокремлювання коренів***, а самі проміжки називають ***проміжками ізоляції***.

Найпростішим методом ізоляції коренів є графічний. Точки перетину графіка функції $y=f(x)$ з віссю $0x$ будуть коренями рівняння.

У багатьох випадках функцію $y=f(x)$ зображують у вигляді різниці двох функцій: $f(x)=f_1(x)-f_2(x)=0$, $f_1(x)=f_2(x)$.Тоді за абсцисами точок перетину графіків функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ наближено оцінюють значення коренів і визначають їх.

Приклад 1. Відокремити корені рівняння $x^3-2x-5=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $x^3-5=2x$, побудуємо графіки функцій $y_1=x^3-5$ і $y_2=2x$ (рис. 8.1).

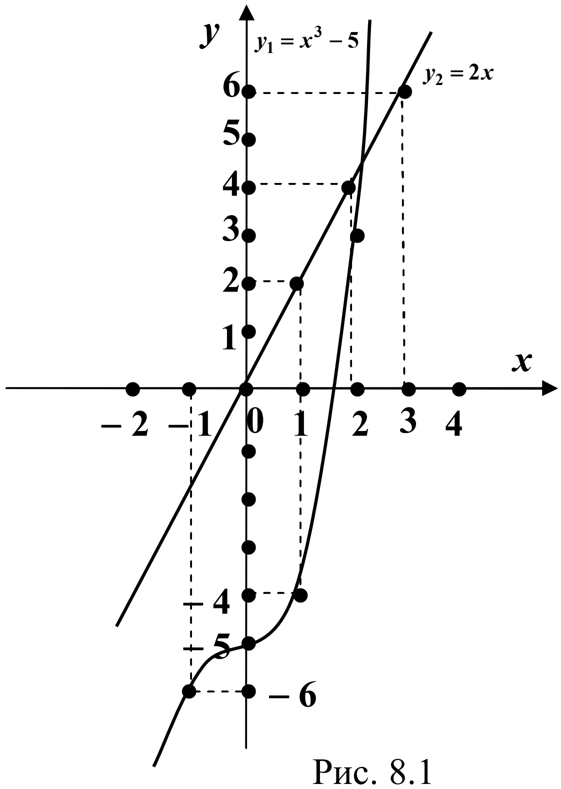


Рис. 8.1

$y_1 = x^3 - 5$

x	y_1
0	– 5
1	– 4
2	3
3	22

$y_2 = 2x$

x	y_2
0	0
1	2
2	4
3	6

Оскільки $y_1(2) < y_2(2)$, $y_1(3) > y_2(3)$, то $x \in (2;3)$. Отже, дане рівняння має єдиний корінь, який лежить на проміжку $(2;3)$.

Розглянутий спосіб відокремлення коренів не є єдиним.

Відомо [4], що коли функція $y = f(x)$ неперервна і монотонна на інтервалі $[a,b]$ і на кінцях інтервалу має різні знаки, то всередині інтервалу вона набуває значення 0 і притому лише один раз.

Отже, задача відокремлення коренів рівняння $f(x) = 0$ полягає в розбитті осі абсцис на інтервали, в яких функція $f(x)$ монотонна і набуває значень, що мають різні знаки.

Через те, що кожна монотонна і диференційовна на даному інтервалі функція має першу похідну знак якої не змінюється, можна сформулювати таке ***правило*** відокремлення коренів рівняння $f(x) = 0$:

1. Знайти першу похідну функції $y = f(x)$.

2. Розв’язати рівняння $f'(x) = 0$.

3. Розбити вісь абсцис на інтервали, в яких перша похідна зберігає знак (у цих інтервалах функція монотонна), а функція має різні знаки на кінцях інтервалу.

Приклад 2. Відокремити корені рівняння $x^3 - 9x + 3 = 0$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Знаходимо першу похідну: $f'(x) = 3x^2 - 9$.

Знайдемо стаціонарні точки: $3x^2 - 9 = 0$, $x^2 = 3$, $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$.

Розбиваємо вісь абсцис на інтервали $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$. У кожному із цих інтервалів функція $f(x) = x^3 - 9x + 3$ монотонна, і якщо на кінцях будь-якого з цих інтервалів функція $f(x)$ має різні знаки, то цей інтервал містить корінь рівняння $f(x) = 0$ і до того тільки один.

Можна довести, що при достатньо великих значеннях x знак многочлена збігається із знаком старшого члена. Отже, коли $x \to \pm\infty$, то знак $f(x) = x^3 - 9x + 3$ збігається із знаком x^3. Підставляючи у вираз $x^3 - 9x + 3$ значення $x = \pm\sqrt{3}$ та знаходячи границю цього виразу при $x \to \pm\infty$, дістаємо таблицю, що показує які знаки має функція $f(x)$ на кінцях інтервалів:

Таблиця 8.1

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	∞
$f(x)$	–	+	–	+

Отже, бачимо, що дана функція змінює знаки на трьох інтервалах, тобто корені рівняння $x^3 - 9x + 3$ містяться на інтервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$.

Ці інтервали можна зменшити. Оскільки $f(-4) < 0$ і $f(-3) > 0$, $f(0) > 0$ і $f(1) < 0$, $f(2) < 0$ і $f(3) > 0$, то інтервали $(-4; -3)$, $(0; 1)$ і $(2; 3)$ містять по одному кореню даного рівняння.

Існує ще один метод відокремлення коренів, що має назву ***метод перебору***. Спершу визначається відрізок найменшої довжини, який містить всі дійсні корені рівняння. Його довжина визначається за наступною властивістю алгебраїчного рівняння: найбільше за абсолютною величиною можливе значення кореня не перевищує величини $R = 1 + \frac{A}{|a_n|}$, де

$A = max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_{n-1}|\}$, $a_i(i = 0, ..., n)$ – коефіцієнти рівняння $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0$.

Метод перебору має ефективну реалізацію у середовищі електронних таблиць [3, 6].

Приклад 3. Методом перебору відокремити корені рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = -5 - 2x + 0 \cdot x^2 + x^3 = 0$.

Визначимо максимальний відрізок, на якому містяться корені рівняння. Оскільки $a_0 = -5$; $a_1 = -2$; $a_2 = 0$; $a_3 = 1$, маємо

$$A = max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|\} = max\{|-5|, |-2|, |0|\} = 5, \ R = 1 + \frac{A}{|a_3|} = 1 + \frac{5}{1} = 6.$$

Отже, корені рівняння належать сегменту $[-6;6]$.

Графік функції $f(x)$ можна побудувати за допомогою пакету $MathCad$: обчислюються значення функції $f(x)$ для значень $x \in [-R; R]$, які змінюються за обраним кроком h. В інтервалі, на кінцях якого функція змінює знак $(f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0)$, знаходиться корінь рівняння.

Графік функції $f(x) = -5 - 2x + x^3$ наведено на рис. 8.2.

Отже, шуканий корінь рівняння міститься на проміжку $x \in (2;3)$.

Подальше уточнення значення кореня можна виконати за допомогою функції $root(f(x), x)$ в пакеті $MathCad$, в алгоритмі якої реалізовано метод дотичних.

Для уточнення розміщення коренів у проміжках ізоляції використовуються різні наближені методи. Розглянемо застосування методу спроб (інші назви – метод «вилки» або метод половинного поділу), методу хорд та методу дотичних (метод Ньютона) для розв'язання рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$.

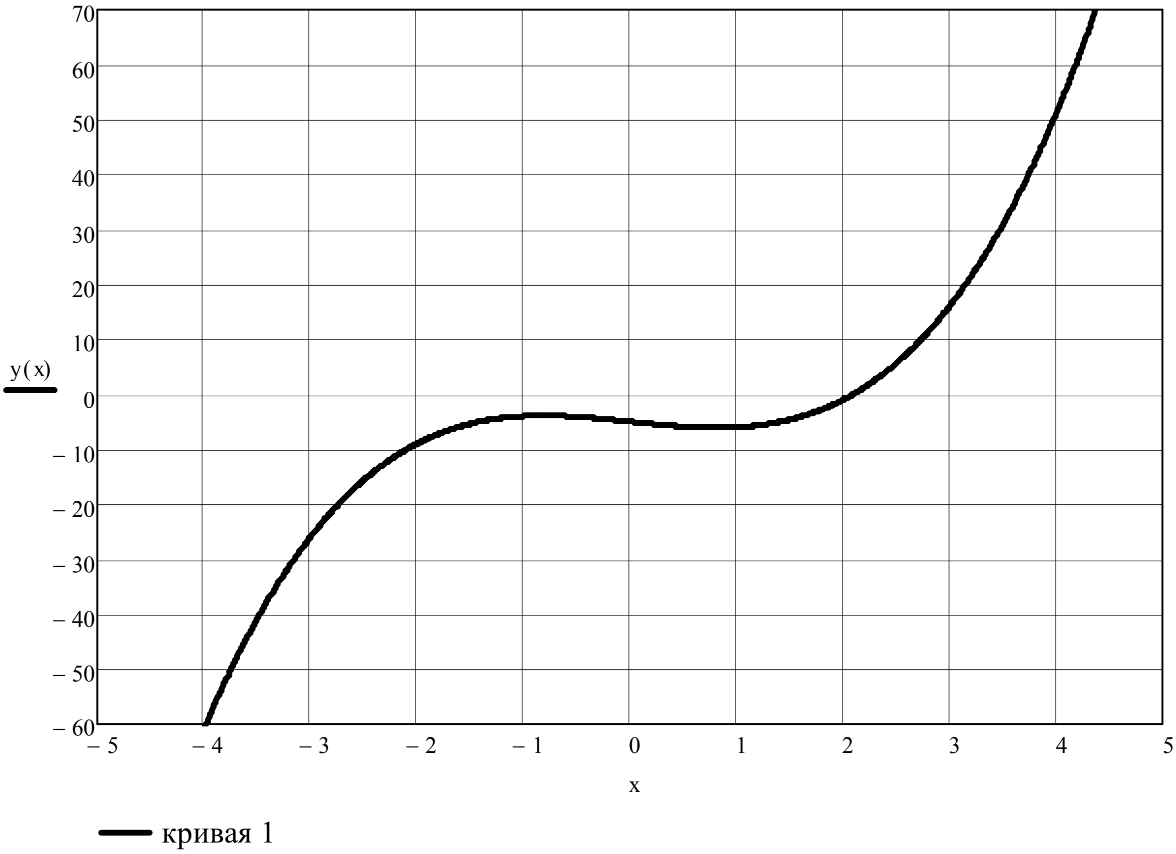


Рис. 8.2

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ методом спроб з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

Розв'язання. Інтервал ізоляції кореня рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ знайдено у прикладах 1 та 3, додатний дійсний корінь міститься у проміжку $(2;3)$.

Алгоритм застосування ***методу спроб*** наступний. Нехай відомий проміжок ізоляції (a,b). Візьмемо за перше наближення значення кореня $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ і обчислимо $f(x_1)$. Якщо $f(x_1) = 0$, то задачу розв'язано. Якщо $f(x_1) \neq 0$, то утворимо проміжки (a, x_1) і (x_1, b) і візьмемо той з них, на кінцях якого функція має різні знаки. Нехай це проміжок (a, x_1). Застосуємо до нього попередні міркування.

Тоді $x_2 = \dfrac{a + x_1}{2} = \dfrac{a + \dfrac{a+b}{2}}{2} = \dfrac{3a+b}{2^2}$; $x_2 \in (a, x_1)$.

Проміжок (a, x_1) поділимо на два: (a, x_2) і (x_2, x_1). Нехай $f(a) < 0$, $f(x_2) > 0$, тоді $x_3 = \frac{a + x_2}{2} = \frac{a + \frac{3a + b}{2^2}}{2} = \frac{(2^3 - 1)a + b}{2^3}$.

Продовжуючи цей процес, запишемо $x_n = \frac{(2^n - 1)a + b}{2^n}$.

Якщо відома точність ε, з якою треба обчислити корінь x^*, то процес припиняється, як тільки $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

Отже, для $f(x) = x^3 - 2x - 5$ $a = 2$, $b = 3$. Уточнимо проміжок ізоляції:

$$x_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2{,}5, \qquad f(a) = f(2) = -1 < 0,$$

$$f(b) = f(3) = 16 > 0, \qquad f(x_1) = f(2{,}5) = 5{,}625 > 0,$$

тоді шуканий корінь $x^* \in (a, x_1)$, тобто $x^* \in (2; 2{,}5)$.

Далі знаходимо

$x_2 = \frac{a + x_1}{2} = \frac{2 + 2{,}5}{2} = 2{,}25$; $f(x_2) = f(2{,}25) = 1{,}891 > 0$, вибираємо $x^* \in (a, x_2)$, тобто $x^* \in (2; 2{,}25)$:

$x_3 = \frac{a + x_2}{2} = \frac{2 + 2{,}25}{2} = 2{,}125$; $f(x_3) = f(2{,}125) = 0{,}346 > 0$, вибираємо $x^* \in (a, x_3)$, тобто $x^* \in (2; 2{,}125)$:

$x_4 = \frac{a + x_3}{2} = \frac{2 + 2{,}125}{2} = 2{,}0625$; $f(x_4) = f(2{,}0625) = -3{,}351 < 0$, вибираємо $x^* \in (x_4, x_3)$, тобто $x^* \in (2{,}0625; 2{,}125)$:

$x_5 = \frac{x_4 + x_3}{2} = \frac{2{,}0625 + 2{,}125}{2} = 2{,}09375 \approx 2{,}0938$;

$f(x_5) = f(2{,}0938) = -0{,}0084 < 0$, вибираємо $x^* \in (x_5, x_3)$, тобто $x^* \in (2{,}0938; 2{,}125)$:

$x_6 = \frac{2{,}0938 + 2{,}125}{2} = 2{,}109$; $f(x_6) = f(2{,}109) = 0{,}1644 > 0$, вибираємо $x^* \in (x_5, x_6)$, тобто $x^* \in (2{,}0938; 2{,}109)$:

$$x_7 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{2{,}0938 + 2{,}109}{2} = 2{,}1013; \qquad f(x_7) = f(2{,}1013) = 0{,}0756 > 0.$$

Продовжимо цей процес далі:

$x_8 = 2{,}0974$, $x_9 = 2{,}0955$, $x_{10} = 2{,}0947$, $x_{11} = 2{,}0942$, $x_{12} = 2{,}0945$.

Оскільки $|x_{12} - x_{11}| = |2{,}0945 - 2{,}0942| = 0{,}0003 < \varepsilon$, то наступний процес обчислення припиняємо. Отже, корінь рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$ належить інтервалу $x^* \varepsilon (2{,}0942; 2{,}0947)$ і дорівнює $x^* = 2{,}0945 \approx$ $\approx 2{,}095$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$ методом хорд.

<u>Теоретичні відомості.</u> Нехай функція $f(x)$ має неперервні похідні першого і другого порядку на відрізку $x \in [a,b]$, який містить єдиний корінь $x = x^*$ рівняння $f(x) = 0$, причому похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ зберігають знак на $[a,b]$. Припустимо для визначеності, що $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ і $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) > 0$. Точку перетину хорди AB з віссю $0x$ позначимо через x_1, $x_1 \in (a, x^*)$ (рис. 8.3).

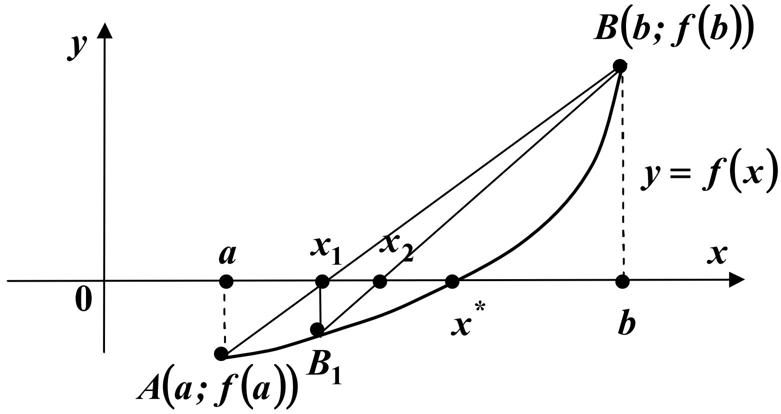


Рис. 8.3

Через точку x_1 проведемо пряму, паралельну осі $0y$, до перетину з графіком $f(x)$ в точці B_1. Сполучивши точки B_1 і A хордою, дістанемо x_2,

$x_2 \in (x_1, x^*)$ і т.д. Аналітичний вираз для послідовності $\{x_n\}$ одержимо з рівняння хорди AB, яка сполучає точки $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}. \tag{8.1}$$

В залежності від того, який кінець хорди A чи B є нерухомим, маємо наступні розрахункові формули:

1) кінець B є нерухомим $(f(b) \cdot f''(b) > 0)$, і ***нульовим наближенням кореня*** x є точка $x_0 = a$, отже,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \cdot (b - x_i)}{f(b) - f(x_i)}; \tag{8.2}$$

2) кінець A є нерухомим $(f(a) \cdot f''(a) > 0)$, і нульовим наближенням кореня x^* є точка $x_0 = b$:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \cdot (x_i - a)}{f(x_i) - f(a)}. \tag{8.3}$$

Зауважимо, що нерухомим вважаємо той кінець хорди, в якому знак функції $f(x)$ співпадає зі знаком другої похідної $f''(x)$, тобто $f(x) \cdot f''(x) > 0$. За початкове наближення x_0 приймають протилежний кінець відрізка.

Якщо задано ступінь точності визначення кореня ε, то розрахункова операція закінчується, коли

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon. \tag{8.4}$$

Розв'язання. Застосуємо до рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ метод хорд. Нехай $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Оскільки $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 16 > 0$, то на проміжку $(2;3)$ є хоча б один корінь. Знаходимо $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f''(x) = 6x$; $f''(2) = 12 > 0$, $f''(3) = 18 > 0$. Оскільки $f(b) \cdot f''(b) = f(3) \cdot f''(3) = 16 \cdot 18 > 0$, кінець хорди B є нерухомим і за формулами (8.2) знаходимо перше наближення кореня, поклавши $x_0 = a = 2$, $b = 3$:

$$x_1 = a - \frac{f(a) \cdot f(b - a)}{f(b) - f(a)} = 2 - \frac{f(2) \cdot (3 - 2)}{f(3) - f(2)} = 2 - \frac{(-1) \cdot (3 - 2)}{16 - (-1)} = 2{,}0588,$$

$$|x_1 - x_0| = |2{,}0588 - 2| = 0{,}0588 > \varepsilon.$$

Знаходимо за формулами (8.2) друге і наступні наближення кореня:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)} = 2{,}0588 - \frac{(-0{,}39096)\cdot(3-2{,}0588)}{16-(-0{,}39096)} = 2{,}0588 +$$

$$+0{,}02245 = 2{,}0813, \qquad |x_2 - x_1| = |2{,}0813 - 2{,}0588| = 0{,}0225 > \varepsilon;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(b-x_2)}{f(b)-f(x_2)} = 2{,}0813 - \frac{(-0{,}147)\cdot(3-2{,}0813)}{16-(-0{,}147)} = 2{,}0813 +$$

$$+0{,}0084 = 2{,}0897, \qquad |x_3 - x_2| = |2{,}0897 - 2{,}0813| = 0{,}008 > \varepsilon;$$

$$x_4 = 2{,}09276, \qquad |x_4 - x_3| = |2{,}09276 - 2{,}0897| = 0{,}003 > \varepsilon;$$

$$x_5 = 2{,}0939, \qquad |x_5 - x_4| = |2{,}0939 - 2{,}09276| = 0{,}0011 > \varepsilon;$$

$$x_6 = 2{,}0946, \qquad |x_6 - x_5| = |2{,}0946 - 2{,}0939| = 0{,}0007 < \varepsilon.$$

Таким чином, корінь з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$ дорівнює $x^* = x_6 = 2{,}095$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$ методом дотичних.

<u>Теоретичні відомості.</u> ***Метод дотичних*** або, як його ще називають, ***метод Ньютона***, є окремим випадком методу ітерацій [1] і дає можливість обчислювати корені рівняння з довільним ступенем точності.

Нехай $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. Ці умови означають, що функція на кінцях відрізка $[a,b]$ набуває значень, протилежних за знаком, зростає і вгнута (рис. 8.4):

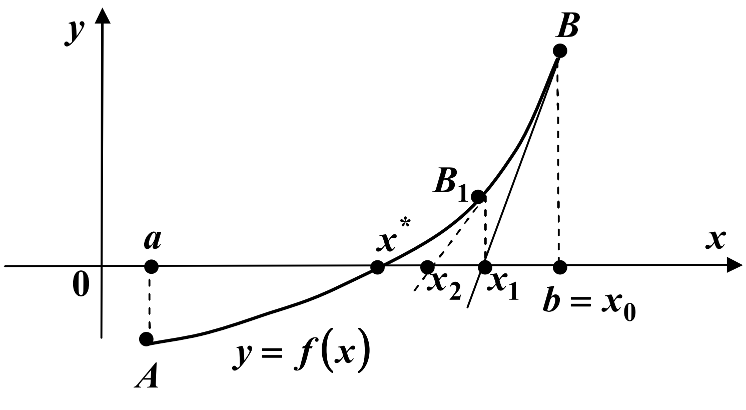


Рис. 8.4

Якщо з точки B провести дотичну до кривої $y = f(x)$, то вона перетне вісь абсцис у деякій точці x_1. Це значення x_1 можна прийняти за наближений корінь рівняння. Проводячи після цього дотичну в точці $B_1(x_1, f(x_1))$, аналогічно знаходимо друге наближення x_2.

Рівняння дотичної, що проходить через точку $B(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{8.5}$$

Ця дотична перетинає вісь абсцис у точці x_1. Якщо в рівняння (8.5) підставити $x = x_1$ і $y = y_1 = 0$, то матимемо $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$, звідки $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Продовжуючи цей процес, одержимо ітераційну формулу методу дотичних

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \tag{8.6}$$

Зауваження. Дотичну треба проводити з того кінця інтервалу $[a,b]$, для якого справедлива умова: добуток другої похідної на значення функції $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$. Цей кінець інтервалу беремо за нульове наближення кореня рівняння $f(x) = 0$. При цьому функція на інтервалі $[a,b]$ є опуклою або вгнутою, тобто знак $f''(x)$ на $[a,b]$ не змінюється.

Розрахунки закінчуються, якщо буде виконуватися одна з умов: $|f(x_i)| < \varepsilon$ або $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$, де ε – задана точність обчислень.

Розв'язання. Знайдемо корінь рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ на інтервалі $(2;3)$ за методом дотичних. Оскільки $f(b) = f(3) = 16$, $f''(3) = 18$, тобто $f(3)\cdot f''(3) > 0$, то за початкове наближення беремо $x_0 = 3$.

Знайдемо перше наближення кореня за формулою (8.6), якщо $f'(x) = 3x^2 - 2$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{16}{25} = 2{,}36;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}36 - \frac{f(2{,}36)}{f'(2{,}36)} = 2{,}36 - \frac{3{,}424}{14{,}707} = 2{,}127;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2{,}127 - \frac{0{,}369}{11{,}572} = 2{,}095;$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2{,}095 - \frac{0{,}005}{11{,}1671} = 2{,}0946,$$

$$|x_4 - x_3| = |2{,}0946 - 2{,}095| = 0{,}00045 < \varepsilon,$$

$$f(x_4) = f(2{,}0946) = 0{,}0005 < \varepsilon.$$

Отже, $x^* = x_4 = 2{,}095$.

Порівнюючи результати застосування методів проб, хорд і дотичних, бачимо, що метод дотичних дає змогу найшвидше обчислювати корінь із заданим ступенем точності.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти проміжки ізоляцій коренів і методами проб, хорд та дотичних уточнити корені рівнянь з точністю до $\varepsilon = 0{,}1$:

1) $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$ $\quad(x^* = 2{,}2)$;

2) $x^3 - 6x + 2 = 0$ $\quad(x_1^* = -2{,}6;\ x_2^* = 0{,}3;\ x_3^* = 2{,}2)$;

3) $x^3 - x - 1 = 0$ $\quad(x^* = 1{,}3)$;

4) $x^3 - 4x - 12 = 0$ $\quad(x^* = 2{,}8)$;

5) $x^3 + x^2 - 11 = 0$ $\quad(x^* = 1{,}9)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 9. ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ

Означення зростаючої і спадної функцій, екстремумів функції та план дослідження функції на екстремум наведено у лекції 7.

Приклад 1. Дослідити на монотонність функції:

а) $y = 3x^3 - 9x^2 + 12$; б) $y = -3x^4 - 8x^3 - 1$;

в) $y = ln(1 - x^2)$; г) $y = \sqrt[3]{x^2} + 5$.

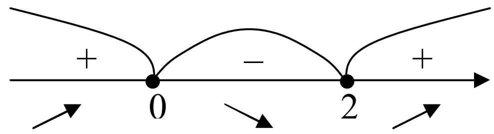
Розв'язання. а) Область визначення функції $(-\infty;+\infty)$. Знайдемо критичні точки даної функції. Маємо:

$y' = 9x^2 - 18x = 9x(x-2)$,

$9x(x-2) = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$ – критичні точки.

Нанесемо ці точки на числову вісь і визначимо знак похідної на кожному із інтервалів.



$y'(-1) = 9 \cdot (-1)(-1-2) = 27 > 0$,

$y'(1) = 9 \cdot 1(1-2) = -9 < 0$,

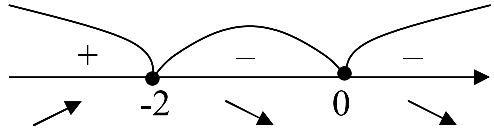
$y'(3) = 9 \cdot 3(3-2) = 27 > 0$.

Отже, функція зростає в інтервалах $(-\infty; 0)$ та $(2; +\infty)$. Функція спадає в інтервалі $(0; 2)$.

б) Область визначення функції $(-\infty; +\infty)$. Знайдемо похідну функції $y' = -12x^3 - 24x^2$.

Знаходимо критичні точки: $-12x^3 - 24x^2 = 0$, $-12x^2(x+2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Нанесемо ці точки на числову пряму і визначимо знак похідної на кожному із отриманих інтервалів.



$y'(-3) = -12 \cdot (-3)^2 \cdot (-3+2) = 108 > 0$,

$y'(-1) = -12 \cdot (-1)^2 \cdot (-1+2) = -12 < 0$,

$y'(1) = -12 \cdot 1^2 \cdot (1+2) = -36 < 0$.

Отже, функція зростає в інтервалі $(-\infty; -2)$ і функція спадає в інтервалі $(-2; +\infty)$.

в) Знайдемо область визначення функції $y = ln(1 - x^2)$:

$1 - x^2 > 0$,

$x^2 < 1$,

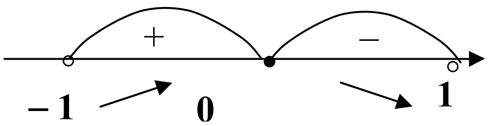
$-1 < x < 1$.

$D(y) = (-1;1)$

Знайдемо критичні точки даної функції: $y' = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$.

$-\dfrac{2x}{1 - x^2} = 0$; $x = 0$ – критична точка. Похідна не існує $x = \pm 1$, але ці точки не входять в область визначення функції і не є критичними.

Точка $x = 0$ розбиває область визначення функції на два інтервали $(-1;0)$ і $(0;1)$. Знайдемо знак похідної на кожному з них:



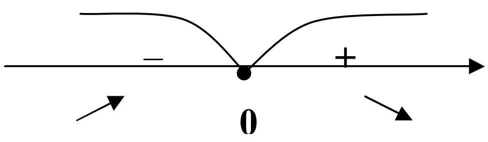
$$y'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} > 0,$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{3} < 0.$$

Отже, функція зростає в інтервалі $(-1;0)$. Функція спадає в інтервалі $(0;1)$.

г) Область визначення функції $(-\infty;+\infty)$. Знайдемо критичні точки даної функції $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Точка $x = 0$ є критичною, в ній похідна не існує. Розділимо область визначення функції на інтервали $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$ і знайдемо знак похідної в кожному інтервалі.



$$y'(-1)=\frac{2}{3\sqrt[3]{-1}}=-\frac{2}{3}<0;$$

$$y'(1)=\frac{2}{3\sqrt{1}}=\frac{2}{3}>0.$$

Отже, функція $y=\sqrt[3]{x^2}+5$ спадає в інтервалі $(-\infty;0)$ і зростає в інтервалі $(0;+\infty)$.

Приклад 2. Дослідити функції на екстремум:

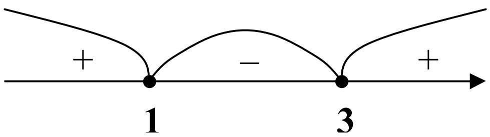
а) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$; б) $y=\frac{x^3}{(x+1)^2}$;

в) $y=x\sqrt{1-x}$; г) $y=x^3+4x^2+\frac{25}{3}x-17$.

Розв'язання. а) Область визначення функції $(-\infty;+\infty)$. Знаходимо похідну функції $y'=x^2-4x+3$.

Знаходимо критичні точки: $y'=0$, $x^2-4x+3=0$, $x_1=1$, $x_2=3$.

Розіб'ємо область визначення функції на проміжки $(-\infty;1)$, $(1;3)$, $(3;+\infty)$ і знайдемо знак похідної в кожному інтервалі.

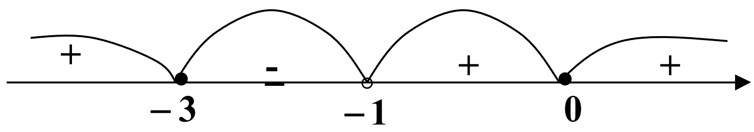


При переході від першого інтервалу до другого (через точку $x_1=1$) похідна змінює знак з плюса на мінус, тому при $x_1=0$ функція має максимум $y_{max}=y(1)=\frac{1}{3}-2+3+1=2\frac{1}{3}$. Оскільки при переході через точку $x_2=3$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, то при $x_2=3$ функція має мінімум $y_{min}=y(3)=\frac{1}{3}\cdot 27-2\cdot 9+9+1=1$.

б) Область визначення функції $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Знаходимо похідну функції:

$$y' = \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x^2(x+1)(3x+3-2x)}{(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}.$$

$y' = 0$, якщо $x_1 = -3$, $x_2 = 0$. У точці $x_3 = -1$ функція і її похідна не існують. Розділяємо область визначення функції на інтервали $(-\infty;-3)$, $(-3;-1)$, $(-1;0)$, $(0;+\infty)$ і знаходимо знак похідної на кожному проміжку:



При переході через точку $x_1 = -3$ похідна змінює знак з плюса на мінус, тому в цій точці – максимум: $y_{max} = y(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3+1)^2} = -\frac{27}{8}$.

В околі точки $x_3 = -1$ похідна змінює знак мінус на плюс. Проте зробити висновок, що в точці $x_3 = -1$ функція має мінімум, неможливо, оскільки в цій точці функція не визначена.

При переході через точку $x_2 = 0$ похідна не змінює знак, тому точка $x_2 = 0$ не є точкою екстремуму.

в) Знайдемо область визначення функції:

$1 - x \geq 0$,

$x \leq 1$.

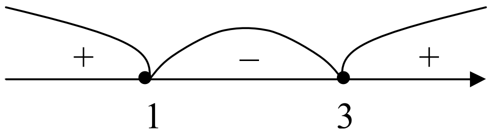
$D(y) = (-\infty;1]$.

Знайдемо критичні точки даної функції:

$$y' = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

Похідна даної функції дорівнює нулю при $x_1 = \frac{2}{3}$ і не існує при $x_2 = 1$.

Але критичною є тільки точка $x_1 = \frac{2}{3}$, бо вона лежить усередині області визначення заданої функції. Точка $x_2 = 1$ не є критичною, так як вона лежить на границі області визначення функції.



$$y'(0) = \frac{2 - 3 \cdot 0}{2\sqrt{1 - 0}} = 1 > 0;$$

$$y'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2 - 3 \cdot \frac{3}{4}}{2\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = -1 < 0.$$

При переході через точку $x_1 = \frac{2}{3}$ похідна змінює знак з плюса на мінус, тому в цій точці – максимум: $y_{max} = y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

г) Область визначення функції $(-\infty; +\infty)$.

$y' = 3x^2 + 8x + \frac{25}{3}$,

$3x^2 + 8x + \frac{25}{3} = 0$.

$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{25}{3} = 64 - 100 = -36 < 0$, тому рівняння не має коренів, тобто $y'(x) \neq 0$.

$y'(x)$ існує на всій області визначення. Отже критичних точок немає і функція не має екстремумів.

Приклад 3. Дослідити функцію $y = x + \frac{1}{x}$ на екстремум за допомогою другої похідної.

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Знаходимо похідну функції $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Знаходимо критичні точки: $y' = 0$, $\dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Похідна не існує при $x = 0$, але функція не визначена в цій точці, тому $x = 0$ не є критичною.

Знаходимо $y'' = 0 - \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$, $y''(-1) = \dfrac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$, отже в точці $x_1 = -1$ функція має максимум: $y_{max} = y(-1) = -1 + \dfrac{1}{-1} = -2$.

$y''(1) = 2 > 0$, отже в точці $x_2 = 1$ функція має мінімум: $y_{min} = y(1) = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$.

Приклад 4. Знайти інтервали монотонності і екстремуми функції: $y = x^2 e^{-x}$.

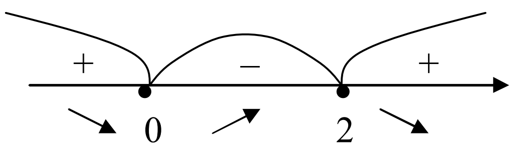
Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty;+\infty)$.

Знаходимо похідну функції: $y' = 2x \cdot e^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$.

Розв'язуючи рівняння $y' = 0$, знаходимо критичні точки:

$xe^{-x}(2 - x) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ – критичні точки.

Нанесемо ці точки на числову вісь і визначимо знак похідної на кожному із інтервалів.



$$y'(1) = -1 \cdot e(2 + 1) = -3e < 0,$$

$$y'(1) = 1 \cdot e^{-1}(2 - 1) = \frac{1}{e} > 0,$$

$$y'(3) = 3e^{-3}(2 - 3) = -\frac{3}{e^3} < 0.$$

При переході через точку $x_1 = 0$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже $x = 0$ – $\boldsymbol{min}$. При переході через точку $x_2 = 2$ похідна змінює знак з плюса на мінус, отже $x = 2$ – $\boldsymbol{max}$.

Функція спадає в інтервалах $(-\infty;0)$ і $(2;+\infty)$. Функція зростає в інтервалі $(0;2)$.

$$y_{min} = y(0) = 0; \quad y_{max} = y(2) = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}61.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дослідити на монотонність функції:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$; б) $y = \frac{e^x}{x}$;

в) $y = \sqrt{x - x^2}$; в) $y = ln(1 + x_2)$.

2. Дослідити функції на екстремум:

а) $y = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$;

б) $y = x^4 - \frac{20}{3}x^3 + 8x^2$, за правилом другої похідної;

в) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$;

г) $y = ln(x^2 + 16)$.

3. Дослідити функцію на монотонність і знайти екстремуми:

$y = \sqrt[3]{x^2}(x - 5)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 10. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ

План знаходження найбільшого та найменшого значень функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ наведено у лекції 7.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:

а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$, $x \in [-4;2]$;

б) $y = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$, $x \in [-1;3]$;

в) $y = 2\cos x - \cos 2x$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $y = e^{-x^2+4x}$, $x \in [-2;3]$.

Розв'язання. а) Знайдемо критичні точки:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$y' = 0, \qquad 3x^2 - 6x - 9 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

Критична точка $x_2 = 3$ не належить заданому проміжку. Обчислимо значення функції на кінцях заданого проміжку і в критичній точці $x_1 = -1$.

$$y(-4) = (-4)^3 - 3(-4)^2 - 9 \cdot (-4) + 35 = -41;$$

$$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 35 = 40;$$

$$y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 35 = 13.$$

Порівнюючи ці значення, бачимо, що $\max\limits_{[-4;2]} y(x) = y(-1) = 40$, $\min\limits_{[-4;2]} y(x) = y(-4) = -41$.

б) Знайдемо критичні точки :

$$y' = \frac{\left(4 - x^2\right)'\left(4 + x^2\right) - \left(4 - x^2\right) \cdot \left(4 + x^2\right)'}{\left(4 + x^2\right)^2} = \frac{-2x\left(4 + x^2\right) - \left(4 - x^2\right) \cdot 2x}{\left(4 + x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-8x - 2x^3 - 8x + 2x^3}{\left(4 + x^2\right)^2} = \frac{-16x}{\left(4 + x^2\right)^2}.$$

$x = 0$ – критична точка. Вона належить заданому проміжку, тому обчислимо значення функції в критичній точці і на кінцях заданого проміжку:

$$y(-1) = \frac{4 - (-1)^2}{4 + (-1)^2} = \frac{3}{5};$$

$$y(0) = \frac{4 - 0}{4 + 0} = 1;$$

$$y(3) = \frac{4 - 3^2}{4 + 3^2} = -\frac{5}{13}.$$

Порівнюючи отримані значення, бачимо, що $\max\limits_{[-1;3]} y(x) = y(0) = 1$, $\min\limits_{[-1;3]} y(x) = y(3) = -\frac{5}{13}$.

в) Знайдемо критичні точки:

$$y' = -2\sin x + 2\sin 2x = -2\sin x + 4\sin x\cos x = 2\sin x(-1 + 2\cos x),$$

$$2\sin x(2\cos x - 1) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = n\pi,\, n \in z \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\, k \in z. \end{cases}$$

У проміжку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ лежить тільки одна критична точка $x = \frac{\pi}{3}$.

Обчислюючи $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2};$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{2\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2},$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 0 - (-1) = 1.$$

Порівнюючи отримані значення, бачимо, що $ma[\; y(x) = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

г) Знайдемо критичні точки : $y' = e^{-x^2+4x}\cdot(-2x+4)$.

$e^{-x^2+4x}\cdot(-2x+4) = 0$, $-2x+4=0$, $x=2$ – критична точка.

Вона належить заданому проміжку, тому обчислимо значення функції в критичній точці і на кінцях заданого проміжку.

$$y(-2) = e^{-(-2)^2+4\cdot(-2)} = e^{-12};$$

$y(2)=e^{-2^2+4\cdot 2}=e^4$;

$y(3)=e^{-3^2+4\cdot 3}=e^3$.

Порівнюючи отримані значення, бачимо, що $\max\limits_{[-2;3]} y(x)=y(2)=e^4$, $\min\limits_{[-2;3]} y(x)=y(-2)=e^{-12}$.

Приклад 2. Знайти довжини сторін прямокутника найбільшої площі, уписаного в прямокутний трикутник зі сторонами 18, 24, 30 і спільним прямим кутом.

Розв'язання. Нехай ABC – заданий трикутник. $|AC|=18$, $|AB|=24$, $|BC|=30$, $\angle A=90^\circ$ (рис.10.1).

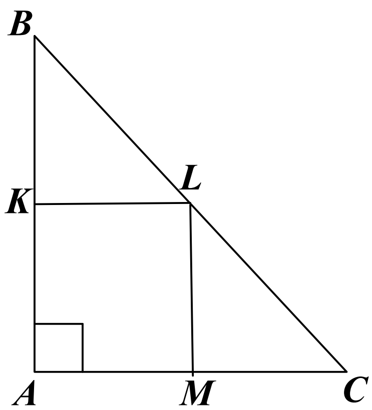


Рис. 10.1

$AKLM$ – вписаний прямокутник найбільшої площі, що має з даним трикутником спільний кут A. Нехай $|AM|=|KL|=x$, $|AK|=|ML|=y$. Тоді $|MC|=|AC|-|AM|=18-x$, $|BK|=|AB|-|AK|=24-y$.

З подібності трикутників BKL і BAC дістанемо:

$\frac{|BK|}{|KL|}=\frac{|AB|}{|AC|}$, $\frac{24y}{x}=\frac{24}{18}=\frac{4}{3}$, $3(24-y)=4x$, $y=24-\frac{4}{3}x$.

$S_{AKLM}=|AM|\cdot|AK|=x\cdot y=x\left(24-\frac{4}{3}x\right)=24x-\frac{4}{3}x^2$,

$S(x)=24x-\frac{4}{3}x^2$, $S'(x)=24-\frac{8}{3}x$, $24-\frac{8}{3}x=0$, $x=9$,

$S''(x)=-\frac{8}{3}$, $S''(9)=-\frac{8}{3}<0$, то $x=9$ – точка максимуму.

$|AM|=|KL|=9$, $|AK|=|ML|=y=24-\frac{4}{3}x=24-\frac{4}{3}\cdot 9=12$.

Таким чином, сторони прямокутника найбільшої площі 9 і 12.

Приклад 3. Знайти додатне число, сума якого з оберненим до нього є найменшою.

Розв'язання. Позначимо шукане число через x. Тоді $f(x) = x + \frac{1}{x}$, де $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \quad \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

$f'(x)$ не існує при $x_3 = 0$. Точки $x_2 = -1$ і $x_3 = 0$ не є критичними, тому що не належать області визначення досліджуваної функції. Маємо одну критичну точку $x_1 = 1$.

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1)2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}, \quad f''(1) = 2 > 0.$$

Точка $x_1 = 1$ є точкою мінімуму, $f_{min}(x) = f_{min}(1) = 2$. Очевидно, що значення є найменшим, оскільки в області визначення функція є неперервною і не має інших точок.

Приклад 4. Необхідно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом V. Які повинні бути розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

Розв'язання. В задачі необхідно визначити, в якому відношенні повинні знаходитися радіус і висота циліндра, щоб при заданому об'ємі V його повна поверхня була найменшою.

Повна поверхня циліндра: $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$, $(R > 0)$.

Необхідно знайти найменше значення цієї функції. Бачимо, що S являється функцією двох незалежних змінних, одну із яких необхідно виключити. Відомо, що об'єм циліндра $V = \pi R^2 h$. В задачі V – величина відома. Виразимо h через V: $h = \frac{V}{\pi R^2}$. З цим значенням h повна поверхня циліндра дорівнює:

$$S = 2\pi R \frac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2 \text{ або } S = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2.$$

Тепер вже S – функція однієї незалежної змінної R: $S(R) = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$.

Знаходимо $S'(R) = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}$. Із рівняння $S'(R) = 0$ маємо, що $4\pi R^3 - 2V = 0$ і $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Так як $S''(R) = \frac{4V}{R^2} + 4\pi > 0$ при будь-якому R, то значення $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ є значенням мінімуму функції, а разом з тим і найменшим значенням.

Запишемо значення h: $h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, тобто $h = 2R$.

Таким чином, на виготовлення циліндра заданого об’єму піде найменша кількість матеріалу, якщо взяти висоту циліндра, рівну діаметру.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити найбільше і найменше значення функції:

а) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на відрізку $[0;3]$;

б) $y = 2x^2 - 3x + 1$ на відрізку $[-1;2]$;

в) $y = x^2 \ln x$ на відрізку $[1;e]$;

г) $y = \frac{1}{1-x}$, на відрізку $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

2. Необхідно виготовити ящик з кришкою, об’єм якого повинен бути 72 см^2, причому сторони основи відносились би, як 1:2. Які повинні бути розміри всіх сторін, щоб повна поверхня була найбільшою?

3. Потрібно виготовити конічну лійку з твірною $l = 10$ см. Який має бути радіус основи воронки, щоб її обсяг був найбільшим?

4. Знайти таке додатне число, щоб різниця між ним і його кубом була найменшою.

ЛЕКЦІЯ 8. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ. ЧАСТИНА 2

8.1. Опуклість і угнутість кривої

Графік диференційовної функції $y = f(x)$ називається ***опуклим вниз*** на інтервалі $(a;b)$ або ***угнутим***, якщо він розташований вище будь-якої своєї дотичної на цьому інтервалі.

Графік функції $y = f(x)$ називається ***опуклим уверх*** або ***опуклим*** на інтервалі $(a;b)$, якщо він розташований нижче будь-якої дотичної на цьому інтервалі.

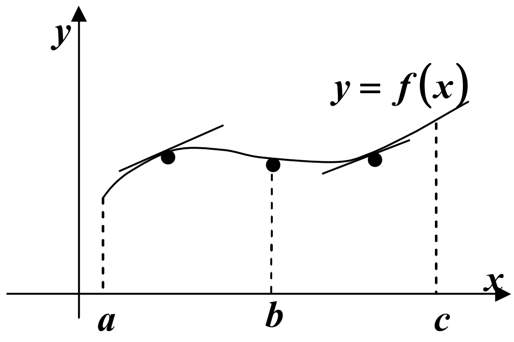


Рис. 8.1

Точка, при переході через яку характер опуклості змінюється, називається ***точкою перегину***.

На рис.8.1 крива $y = f(x)$ є опуклою на інтервалі $(a;b)$ і угнутою на інтервалі $(b;c)$. Точка з абсцисою $x = b$ є точкою перегину.

8.1.1. Умова опуклості або угнутості кривої

Теорема 8.1. Якщо функція $y = f(x)$ у всіх точках інтервалу $(a;b)$ має від'ємну другу похідну, тобто $f''(x) < 0$, то графік функції на $(a;b)$ буде опуклим, якщо у всіх точках інтервалу $(a;b)$ $f''(x) > 0$, то графік функції буде угнутим.

Доведення. Нехай $f''(x)<0 \quad \forall x \in (a;b)$. Доведемо, що для будь-якої точки $M(x_0, y_0)$ кривої $f(x)$, де $x_0 \in (a,b)$ дотична, що проходить через точку M знаходиться вище кривої $y=f(x)$.

Рівняння дотичної, що проходить через точку $M(x_0; y_0)$ має вигляд:

$y_\partial - y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$, або $y_\partial = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, де y_∂ – ордината будь-якої точки, що належить дотичній.

Нехай y – ордината будь-якої точки кривої $y=f(x)$. Тоді $y-y_\partial = f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$. За теоремою Лагранжа $f(x)-f(x_0)=$ $=f'(c)(x-x_0)$, де $c \in (x_0; x)$.

Отже, маємо $y-y_\partial = f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$, або $y-y_\partial =$ $=(f'(c)-f'(x_0))(x-x_0)$.

Знову застосуємо теорему Лагранжа $f'(c)-f'(x_0)=f''(c_1)$.

Таким чином, дістанемо $y-y_\partial = f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0)$.

Розглянемо:

1) Якщо $x>x_0$, то $x-x_0>0$, $c-x_0>0$, $f''(c_1)<0$, отже, $y-y_\partial<0$, тобто $y<y_\partial$.

2) Якщо $x<x_0$, то $x-x_0<0$, $c-x_0<0$, $f''(c_1)<0$, отже, $y-y_\partial<0$, тобто $y<y_\partial$.

Отримали: у всіх точках інтервалу $(a;b)$ графік функції $y=f(x)$ розташований вище її дотичної, отже крива $y=f(x)$ – опукла на (a,b).

Аналогічно доводиться теорема, коли $f''(x)>0$, а крива буде угнутою на $(a;b)$.

<u>Теорема 8.2. (Достатня умова існування точок перегину).</u> Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0, у якій вона або дорівнює нулю, або не існує, змінює знак, то точка з абсцисою x_0 є точкою перегину.

Доведення. Нехай $f''(x)<0$ при $x<x_0$, а $f''(x)>0$ при $x>x_0$. Тоді при $x<x_0$ графік функції є опуклим, а при $x>x_0$ – угнутим. Це означає, що точка з абсцисою $x=x_0$ – точка перегину.

Зауваження. Точка з абсцисою x_0, в якій друга похідна функції $f''(x_0)$ або дорівнює нулю або не існує, називається ***критичною точкою другого роду***.

8.1.2. План дослідження функції на опуклість та угнутість, наявність точок перегину

1. Знайти область визначення функції.

2. Знайти спочатку першу похідну функції $y'(x)$, а потім другу похідну $y''(x)$.

3. Знайти критичні точки другого роду, тобто розв'язати рівняння $y'' = 0$ і крім того, знати точки в яких $y''(x)$ не існує, якщо такі є.

4. Розбити область визначення на інтервалі з межами, якими є критичні точки другого роду; визначити знак похідної другого роду у кожному отриманому інтервалі. Якщо $y''(x) < 0$ на (x_i, x_{i+1}), то крива $y(x)$ – опукла, якщо $y''(x) > 0$ на (x_i, x_{i+1}), то крива $y(x)$ – угнута. Якщо при переході через критичну точку знак $y''(x)$ змінюється, то це точка перегину.

5. Знайти ординати точок перегину (якщо такі точки є).

Приклад 8.1. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та знайти точки перегину: $y = x^5 - 10x^2 + 3x$.

Розв'язання. 1. Область визначення функції $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $y' = 5x^4 - 20x + 3$,

$y'' = 20x^3 - 20$.

3. $y'' = 0 \;\Rightarrow\; 20x^3 - 20 = 0 \;\Rightarrow\; 20(x^3 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - 1 = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x^3 = 1 \;\Rightarrow\; x = 1$ – критична точка другого роду.

4.

x	$-\infty;1$	1	$1;+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$	$m.n.$	$\cup$

5. $y_{m.n.} = y(1) = 1^5 - 10 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = -6$.

Отже, на інтервалі $(-\infty;1)$ функція є опуклою, на інтервалі $(1;+\infty)$ – угнутою, і точка $M_0(1;-7)$ є точкою перегину.

8.2. Асимптоти графіка функції

Означення. ***Асимптотою графіка функції*** $y=f(x)$ називається така пряма лінія, відстань до якої від точки, що лежить на кривій $y=f(x)$, прямує до нуля при необмеженому віддалені від початку координат цієї точки на кривій.

Асимптоти можуть бути трьох видів: вертикальні, похилі та горизонтальні.

Означення. Пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$.

Якщо пряма $y=kx+b$ – похила асимптота графіка функції $y=f(x)$, то k і b знаходяться за формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Якщо хоча б одна з останніх границь або не існує, або дорівнює нескінченності, то графік функції $y=f(x)$ не має похилої асимптоти.

Якщо $k=0$, то пряма $y=b$ буде горизонтальною асимптотою для кривої $y=f(x)$.

Якщо $k=b=0$, то горизонтальною асимптотою кривої $y=f(x)$ буде вісь абсцис.

Зауваження. Іноді границі при знаходженні k та b при $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$ можуть виявитися різними. Отже, доцільно знаходити окремо границі при $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$.

Приклад 8.2. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{x^2-3x+8}{x-2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-3x+8}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-3x+8}{x-2} = +\infty.$$

Отже, пряма $x = 2$ – вертикальна асимптота даної функції.

Похила асимптота: $y = kx + b$, де $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+8}{x(x-2)} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+8}{x^2-2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3x+8}{x-2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+8-x(x-2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+8-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{8-x}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x} - 1}{1 - \frac{2}{x}} = -1.$$

Отже, пряма $y = x - 1$ є похилою асимптотою даної функції.

Приклад 8.3. Знайти асимптоти функції $y = x e^{5x}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty;+\infty)$, отже вертикальної асимптоти немає.

Похила асимптота: $k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x e^{5x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{5x} = \infty$, отже при $x \to +\infty$ похилої асимптоти немає.

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x e^{5x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{5x} = 0.$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} x e^{5x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-5x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \textit{за правилом} \\ \textit{Лопіталя} \end{matrix} \right\} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-5e^{-5x}} = 0.$$

Отримали: $y = 0$ – горизонтальна асимптота при $x \to -\infty$.

8.3. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка

Для того, щоб побудувати графік функції $y = f(x)$, треба дотримуватись певної схеми дослідження функції. Деякі пункти схеми можуть мінятися місцями. Ось, наприклад, одна з таких схем:

1. Знайти область визначення функції.

2. Знайти (якщо можливо) точки перетину графіка функції з осями координат.

3. Дослідити функцію на парність та непарність.

4. Дослідити функцію на періодичність.

5. Знайти інтервали монотонності функції, екстремуми функції (якщо вони є).

6. Знайти інтервали опуклості, угнутості функції, точки перегину.

7. Знайти асимптоти функції.

8. Користуючись отриманими результатами, побудувати графік функції.

Якщо функція дуже складна для побудови, можна визначити декілька додаткових точок її графіка, з’ясувати інші її особливості; якщо функція надто проста, деякі пункти схеми можна опустити.

Приклад 8.4. Провести повне дослідження і побудувати графік функції: $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

Розв’язання. 1. Область визначення функції: функція існує, якщо $(x-1)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x-1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1$. Отже, $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Точки перетину графіка функції з осями координат:

а) якщо $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{2 \cdot 0 - 1}{(0-1)^2} = -1$;

б) якщо $y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 1 = 0$, $2x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$.

Отже, маємо дві точки: $M_1(0;-1)$, $M_2\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

3. Дослідимо функцію на парність, непарність:

$$y(-x)=\frac{2(-x)-1}{(-x-1)^2}=\frac{-2x-1}{(x+1)^2}=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}\begin{matrix}\neq y(x)\\ \neq -y(x)\end{matrix},$$ тобто ця функція є функцією загального вигляду.

4. Функція неперіодична.

5. Знайдемо інтервали монотонності функції та екстремуми:

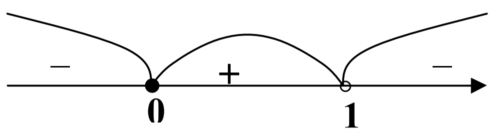
$$y'=\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-1)'\cdot(x-1)^2-(2x-1)\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x-1)^2-(2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)[(x-1)-(2x-1)]}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1-2x+1)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{-x}{(x-1)^3}.$$

Знайдемо критичні точки: $y'=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{6x}{(x-1)^3}=0 \;\Rightarrow\; x=0$.

y' не існує , якщо $x-1=0$, $x=1$.



Отже, функція спадає для: $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$;

функція зростає для: $x\in(0;1)$.

У точці $x=0$ функція має мінімум, $y_{min}=-1$.

У точці $x=1$ екстремуму немає, оскільки функція невизначена в цій точці.

6. Дослідимо функцію на інтервали опуклості, угнутості, точки перегину. Для цього знайдемо другу похідну функції:

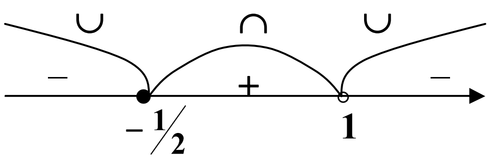
$$y''=\left(\frac{-x}{(x-1)^3}\right)'=-\frac{(x-1)^3-x\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=-\frac{(x-1)^2[x-1-3x]}{(x-1)^6}=$$

$$=-\frac{(-2x-1)}{(x-1)^4}.$$

Знайдемо критичні точки другого роду:

$$y''=0 \;\Rightarrow\; \frac{(+2x+1)}{(x-1)^4}=0 \;\Rightarrow\; 2x+1=0 \;\Rightarrow\; -2x=1 \;\Rightarrow\; x=-\frac{1}{2}.$$

y'' не існує, якщо $(x-1)^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$.



Отже, графік функції є опуклим для:

$x \in \left(-\frac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$;

Графік функції є угнутим для:

$x \in \left(-\frac{1}{2};1\right)$.

7. Знайдемо асимптоти функції. Оскільки функція не існує при $x = 1$, дістанемо:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty \ ;$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty .$$

Отже, пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Похила асимптота $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x^2 - 2x + 1} = \left\{ \begin{matrix} \textit{За правилом} \\ \textit{Лопіталя} \end{matrix} \right\} =$$

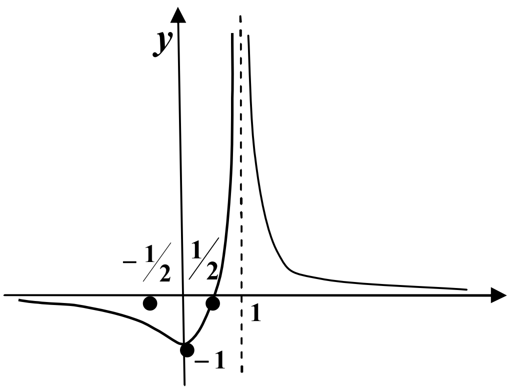


Рис. 8.2

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{2x-2} = 0$. Отже, $y = 0$ – горизонтальна асимптота. Графік функції наведено на рис. 8.2.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 11. ІНТЕРВАЛИ ОПУКЛОСТІ Й УГНУТОСТІ ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ. АСИМПТОТИ КРИВОЇ

11.1 Дослідження функції на опуклість і угнутість

Означення, необхідна і достатня умова опуклості і угнутості функції, а також план дослідження функції за її властивостями наведено у лекції 7. Розглянемо приклади стосовно цієї теми.

Приклад 1. Дослідити функції на опуклість, угнутість, знайти точки перегину, якщо вони є:

а) $y = -\dfrac{x^4}{12 + x^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції – $x \in (-\infty; +\infty)$. Знайдемо спочатку першу, а потім другу похідну функції:

$$y' = -\frac{(x^4)'(12 + x^2) - x^4(12 + x^2)'}{(12 + x^2)^2} = -\frac{4x^3(12 + x^2) - x^4 \cdot 2x}{(12 + x^2)^2} =$$

$$= -\frac{48x^3 + 4x^5 - 2x^5}{(12 + x^2)^2} = -\frac{2x^5 + 48x^3}{(12 + x^2)^2};$$

$$y'' = -\frac{(2x^5 + 48x^3)' \cdot (12 + x^2)^2 - (2x^5 + 48x^3)\left((12 + x^2)^2\right)'}{(12 + x^2)^4} =$$

$$= -\frac{(10x^4 + 144x^2)(12 + x^2)^2 - (2x^5 + 48x^3)2(12 + x^2) \cdot 2x}{(12 + x^2)^4} =$$

$$= -\frac{(10x^4 + 144x^2)(12 + x^2) - (2x^5 + 48x^3) \cdot 4x}{(12 + x^2)^3} =$$

$$= -\frac{120x^4 + 1728x^2 + 10x^6 + 144x^4 - 8x^6 - 192x^4}{(12 + x^2)^3} = -\frac{2x^6 + 72x^4 + 1728x^2}{(12 + x^2)^3} =$$

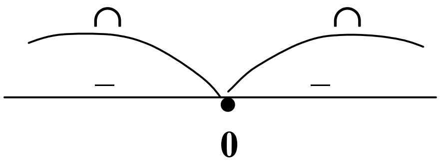
$$= -2\frac{x^2\left(x^4+36x^2+864\right)}{\left(12+x^2\right)^3}.$$

Знайдемо точки, в яких $y''=0$:

$$-\frac{2x^2\left(x^4+36x^2+864\right)}{\left(12+x^2\right)^3}=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x^4+84x^2+864=0 \end{cases}.$$

З першого рівняння маємо: $x=0$. У другому рівнянні введемо нову змінну: $x^2=t$. Тоді $t^2+36t+864=0$, $D=36^2-4\cdot 864=-2160$.

Оскільки $D<0$, то тричлен $x^4+36x^2+\quad+864>0$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.



Отже, дістали одну критичну точку другого роду $x=0$.

Таким чином, задана функція опукла на всій числовій прямій.

б) $y=\sqrt[3]{x+3}$.

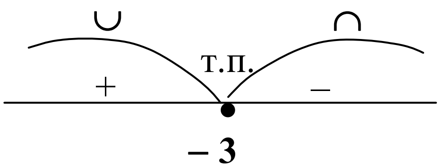
Розв'язання. Область визначення функції $x\in(-\infty;+\infty)$. Знайдемо першу і другу похідні функції:

$$y'=\left(\sqrt[3]{x+3}\right)'=\left(\left(x+3\right)^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}\left(x+3\right)^{-2/3};$$

$$y''=\left(\frac{1}{3}\left(x+3\right)^{-2/3}\right)'=-\frac{2}{9}\left(x+3\right)^{-5/3}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{\left(x+3\right)^5}}.$$

Прирівняємо y'' до нуля: $-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{\left(x+3\right)^5}}=0$. Це рівняння не має розв'язку, тобто $y''\neq 0$ в жодній точці. Але y'' не існує, коли $x+3=0$, тобто $x=-3$. Це означає, що $x=-3$ – критична точка другого роду.

Отримали: точка з абсцисою $x=-3$ – точка перегину $y(-3)=\sqrt[3]{-3+3}=0$.



Отже, маємо: функція угнута для $x\in(-\infty;-3)$; опукла для $x\in(-3;+\infty)$. Точка $M_0(-3;0)$ – точка перегину.

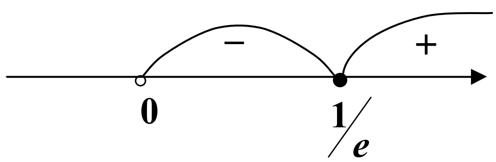
в) $y = x\,ln^2\,x + 1$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (0;+\infty)$. Перша і друга похідні функції відповідно дорівнюють:

$$y' = \left(x\,ln^2\,x + 1\right)' = (x)' \cdot ln^2\,x + x\left(ln^2\,x\right)' = ln^2\,x + x \cdot 2\,ln\,x \cdot \frac{1}{x} = ln^2\,x +$$
$$+\,2\,ln\,x;$$

$$y'' = 2\,ln\,x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2(ln\,x + 1)}{x}.$$

Друга похідна дорівнює нулю, якщо $ln\,x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$. Отже, маємо для другої похідної функції.



Дістали, що для $x \in \left(0;\, 1/e\right)$ $y'' < 0$, тобто функція угнута, для $x \in \left(1/e\,;+\infty\right)$ $y'' > 0$, тобто функція опукла. Точка перегину має абсцису $x = 1/3$, а ординату $y_{т.п.} = y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot ln^2\,\frac{1}{e} + 1 = \frac{1}{e} + 1$.

г) $y = x^3 e^{-4x} - 4$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty;+\infty)$.

Перша похідна функції:

$$y' = \left(x^3 e^{-4x} - 4\right)' = \left(x^3\right)' \cdot e^{-4x} + x^3\left(e^{-4x}\right)' = 3x^2 e^{-4x} - 4x^3 e^{-4x} =$$
$$= e^{-4x}\left(3x^2 - 4x^3\right).$$

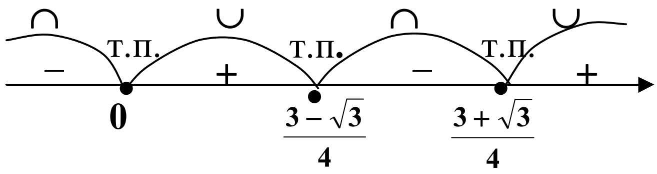
Друга похідна функції:

$$y'' = \left(e^{-4x}\left(3x^2 - 4x^3\right)\right)' = \left(e^{-4x}\right)'\left(3x^2 - 4x^3\right) + e^{-4x}\left(3x^2 - 4x^3\right)' =$$
$$= -4e^{-4x}\left(3x^2 - 4x^3\right) + e^{-4x}\left(6x - 12x^2\right) = e^{-4x}\left(-12x^2 + 16x^3 + 6x - 12x^2\right) =$$
$$= e^{-4x}\left(16x^3 - 24x^2 + 6x\right) = 2x\left(8x^2 - 12x + 3\right)e^{-4x}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0; \quad 8x^2 - 12x + 3 = 0; \quad D = 144 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 48;$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{16} = \frac{12 \pm \sqrt{16 \cdot 3}}{16} = \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{16} = \frac{4\left(3 \pm \sqrt{3}\right)}{16} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{8}.$$

Маємо:



Отже, функція опукла для $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}; \frac{3+\sqrt{3}}{4} \right)$, функція угнута для $x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{4} \right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}; +\infty \right)$. Точки перегину:

при $x = 0$: $y = -4$,

при $x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$: $y = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4} \right)^3 e^{-3+\sqrt{3}} - 4$,

при $x = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$: $y = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4} \right)^3 e^{-3-\sqrt{3}} - 4$.

д) $y = e^{arctg\, x}$.

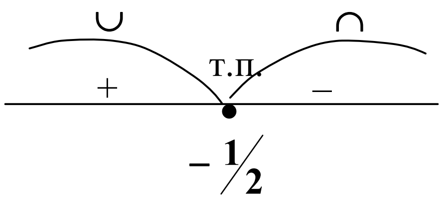
Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty; \infty)$.

Похідна першого порядку має вигляд: $y' = e^{arctg\, x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

Похідна другого порядку:

$$y'' = \left(\frac{e^{arctg\, x}}{1+x^2} \right)' = \frac{\left(e^{arctgx}\right)' \cdot \left(1+x^2\right) - e^{arctg\, x} \cdot (1+x)'}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{arctg\, x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \left(1+x^2\right) - e^{arctg\, x} \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{e^{arctg\, x} - e^{arctg\, x} \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{e^{arctg\, x}(1-2x)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$



Якщо $y'' = 0$, то $(1-2x) = 0$; $x = \frac{1}{2}$ – критична точка другого роду.

$$y\left(\tfrac{1}{2}\right) = e^{arctg \frac{1}{2}}.$$

Отже, маємо: функція угнута для $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; функція опукла для $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; точка перегину – $M\left(\frac{1}{2}; e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\right)$.

є) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Для диференціювання функції зручно перетворити її на вигляд: $y = (1-x)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

Тоді, $y' = \left((1-x)^{\frac{1}{3}}\right)' \cdot (x-2)^{\frac{2}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot \left((x-2)^{\frac{2}{3}}\right)' =$

$$= -\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{x-2}} =$$

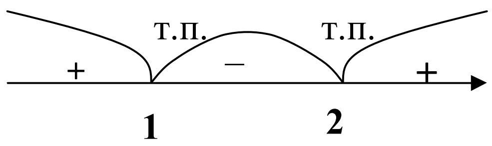
$$= \frac{-(x-2) + 2(1-x)}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}} = \frac{-x+2+2-2x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}} = \frac{4-3x}{3(1-x)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}};$$

$$y'' = \frac{1}{3}\frac{(4-3x)'(1-x)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}} - (4-3x)\left((1-x)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}\right)'}{(1-x)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(-3)(1-x)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}} - (4-3x)\cdot\left(-\frac{2}{3}(1-x)^{-\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}} + \right.}{(1-x)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{\left. + (1-x)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}\right)}{(1-x)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^4(1-x)^5}}.$$

Розв'язок рівняння $y'' = 0$ не має, але коли y'' не існує, то $x = 2$; $x = 1$ – критичні точки другого роду.



$y_{т.п.} = y(1) = \sqrt[3]{(1-1)(1-2)^2} = 0$,

$y_{т.п.} = y(2) = \sqrt[3]{(2-1)(2-2)^2} = 0$.

Отже, функція угнута для $x \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$; опукла для $x \in (1;2)$ і має дві точки перегину, а саме $M_1(1;0)$; $M_2(2;0)$.

ж) $y = \dfrac{|x+1|}{x}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Для диференціювання перетворимо функцію наступним чином:

$$y = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x < -1, \\ 1 + \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \geq -1. \end{cases}$$

Звідси $y' = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, \text{ якщо } x < -1, \\ -\dfrac{1}{x^2}, \text{ якщо } x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow y'' = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, x < -1, \\ \dfrac{2}{x^3}, x > -1. \end{cases}$

Отже, похідна другого порядку на інтервалах $(-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$ додатна, а на інтервалі $(-1;0)$ – від'ємна. За додатними умовами опуклості, угнутості функції й точки перегину, дана функція опукла на інтервалах $(-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$ і угнута на інтервалі $(-1;0)$. А точка з абсцисою $x = -1$ – точка перегину.

$y(-1) = 0$. Тобто, $M(-1;0)$ – точка перегину.

Перегину у точці з абсцисою $x = 0$ не буде, тому що функція невизначена у цій точці.

11.2. Асимптоти функції

Асимптоти графіка бувають вертикальні, похилі та горизонтальні. Їх означення та формули для знаходження розглянуто у лекції 8.

Приклад 2. Знайти асимптоти функцій:

а) $y = 4x + \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}\left(4x + \frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}\left(4x + \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота графіка функції.

Знайдемо похилі асимптоти, якщо вони є.

$y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(4 + \frac{1}{x^2}\right) = 4$;

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(4x + \frac{1}{x} - 4x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Отже, $y = 4x$ – похила асимптота.

б) $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty; +\infty)$, тому вертикальних асимптот немає.

Знайдемо похилі асимптоти за формулою $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3 - 2x^2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x\right) = [\infty - \infty] = \left\{\begin{array}{l}\textit{домножимо і}\\ \textit{поділимо на}\\ \textit{спряжене виразу}\\ \textit{у дужках}\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^3 - 2x^2\right)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3 - 2x^2\right)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - 2x^2 - x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3 - 2x^2\right)^2} + x\sqrt[3]{\left(x^3 - 2x^2\right)} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2} + x\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)} + x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left\{\begin{matrix} \textit{розділимо чисельник і} \\ \textit{знаменник на } x^2 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{\dfrac{\left(x^3-2x^2\right)^2}{x^6}} + \sqrt[3]{\dfrac{x^3-2x^2}{x^3}} + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1-\dfrac{2}{x}} + 1} = -\frac{2}{3}.$$

Таким чином похила асимптота графіка функції $y = x - \frac{2}{3}$.

в) $y = 3x + arctg2x$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому прикладу $x \in (-\infty;+\infty)$ і вертикальних асимптот немає. Рівняння похилих асимптот $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x + arctg2x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(3 + \frac{arctg2x}{x}\right) = 3;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(3x + arcctg2x - 3x\right) = 0;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(3x + arcctg2x - 3x\right) = \pi.$$

Тобто отримали дві похилі асимптоти:

при $x \to +\infty$ $y = 3x$;

при $x \to -\infty$ $y = 3x + \pi$.

г) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+2}}$.

Розв'язання. Функція невизначена при $x = -2$.

Оскільки $\lim_{x\to-2-0} \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+2}} = +\infty$; $\lim_{x\to-2+0} \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+2}} = -\infty$, то $x = -2$ – вертикальна асимптота.

Похилі асимптоти $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x\sqrt[3]{x+2}} = 0,$$

$b = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+2}} = 1$, отже $y = 1$ – горизонтальна асимптота.

д) $y = \dfrac{ln\left(1 + x^2\right)}{x^2} + 3x$.

Розв'язання. Функція невизначена при $x = 0$, але $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{ln\left(1 + x^2\right)}{x^2} + 3x\right) =$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{ln\left(1 + x^2\right)}{x^2} + \lim_{x \to 0} 3x = \left\{\textit{за правилом Лопіталя}\right\} = \lim_{x \to 0}\frac{\frac{1 \cdot 2x}{1 + x^2}}{2x} = \lim_{x \to 0}\frac{1}{1 + x^2} =$$

$= 1$, тому вертикальної асимптоти немає.

Оскільки $k = \lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{ln\left(1 + x^2\right)}{x^3} + 3\right) = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\left\{\begin{matrix}\textit{за правилом}\\ \textit{Лопіталя}\end{matrix}\right\} =$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(\frac{\frac{1 \cdot 2x}{1 + x^2}}{x^3}\right) + 3 = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{2}{x^2\left(1 + x^2\right)}\right) + 3 = 3;$$

$$b = \lim_{x \to \infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{ln\left(1 + x^2\right)}{x^2} + 3x - 3x\right) = \lim_{x \to \infty}\frac{ln\left(1 + x^2\right)}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$= \left\{\textit{за правилом Лопіталя}\right\} = \lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{\frac{2x}{1 + x^2}}{2x} = \lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2}{1 + x^2} = 0$, то $y = 3x$ – похила асимптота.

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтервали опуклості та угнутості функції, а також точки перегину, якщо вони є:

1. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$;
2. $y = e^{-x^2}$;
3. $y = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$;
4. $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + 1}$;
5. $y = 2x^2 + ln\, x$;
6. $y = e^{arctg\, x}$;
7. $y = ln\left(1 + x^2\right)$;
8. $y = x\, e^{-x/2}$.

Знайти асимптоти функції:

1. $y = \dfrac{3x+1}{x^2}$; 3. $y = x + \dfrac{1}{x^2}$;

2. $y = \dfrac{4x^2-5}{x-1}$; 4. $y = x \cdot e^{-x}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 12. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

Застосуємо наступну (лекція 8) загальну схему дослідження функції:

1. Знайти область визначення функції.

2. Знайти (якщо можливо) точки перетину графіка функції з осями координат.

3. Дослідити функцію на парність та непарність.

4. Дослідити функцію на періодичність.

5. Знайти інтервали монотонності функції, екстремуми функції (якщо вони є).

6. Знайти інтервали опуклості, угнутості функції, точки перегину.

7. Знайти асимптоти функції.

8. Користуючись отриманими результатами, побудувати графік функції.

Якщо функція дуже складна для побудови, можна визначити декілька додаткових точок її графіка, з'ясувати другі її особливості; якщо функція надто проста, деякі пункти схеми можна опустити.

Приклад 1. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

Розв'язання. 1. Функція визначена на всій числовій осі, тобто $x \in (-\infty;+\infty)$.

2. Точки перетину графіка функції з осями координат:

$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1-x^3} = \sqrt[3]{1-0^3} = 1$;

$y = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1-x^3} = 0 \Rightarrow 1-x^3 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Отже, графік функції перетинає вісь $0x$ у точці $M_1(1;0)$, а вісь $0y$ у точці $M_2(0;1)$.

3. Дослідимо функцію на парність, непарність:

$$y(-x)=\sqrt[3]{1-(-x)^3}=\sqrt[3]{1+x^3}\ \begin{matrix}\neq y(x)\\ \neq -y(x)\end{matrix}$$ – функція загального вигляду.

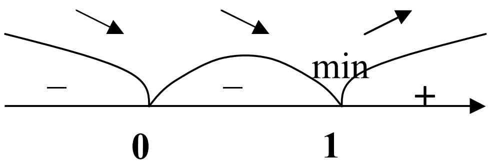
4. Функція неперіодична.

5. Знайдемо інтервали монотонності функції і екстремуму, якщо вони є:

$$y'=\left(\left(1-x^3\right)^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}\left(1-x^3\right)^{-2/3}\left(-3x^2\right)=\frac{-x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}};$$

$$y'=0\Rightarrow\frac{-x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)}}=0\Rightarrow x=0.$$

Перша похідна функції не існує, коли $\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}=0$, тобто, $x=1$.



$$y_{min}=y(1)=0.$$

Бачимо, що функція спадає для $x\in(-\infty;1)$ і зростає для $x\in(1;+\infty)$. У точці $M_2(1;0)$ функція досягає мінімуму.

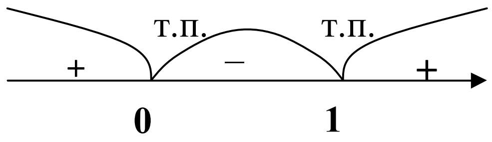
6. Знайдемо інтервали опуклості і угнутості графіка функції, точки перегину, якщо вони є.

$$y''=\left(-\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}\right)'=-\frac{\left(x^2\right)'\cdot\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x^2\left(\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}\right)'}{\left(1-x^3\right)^{4/3}}=$$

$$=-\frac{2x\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x^2\cdot\frac{2}{3}\left(1-x^3\right)^{-1/3}\left(-3x^2\right)}{\left(1-x^3\right)^{4/3}}=-\frac{2x\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}+\frac{2x^4}{\sqrt{1-x^3}}}{\left(1-x^3\right)^{4/3}}=$$

$$=-\frac{2x\left(1-x^3\right)+2x^4}{\left(1-x^3\right)^{5/3}}=-\frac{2x-2x^4+2x^4}{\left(1-x^3\right)^{5/3}}=-\frac{2x}{\left(1-x^3\right)^{5/3}}.$$

Якщо $y''=0$, то $x=0$. Видно, що y'' не існує при $x=1$. Таким чином, маємо дві критичні точки другого роду. Дослідимо знаки другої похідної на відповідних інтервалах:



$$y_{т.п.} = y(0) = \sqrt[3]{1-0^3} = 1;$$

$$y_{т.п.} = y(1) = \sqrt[3]{1-1^3} = 0.$$

Отже, функція угнута на інтервалах $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$; опукла – для $x \in (0;1)$ і має дві точки перегину $(0;1)$ і $(1;0)$.

7. Оскільки область визначення функції $x \in (-\infty;+\infty)$, то вертикальних асимптот немає.

Похилі асимптоти: $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - k(x)] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right) = (-\infty+\infty) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)\left(\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2} - x\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)} + x^2\right)}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2} - x\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3+x^3}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2} - x\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)} + x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2} - x\sqrt[3]{1-x^3} + x^2} = 0.$$

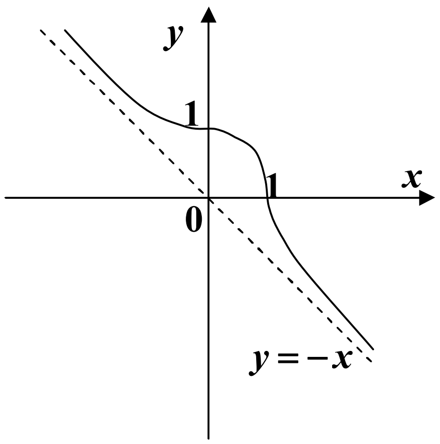


Рис. 12.1

Тобто $y = -x$ – похила асимптота. Графік функції наведено на рис. 12.1.

Приклад 2. $y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Розв'язання. 1. Область визначення функції $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \le 1 \Rightarrow -1 \le \frac{1-x^2}{1+x^2} \le 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-x^2-\left(1+x^2\right)}{1+x^2} \le 0 \\ \dfrac{1-x^2+\left(1+x^2\right)}{1+x^2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x^2 \le 0 \\ 2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\infty;+\infty\right).$$

Область значення функції $x \in [0;\pi]$.

2. Точки перегину з осями координат:

$$x = 0 \Rightarrow y = arccos\frac{1-0^2}{1-0^2} = arccos\,1 = 0.$$

Графік функції проходить через початок координат.

3. Дослідимо функцію на парність, непарність:

$y(-x) = arccos\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = y(x)$ – функція парна, і її графік є симетричним відносно осі $0y$.

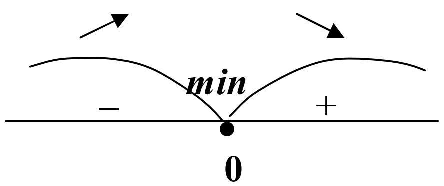
4. Функція неперіодична.

5. Знайдемо інтервали монотонності функції і її екстремуми, якщо вони є.

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{\left(1-x^2\right)'\cdot\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{-2x\left(1+x^2\right)-2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}}{\sqrt{\dfrac{\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}}} = -\frac{-4x\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{4x}{2|x|\left(1+x^2\right)} = \frac{2}{1+x^2}\,sign\,x.$$



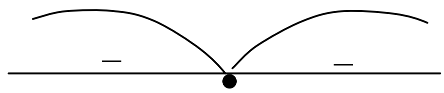
Похідна не існує при $x = 0$.

Отже, функція спадає для $x \in (-\infty;0)$, зростає для $x \in (0;+\infty)$ і має мінімум у точці $O(0;0)$, оскільки $y(0) = arccos\dfrac{1-0^2}{1+0^2} = 0$.

6. Дослідимо функцію на опуклість, угнутість та точки перегину. Для цього знайдемо похідну другого порядку:

$$y'' = \left(\frac{2sign\, x}{1+x^2}\right)' = -\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} sign\, x = -\frac{4|x|}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0$. Визначимо, які знаки має y'' для $x < 0$ і $x > 0$:



Дістали, що $y'' < 0$ для $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, тобто функція опукла на всій числовій осі.

7. Знайдемо асимптоти функції, якщо вони є.

Оскільки, область визначення функції $x \in (-\infty;+\infty)$, то вертикальних асимптот немає.

Похилі асимптоти: $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}{x} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = \left\{\begin{matrix}\textit{маємо добуток нескінченної малої функції на}\\ \textit{обмежену, що, як відомо, дорівнює нулю}\end{matrix}\right\} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - k\,x\right) = \lim_{x\to\infty} arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} arccos\frac{\dfrac{1}{x^2}-1}{\dfrac{1}{x^2}+1} = arccos(-1) = \pi.$$

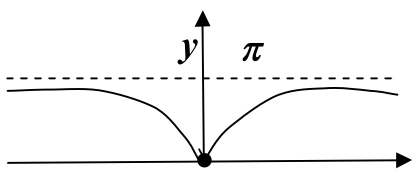


Рис. 12.2

Отже, отримали горизонтальну асимптоту $y = \pi$. Графік функції наведено на рис. 12.2.

Приклад 3. $y = \dfrac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$.

Розв'язання. 1. Область визначення функції: $\sin x \neq 0$, $x \neq n\pi$, $n \in z$.

2. Знайдемо точки перегину з осями координат: при $x = 0$ функція не існує; при $y = 0$ маємо $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = n\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in z$.

3. Дослідимо функцію на парність, непарність:

$$y(-x) = \frac{\sin\left(-x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin(-x)} = \frac{-\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{-\sin x} = \frac{\sin\left(x + \pi/4\right)}{\sin x} = \begin{matrix} \neq y(x) \\ \neq y(-x) \end{matrix},$$ тобто ця функція загального вигляду.

4. Дослідимо функцію на періодичність:

$$y(x + 2\pi) = \frac{\sin\left((x + 2\pi) - \pi/4\right)}{\sin(x + 2\pi)} = \frac{\sin\left(x - \pi/4\right)}{\sin x} = y(x)$$ – функція періодична з періодом 2π. Це означає, що її можна розглянути на проміжку $[-\pi;\pi]$.

5. Знайдемо похідну y' цієї функції та дослідимо функцію на екстремум і інтервали монотонності:

$$y' = \left(\frac{\sin\left(x - \pi/4\right)}{\sin x}\right)' = \frac{\left(\sin\left(x - \pi/4\right)\right)' \cdot \sin x - \sin\left(x - \pi/4\right) \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

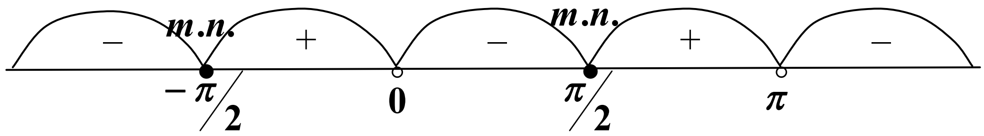
$$= \frac{\cos\left(x - \pi/4\right) \cdot \sin x - \sin\left(x - \pi/4\right) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin\left(x - \pi/4 - x\right)}{\sin^2 x} = \frac{\sin \pi/4}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin^2 x}.$$

Видно, що $y' > 0$ на будь-якому інтервалі $(n\pi;(n+1)\pi)$, $n \in z$, тоді за достатньою умовою монотонності вона зростаюча на цих інтервалах. Екстремумів функція не має.

6. Дослідимо функцію на опуклість і угнутість та точки перегину, якщо такі є. Для цього обчислимо другу похідну функції:

$$y''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x)^{-2}\right)' = -\frac{2}{\sqrt{2}}(\sin x)^{-3} \cdot \cos x = -\sqrt{2}\,\frac{\cos x}{\sin^3 x}.$$

$y''=0 \Rightarrow cos\,x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$; y'' не існує коли $sin\,x=0$, тобто $x=n\pi$. Дослідимо знаки y'' на отриманих інтервалах:



Отже маємо: для x $\left(n\pi;\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)$ функція опукла, для $x\in\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2};(n+1)\pi\right)$ – функція угнута, а точки $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$;

$$y=\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}=\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)}{(-1)^n}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^n}{(-1)^n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ – точки перегину,

у точках $x=n\pi$, хоча y'' і змінює знак, перегину не буде, тому що функція у цих точках невизначена.

7. Асимптоти графіка функції.

Вертикальні: дослідимо поведінку функції на проміжку $[-\pi;\pi]$, оскільки функція періодична з періодом 2π, і знайдемо її границі при $x\to 0$; $x\to\pm\pi$:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{sin\left(x-\pi/4\right)}{sin\,x}=+\infty; \qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{sin\left(x-\pi/4\right)}{sin\,x}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -\pi+0}\frac{sin\left(x-\pi/4\right)}{sin\,x}=-\infty; \qquad \lim_{x\to \pi-0}\frac{sin\left(x-\pi/4\right)}{sin\,x}=+\infty.$$

Отже, прямі $x=n\pi$, $n\in z$ – вертикальні асимптоти.

Горизонтальних і ***похилих*** асимптот немає, оскільки тригонометричні функції не мають границь при $x\to\infty$. Графік функції наведено на рис. 12.3.

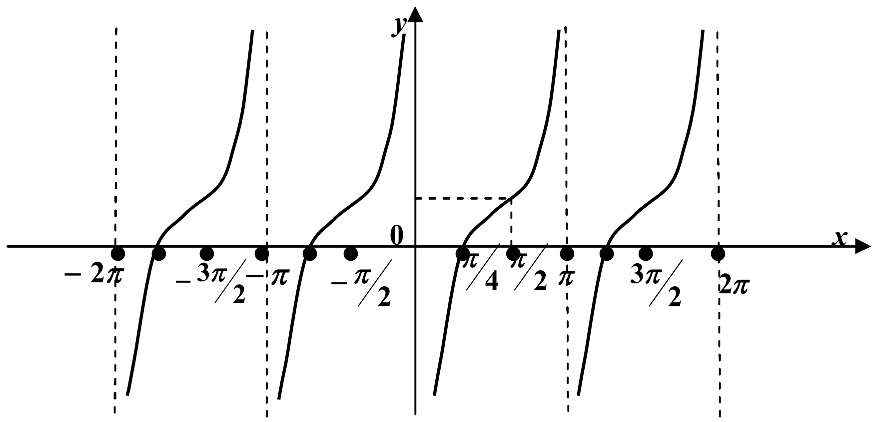


Рис. 12.3

Приклад 4. $y=\frac{e^{-x}}{1-x}$.

Розв'язання. 1. Область визначення функції: $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Точки перетину з осями координат:

$$x=0\Rightarrow y-\frac{e^{0}}{1-0}=1;$$

$$y=0\Rightarrow \frac{e^{-x}}{1-x}=0$$ – розв'язків немає.

Отже, отримали точку $M_1(0;1)$.

3. Дослідимо функцію на парність, непарність:

$$y(-x)=\frac{e^{x}}{1+x}\begin{matrix}\neq y(x)\\ \neq y(-x)\end{matrix}$$ – функція загального вигляду.

4. Функція неперіодична.

5. Знайдемо інтервали монотонності функції та екстремуми:

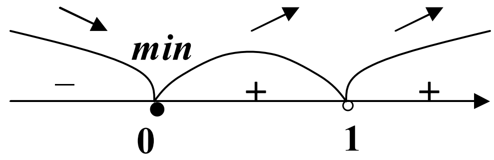
$$y'=\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)'=\frac{e(-x)'(1-x)-e^{-x}(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{-e^{-x}(1-x)-e^{-x}(-1)}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{e^{x}(-1+x+1)}{(1-x)^2}=\frac{x e^{-x}}{(1-x)^2};$$

$y'=0\Rightarrow x=0$;

y' не існує $\Rightarrow x=1$, отже отримали 2 критичні точки.

Дослідимо знаки першої похідної функції на відповідних інтервалах:



$$y_{min}=y(0)=\frac{e^0}{1-0}=1.$$

Отже, функція спадає для $x\in(-\infty;0)$; зростає для $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$ і має мінімум у точці $M_1(0;1)$.

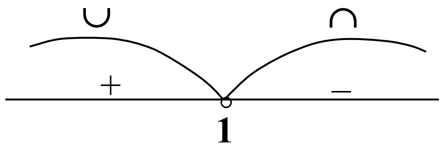
6. Знайдемо інтервали угнутості та опуклості функції і точки перегину, якщо вони є.

$$y''=\left(\frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}\right)'=\frac{\left((x)'\cdot e^{-x}+x\left(e^{-x}\right)'\right)(1-x)^2-xe^{-x}\left((1-x)^2\right)'}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)(1-x)^2-xe^{-x}\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=\frac{e^{-x}(1-x)^3+2xe^{-x}(1-x)}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{e^{-x}\left[(1-x)^2+2x\right]}{(1-x)^3}=\frac{e^{-x}\left(1-2x+x^2+2x\right)}{(1-x)^3}=\frac{e^{-x}\left(1+x^2\right)}{(1-x)^3}.$$

Критична точка другого роду – $x=1$, в якій y'' не існує. Дослідимо знаки y'':



Отримали функцію, яка угнута для $x\in(-\infty;1)$ та опукла для $x\in(1;+\infty)$; точка з абсцисою $x=1$ не є точкою перегину, оскільки в цій точці функція невизначена.

7. Знайдемо асимптоти функції.

Вертикальні: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=-\infty$.

Отже, $x=1$ – вертикальна асимптота.

Похилі: $y=kx+b$, де $k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}}{x(1-x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x(1-x)e^x}=0$;

$$b_1=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1-x)e^x}=0.$$

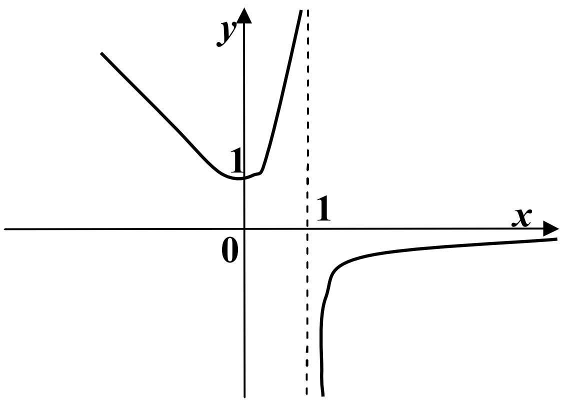


Рис. 12.4

Отже, $y=0$ – горизонтальна асимптота.

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x(1-x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \{\textit{За правилом Лопіталя}\} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{1-2x} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \{\textit{За правилом Лопіталя}\} =$$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{-2} = -\infty$. Отже, інших асимптот немає. Графік функції наведено на рис. 12.4.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити функції методами диференційного числення та побудувати їх графіки:

1. $y = ln\left(x^2+1\right)$;
2. $y = x - ln(x+1)$;
3. $y = x^2 - 2\,ln\,x$;
4. $y = \dfrac{x}{2} - arctg\,x$;
5. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;
6. $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навч. посібник. – К.: А.С.К. 2005. – 648 с.
3. Калашников В.И. Введение в численные методы: Учебное пособие – Харьков: НТУ «ХПН», 2002 – 132 с.
4. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення – 3-тє вид., випр. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 608 с.
6. Чуднов К.У., Дісковський О.А., Мельник О.А. Числові методи: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2013. – 83 с.

Додаток 1

Таблиця похідних

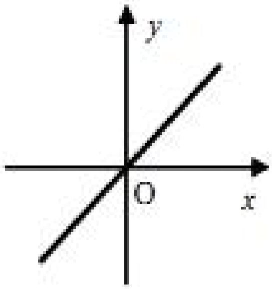
№ З/П	ФУНКЦІЯ	ПОХІДНА
1	$y = C$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = Cu$	$y' = Cu'$
4	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
5	$y = uv$	$y' = u'v + v'u$
6	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
7	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
7А)	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$
7Б)	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
8	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
9	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
10	$y = tg\, u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
11	$y = ctg\, u$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
12	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$y = arctg\, u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
15	$y = arcctg\, u$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
16	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$

16A)	$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
17	$y = a^u$	$y' = a^u \ln a \cdot u'$
17A)	$y = e^u$	$y' = e^u u'$

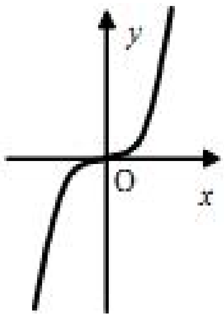
Додаток 2

ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

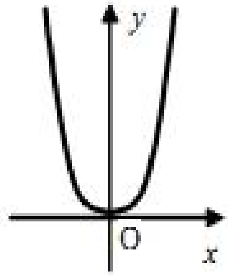
Алгебраїчні функції



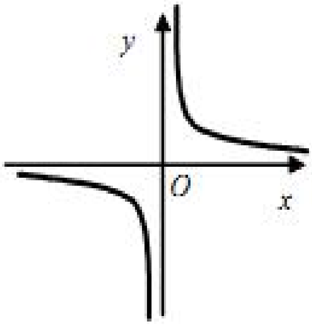
$y = x$



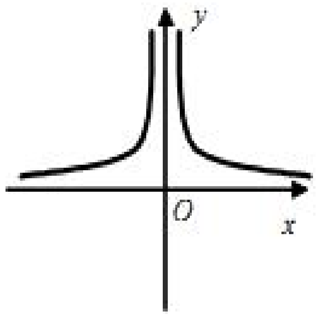
$y = x^3, \; y = x^{2n+1}$



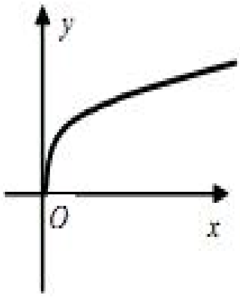
$y = x^2, \; y = x^{2n}$



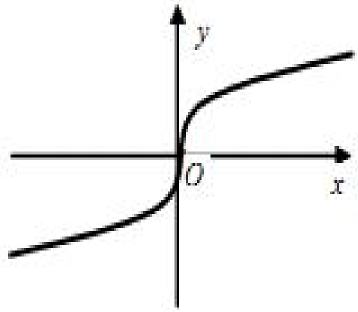
$y = \dfrac{1}{x}, \; y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$



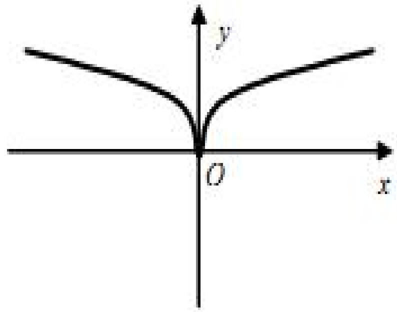
$y = \dfrac{1}{x^2}, \; y = \dfrac{1}{x^{2n}}$



$y = \sqrt{x}, \; y = \sqrt[2n]{x}$



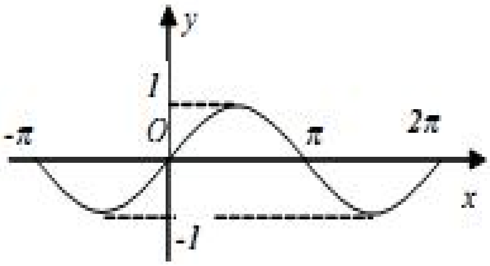
$y = \sqrt[3]{x}, \; y = \sqrt[2n+1]{x}$



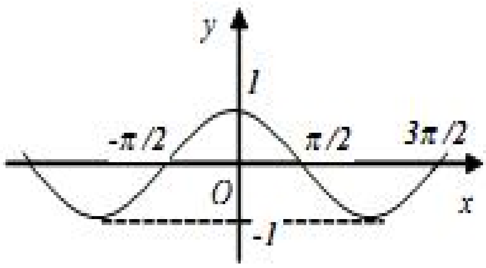
$y^3 = x^2, \; y^{2n+1} = x^{2m}$

$(2n + 1 > 2m)$

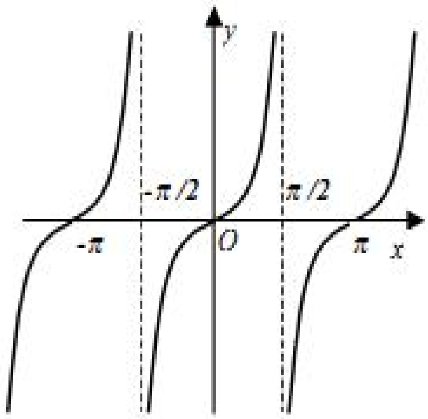
Трансцендентні функції



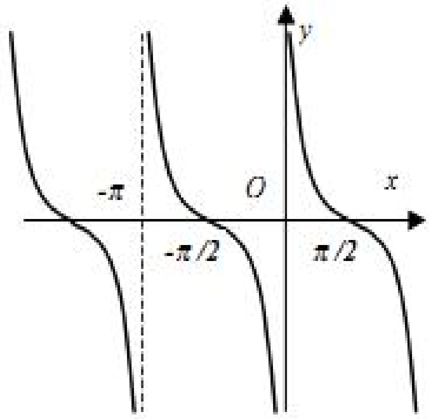
y = sin x



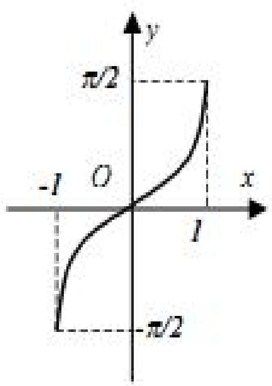
y = cos x



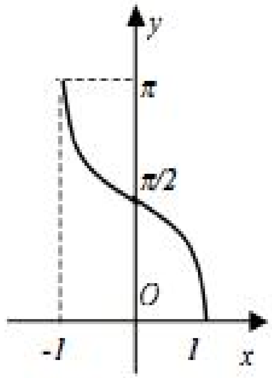
y = tgx



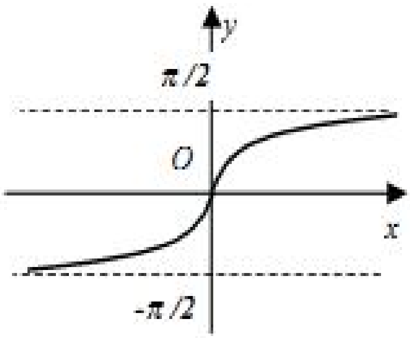
y = ctgx



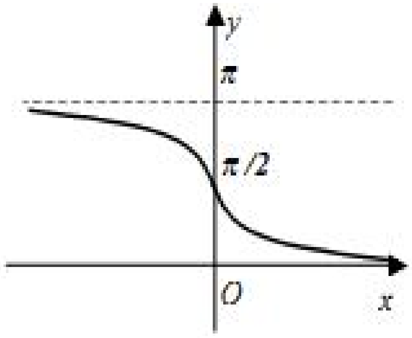
y = arcsin x



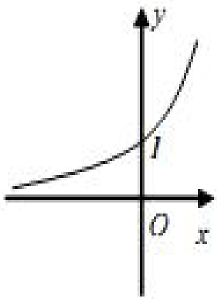
y = arccos x



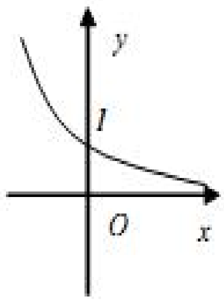
$y = arctgx$



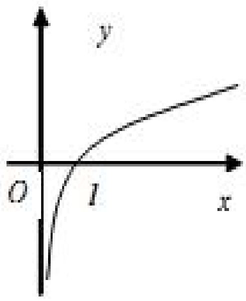
$y = arcctgx$



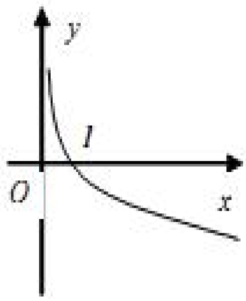
$y = a^x,\ a > 1$



$y = a^x,\ 0 < a < 1$



$y = log_a\ x, a > 1$



$y = log_a\ x, 0 < a < 1$

Додаток 3

ЗРАЗКИ БІЛЕТІВ МОДУЛІВ

ЗАЛІКОВИЙ МОДУЛЬ № 3
Тема: «Похідні та диференціали вищих порядків. Наближені методи розв'язання рівнянь»

БІЛЕТ № 1

1. $y = 3x^5 - \lg 7x + cos\frac{3\pi}{4}$. Знайти y' . ***(1 бал)***

2. $y = 3x^5 - \lg 7x + cos\frac{3\pi}{4}$. Знайти y'' . ***(1 бал)***

3. $y = \ln\left(x^2 + 4x\right)$. Знайти y' . ***(1 бал)***

4. $y = \ln\left(x^2 + 4x\right)$. Знайти y'' . ***(1 бал)***

5. Визначити dy для функції $y = 5x^3 - 2\sqrt[4]{x} + \frac{2}{x^7} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \sqrt[7]{8}$. ***(1 бал)***

6. Знайти d^2y для функції $y = 5x^3 - 2\sqrt[4]{x} + \frac{2}{x^7} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \sqrt[7]{8}$. ***(1 бал)***

7. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = 3x^2 + 2x - 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$. ***(1 бал)***

8. Обчислити за допомогою логарифмічного диференціювання похідну функції $y = \frac{(x+1)^4}{5^{x+3}\sqrt[3]{2x-1}}$. ***(2 бали)***

9. Відділити дійсні корені рівняння $x^3 + 6x + 3 = 0$. ***(1 бал)***

10. Уточнити значення дійсних коренів рівняння $x^3 + 6x + 3 = 0$ з точністю до 0,01 методом хорд. ***(2 бали)***

ЗАЛІКОВИЙ МОДУЛЬ № 4
Тема: «Дослідження функцій. Побудова графіків»

БІЛЕТ № 1

1. Обчислити за правилом Лопіталя границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{e^{3x}-\cos 2x}$. ***(1 бал)***

2. Дослідити функцію $y = x\cos^4 x + x^5$ на парність. ***(1 бал)***

3. Знайти область визначення функції $y=\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^2-7x-8}}$. ***(1 бал)***

4. Дослідити на монотонність функцію $y=-3x^4-8x^3-1$. ***(1 бал)***

5. Знайти екстремум функції $y=\dfrac{4x^2+1}{3x-2}$. ***(1 бал)***

6. Дослідити функцію $y=x^4+2x^3-12x^2+5x$ на опуклість та знайти точки перегину. ***(1 бал)***

7. Навести достатню умову існування перегину. ***(1 бал)***

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x^5-\dfrac{5}{3}x^3+2$ на відрізку $[0;2]$. ***(1 бал)***

9. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{x}{5}+\dfrac{3}{x}$. ***(2 бали)***

10. Обчислити за правилом Лопіталя границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)ctgx$. ***(2 бали)***

Навчальне видання

Павленко Анатолій Васильович
Щербина Ірина Володимирівна
Пасічник Ірина Володимирівна
Бас Тетяна Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Тем. план 2015, поз. 120

Підписано до друку 08.06.2015. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 6,06. Умов. друк. арк. 5,97. Тираж 100 пр. Замовлення № 104

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ