МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

А.В. ПАВЛЕНКО, О.Є. ЗАПОРОЖЧЕНКО,
А.Г. МОНЯ, І.В. ПАСІЧНИК, О.А. ДИСКОВСЬКИЙ

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина VI. Випадкові величини

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 30.01.2012

Дніпропетровськ НМетАУ 2012

УДК 517(07)
Вища математика в прикладах та задачах. Частина VI. Випадкові величини: Навч. посібник /Укл.: А.В. Павленко, О.Є.Запорожченко, А.Г.Моня та ін. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 41 с.

Наведені докладні рекомендації до вивчення дисципліни «Вища математика», а саме, розділу «Теорія ймовірностей». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями та ілюстраціями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання.

Іл. 3. Бібліогр.: 12 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)
Ю.Я. Годес, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ЗМІСТ

ВСТУП

Відомо, що в основу сучасного промислового виробництва покладено масове виготовлення стандартних виробів із строго визначеними властивостями. До таких галузей, без сумніву, відноситься металургія. Проведення контролю якості одержаних виробів за допомогою серії випробувань пов’язано з дослідженням або кількісною оцінкою явищ, що формуються в результаті одночасного впливу багатьох чинників, перебіг яких неможливо передбачити. Теорія ймовірностей – це математична наука, що вивчає об’єктивні закономірності масових випадкових явищ. Вона, як і будь-яка інша наука, виникла з практичної життєвої необхідності і є, на наш погляд, найбільш «експериментальною» з усіх математичних наук.

Мовою *теорії експерименту* є, безумовно, мова математичної статистики – математичної науки, що вивчає методи збору та обробки результатів спостережень випадкових явищ для визначення їхніх закономірностей і характеристик.

Математична статистика, що опирається у своєму апараті на теорію ймовірностей, виникла і розвивалась паралельно з останньою. Предмет дослідження цих наук – випадкові явища або, як правило, випадкові величини – кількісні ознаки явищ. Водночас вихідні положення кожної науки істотно відрізняються. Так в теорії ймовірностей імовірнісна модель явища є відомою, і мова йде про прогнозування на її основі поводження цього явища в експерименті. На відміну від цього в математичній статистиці вихідними є дані спостережень досліджуваного явища, а кінцевим результатом – побудова його імовірнісної моделі.

Теорія ймовірностей та математична статистика є методологічною основою таких нових наукових напрямків, як теорія випадкових процесів, економетричне моделювання, теорія планування експерименту, які інтенсивно розвиваються у останні десятиріччя. В цих дисциплінах, якщо абстрагуватися від конкретних прикладів, розглядаються теоретичні моделі, застосовані до будь-яких масових явищ у природі, суспільстві і техніці. В той же час знання загальних законів дає змогу зробити висновки про закономірності, що мають місце у кожному конкретному випадку. Уміння передбачати хід виробничого процесу або досліду, в яких присутні елементи випадковості, дає змогу впливати на його результати. Отже, опанування законів теорії ймовірностей та статистичних методів у наш час необхідне для кожного фахівця.

На жаль, названі розділи вищої математики у відповідний базовий курс для бакалаврів входять в дуже обмеженому обсязі. Автори посібника ставили за мету організацію позааудиторної самостійної роботи студентів з теорії ймовірностей та надання їм допомоги в організації самостійної роботи з дисципліни. Посібник написаний відповідно до програм дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для студентів інженерних спеціальностей, зокрема для студентів, які навчаються за професійним спрямуванням «Металургія» у вищих навчальних закладах.

Основне завдання посібника – допомогти студентам денної та заочної форм навчання опанувати цей достатньо складний матеріал, отримати навички з розв'язування типових задач та застосування основних ідей та методів теорії ймовірностей та математичної статистики для розв'язування професійних задач.

Посібник охоплює необхідний матеріал дисципліни і містить 10 тем. Він є шостою частиною навчального посібника «Вища математика в прикладах та задачах». У ньому розглядаються випадкові події та операції над ними, елементи комбінаторики, означення ймовірності, основні теореми теорії ймовірностей та їх наслідки (частина «Випадкові події»), випадкові величини та їх розподіли (частина «Випадкові величини»).

Структура кожної теми має єдину схему: надання теоретичного матеріалу, приклади розв'язання типових задач, завдання для самостійної роботи. Деякі з прикладів мають професійну спрямованість, що змінює представлення студентів молодших курсів про майбутню професію, розкриває її як наукоємну область, яка потребує володіння ймовірносно-статистичним апаратом. Розв'язання типових задач розраховане на використання їх при проведенні практичних занять в аудиторії, при виконанні індивідуальних домашніх завдань та контрольних робіт студентами заочної форми навчання. Відзначимо, що частина прикладів розв'язана за допомогою пакетів Mathcad та Excel. У кінці посібника наведені додатки і список рекомендованої літератури для самостійного вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей».

Автори щиро бажають успіхів студентам при вивченні навчального матеріалу і будуть вдячні усім, хто в тій чи іншій формі висловить свою думку стосовно змісту посібника та зауваження і пропозиції щодо його удосконалення.

6. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

6.1. Поняття випадкової величини. Приклади. Види випадкових величин

Поняття випадкової величини є одним з основних понять у теорії ймовірностей. Це обумовлено тим, що досить часто виявляється корисним приписувати різним результатам експеременту деякі числа. Наприклад, ми могли б вибрати 20 студентів з потоку в 100 студентів та перевіряти їх на знання англійської мови. Тут з результатом експеременту можна було б пов'язати кількість студентів, які англійською мовою володіють. Ця величина є випадковою, бо її значення заздалегідь невідоме і таке, що залежить від випадкових обставин. Можливі значення величини: $\mathbf{0,1,2,...,20}$.

Випадковою величиною $\boldsymbol{X}$ називається функція, що задана на множині елементарних випадкових подій, яка набуває значення наперед невідомого, проте завжди можна оцінити ймовірність попадання цього значення у наперед заданий проміжок.

Приведемо ще приклади випадкових величин:

1. число випадінь герба при трьох киданнях монети (можливі значення $\mathbf{0,1,2,3}$);
2. кількість пострілів до першого влучення у ціль (можливі значення $\mathbf{1,2,3,...,}\boldsymbol{n}\mathbf{,...}$);
3. час безвідказної роботи будь-якого пристрою (можливі значення розташовані на деякому інтервалі $\mathbf{0} < \boldsymbol{t} < \boldsymbol{T}$);
4. відстань, що пролетить снаряд (можливі значення розташовані у інтервалі $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$).

У прикладі 1 випадкова величина набуває скінчену множину значень, у прикладі 2 - зчисленну множину значень (нескінченну множину, елементи якої можна занумеровати). Такі випадкові величини називаються дискретними.

Дискретною випадковою величиною називають величину, можливі значення якої можна занумеровати. Кількість можливих значень дискретної випадкової величини скінчена або нескінчена.

У прикладах 3 і 4 розглянуті випадкові події, можливі значення яких набувають будь-які значення з інтервалу. Такі величини називаються неперервними. Кількість можливих значень нескінчена.

6.2. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Законом розподілу будь-якої дискретної величини називається співвідношення, що визначає залежність між значеннями випадкової величини та ймовірностями, з якими ці значення набуваються. Закон розподілу можна задати у вигляді таблиці, аналітично (у вигляді формули) та графічно.

Найчастіше закон розподілу дискретної випадкової величини подають у вигляді таблиці розподілу або ряда розподілу. У першому рядку таблиці записуються можливі значення $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$, а у другому рядку відповідні ймовірності $p_1, p_2, p_3, ..., p_n, ...$. Зазначимо, що з теореми додавання ймовірностей для попарно несумісних подій випливає, що завжди $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Ряд розподілу може бути зображений графічно, для чого у прямокутній системі координат будують точки (x_i, p_i), $i = 1,2,3,...$, а потім з'єднують ці точки відрізками прямих. Ця ломана називається многокутником або полігоном розподілу ймовірностей.

У ряді випадків замість ймовірності того, що випадкова величина приймає деяке певне значення x, необхідно знати ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення менше за x.

Функцією розподілу (інтегральною функцією) випадкової величини X називають функцію, значення якої визначається як ймовірність того, що X прийме значення, менше за x: $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$.

Геометрично $F(x)$ є ймовірність попадання точки X ліворуч від точки x на числовій прямій. Для дискретної випадкової величини $F(x)$ дорівнює сталій на кожному інтервалі (x_{i-1}, x_i) та має стрибок p_i у точці x_i.

Функції розподілу усіх випадкових величин мають загальні властивості:

1. $0 \le F(x) \le 1$, для будь-якого $x \in R$;
2. $F(x)$ є неспадною функцією;
3. $F(x)$ неперервна зліва;

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

5. $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$.

Зразки розв'язування задач

1. У грошовій лотереї розігрується один виграш в 10 грн., десять виграшів по 5 грн. і 30 виграшів по 1 грн. при загальному числі білетів 100. Знайти закон розподілу випадкової величини X - вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білета у вигляді таблиці. Побудувати полігон розподілу. Знайти функцію розподілу, та побудувати її графік. Визначити ймовірність того, що X набуває значень: а) не більше за 1; б) від 1 до 4.

Розв'язання. Множина можливих значень для X складається з таких чисел: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5,\ x_4 = 10$.

Відповідні ймовірності: $p_2 = \frac{30}{100} = 0{,}3,\ p_3 = \frac{10}{100} = 0{,}1,\ p_4 = \frac{1}{100} = 0{,}01,$ $p_1 = 1 - (p_2 + p_3 + p_4) = 1 - (0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}01) = 0{,}59$. Отже, шуканий закон розподілу можна записати у вигляді такої таблиці:

x	**0**	**1**	**5**	**10**
p	**0,59**	**0,3**	**0,1**	**0,01**

Побудуємо полігон розподілу.

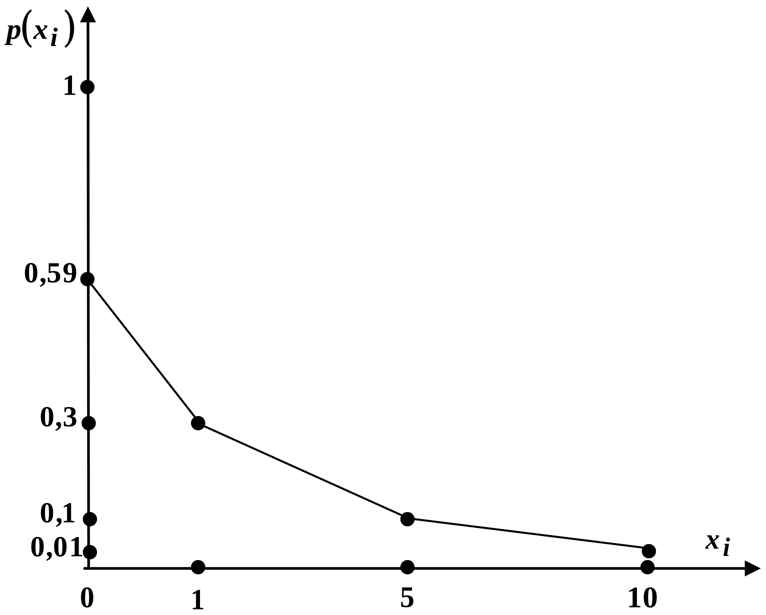


Рис. 6.1

Щоб побудувати $F(x)$, послідовно будемо розглядувати:

$x \le 0$, $F(x) = P(X < x) = 0$, тому що X не приймає значень, менших $x_1 = 0$;

$0 < x \le 1$, $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = p_1 = 0{,}59$;

$1 < x \le 5$, $F(x) = P(X < x) = P(x = 0) + P(X = 1) = p_1 + p_2 = 0{,}59 + 0{,}3 = 0{,}89$;

$5 < x \le 10$, $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 5) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}59 + 0{,}3 +$
$+ 0{,}1 = 0{,}99$;

$x > 10$, $F(x) = 1$.

Отже, функція розділу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}59, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}89, & 1 < x \le 5 \\ 0{,}99, & 5 < x \le 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}.$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рисунку 6.2.

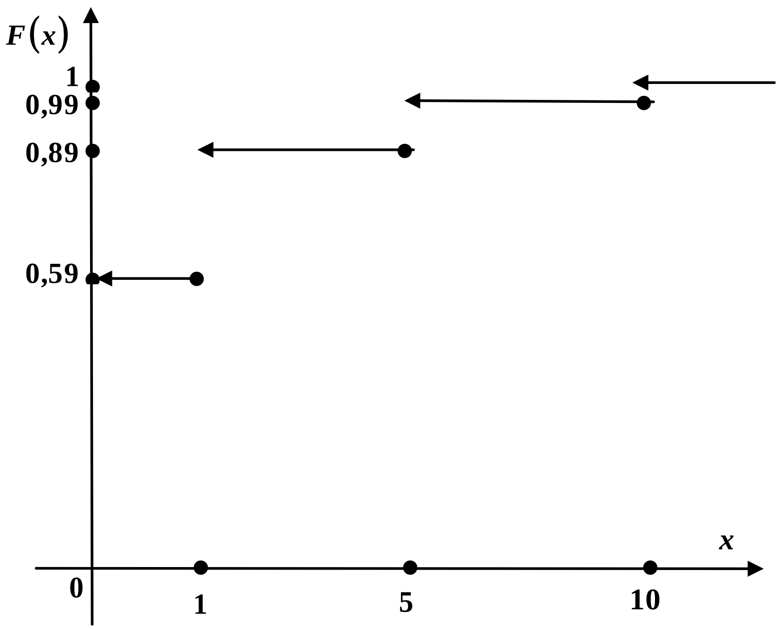


Рис. 6.2

Обчислимо ймовірності: а) $P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}89$;

б) $P(1 \le X \le 4) = P(X = 1) = 0{,}3$.

6.3. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину. Між тим, при розв'язанні великої кількості задач зручніше користуватися числовими характеристиками випадкової величини, що дають достатню інформацію про цю величину. Основні з числових характеристик це – математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини $\boldsymbol{X}$ називають суму добутків всіх її можливих значень $\boldsymbol{x_i}$ на їх ймовірності $\boldsymbol{p_i}$

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,.$$

Математичне сподівання характеризує середнє значення, біля якого зосереджені всі можливі значення випадкової величини. Перелічимо основні властивості математичного сподівання:

1. $M(C) = C$, де C - будь-яка стала;
2. $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, де X, Y - незалежні випадкові величини.

Другою важливою числовою характеристикою випадкової величини є дисперсія. Це поняття вводиться для характеристики відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Зауважимо, що для такої характеристики не підходить математичне сподівання цього відхилення, оскільки $M[X - M(X)] = 0$ (випливає із властивостей математичного сподівання). Тому характеристикою відхилення прийнято рахувати $M[X - M(X)]^2$.

Дисперсією $\boldsymbol{D(x)}$ випадкової величини $\boldsymbol{X}$ називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання: $D(X) = M[X - M(X)]^2$.

Можливо довести, що справджується таке твердження: дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

З цього твердження випливає, що для дискретної випадкової величини дисперсія розраховується за формулою

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 .$$

Дисперсія випадкової величини має такі властивості:

1. $D(C)=0$, де C - будь-яка стала;

2. $D(C \cdot X)=C^2 \cdot D(X)$;

3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$, де X,Y - незалежні випадкові величини.

Розмірність дисперсії не співпадає з розмірністю випадкової величини (тому, що розглядається квадрат відхилення). Щоб розмірності співпадали, вводять ще одну числову характеристику – середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називається квадратичний корінь з її дисперсії: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Зразки розв'язування задач

1. Дискретна випадкова величина задана таблицею:

X	-2	0	1	3	4
P	0,15	0,2	0,1	0,3	p_5

Обчислити ймовірність $p_5=P(X=4)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Оскільки в законі розподілу $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$, то $p_5 = 1-(0,15+0,2+0,1+0,3)=1-0,75=0,25$.

Обчислимо математичне сподівання:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i = -2\cdot 0,15+0\cdot 0,2+1\cdot 0,1+3\cdot 0,3+4\cdot 0,25=1,7 .$$

Щоб знайти дисперсію за формулою $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$, запишемо закон розподілу випадкової величини X^2:

X^2	4	0	1	9	16
P	0,15	0,2	0,1	0,3	0,25

Отже, $M(X^2)=\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot p_i = 4\cdot 0,15+0\cdot 0,2+1\cdot 0,1+9\cdot 0,3+16\cdot 0,25=7,4$.

Тоді маємо: $D(X)=7{,}4-(1{,}7)^2=7.4-2{,}89=4{,}51$, а звідси $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{4{,}51}\approx 2{,}12$.

2. Дискретна випадкова величина приймає тільки два можливих значення x_1, x_2, причому $x_2>x_1$. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо $p_1=0{,}8$, $M(X)=3{,}2$, $D(X)=0{,}16$.

Розв'язання. Оскільки $p_1+p_2=1$, то $p_2=1-p_1=1-0{,}8=0{,}2$. Користуючись формулами для математичного сподівання та дисперсії, отримаємо систему для знаходження невідомих можливих значень x_1, x_2.

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2=x_1\cdot 0{,}8+x_2\cdot 0{,}2=3{,}2.$$

$$D(X)=x_1^2p_1+x_2^2p_2-[M(X)]^2=x_1^2\cdot 0{,}8+x_2^2\cdot 0{,}2-[3{,}2]^2=0{,}16.$$

$$\begin{cases}0{,}8x_1+0{,}2x_2=3{,}2\\ 0{,}8x_1^2+0{,}2x_2^2-10{,}24-0{,}16=0.\end{cases}$$

Помножимо обидва рівняння на 5, щоб отримати систему з цілими коефіцієнтами

$$\begin{cases}4x_1+x_2=16\\ 4x_1^2+x_2^2-52=0.\end{cases}$$

З першого рівняння $x_2=6-4x_1$, тоді друге рівняння приймає вигляд

$$4x_1^2+(16-4x_1)^2-52=0$$

$$4x_1^2+256-128x_1+16x_1^2-52=0$$

$$20x_1^2-128x_1+204=0$$

Поділивши на 4, дістанемо $5x_1^2-32x_1+51=0$.

$$x_1^{(1,2)}=\frac{32\pm 2}{10},\quad x_1^{(1)}=3{,}4,\quad x_2^{(1)}=16-4\cdot 3{,}4=2{,}4.$$

$$x_1^{(2)}=3,\quad x_2^{(2)}=16-4\cdot 3=4.$$

Оскільки $x_2>x_1$, маємо такий закон розподілу

X	3	4
P	0,8	0,2

3. Знайти дисперсію середнього арифметичного n однаково розподілених незалежних випадкових величин, якщо дисперсія кожної з них дорівнює d.

Розв'язання. Розглянемо $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ - середнє арифметичне n незалежних випадкових величин. Користуючись властивостями дисперсії, отримаємо

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(X_1 + X_2 + ... + X_n) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n d = \frac{d}{n}.$$

4. Пристрій складається з двох незалежно працюючих приладів. Ймовірності відказу приладів $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}4$. Знайти закон розподілу, сподівання та дисперсію числа приладів, що відказали.

Розв'язання. Запишемо закон розподілу випадкової величини X - числа приладів, що відказали. Очевидно, що можливі значення X є $0,1,2$.

Обчислимо їх ймовірності:

$$P(X = 0) = q_1 \cdot q_2 = (1 - p_1)(1 - p_2) = (1 - 0{,}3)(1 - 0{,}4) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42.$$

$$P(X = 1) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}18 + 0{,}28 = 0{,}46.$$

$$P(X = 2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12.$$

Тоді закон розподілу X:

X	0	1	2
P	0,42	0,46	0,12

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}42 + 1 \cdot 0{,}46 + 2 \cdot 0{,}12 = 0{,}7,$$

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}42 + 1^2 \cdot 0{,}46 + 2^2 \cdot 0{,}12 - [0{,}7]^2 = 0{,}45.$$

Треба зауважити, що $M(X)$, $D(X)$ можна було б обчислити й без складання закону розподілу X, а тільки користуючись властивостями $M(X)$, $D(X)$. Очевидно, що $X = X_1 + X_2$, де X_1 - число відказів першого приладу, X_2 - число відказів другого приладу .

Їх закони розподілу:

X_1	0	1
P	0,7	0,3

X_2	0	1
P	0,6	0,4

$M(X_1) = 0 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$; $\quad M(X_2) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$.

Тоді $M(X) = M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$.

$D(X_1) = 0^2 \cdot 0{,}7 + 1^2 \cdot 0{,}3 - (0{,}3)^2 = 0{,}21$;

$D(X_2) = 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}4 - (0{,}4)^2 = 0{,}24$;

$D(X) = D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) = 0{,}21 + 0{,}24 = 0{,}45$.

6.4. Деякі закони розподілу дискретних випадкових величин та їх числові характеристики

6.4.1. Біномний розподіл

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність події A дорівнює p. Розглянемо випадкову величину X, яка визначає число появ події A (число успіхів) у цій серії випробувань. Очевидно, що X може набувати значень $0,1,2,\ldots,k,\ldots,n$, ймовірність яких обчислюють за формулою Бернуллі:

$$p_k = p(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \ \ k = 0,1,\ldots,n, q = 1 - p.$$

У цьому випадку випадкова величина має біномний розподіл ймовірностей, або розподіл Бернуллі.

Функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, & m - 1 < x \le m, \quad m = 1,2,\ldots n \\ 1, & x > n \end{cases}$$

Числові характеристики біномного розподілу $M(x) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

6.4.2. Розподіл Пуассона

Якщо число випробувань n велике, а ймовірність p досить мала $(p \le 0{,}01)$, ймовірність $p_k = p(X = k)$ можна обчислити за формулою Пуассона

$$p_k \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\text{, де } \lambda = np,\ k = 0,1,2,\dots .$$

Цей закон розподілу називають розподілом Пуассона або розподілом рідкісних подій. Функція розподілу випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, & n-1 < x \le n, \quad n = 1,2,3,\dots \end{cases}$$

Числові характеристики закону Пуассона $M(X) = D(X) = \lambda$.

6.4.3. Рівномірний дискретний розподіл

Якщо дискретна випадкова величина набуває кожного свого значення x_k, $k = 1,2,\dots,n$ з однаковою ймовірністю $p_k = \frac{1}{n}$, то маємо дискретний рівномірний розподіл ймовірностей. Функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ \frac{m-1}{n}, & x_{m-1} < x \le x_m, \quad m = 1,2,3,\dots,n \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$

6.4.4. Геометричний розподіл

Дискретна випадкова величина X має геометричний розподіл ймовірностей, яка вона приймає значення $1,2,3,\dots,k,\dots$ з ймовірностями $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$.

Функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p \cdot q^{k-1} = p\frac{1-q^{n-1}}{1-q}, & n-1 < x \le n \end{cases}$$

Числові характеристики геометричного розподілу $M(X)=\frac{1}{p}$, $D(X)=\frac{q}{p^2}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{q}}{p}$.

Зразки розв'язування задач

1. Нехай випадкова величина X - число хлопчиків у сім'ї з трьома дітьми. Записати закон розподілу X, обчислити числові характеристики.

Розв'язання. Очевидно, що X набуває значень $0,1,2,3$, ймовірності яких обчислюються за формулою Бернуллі $(p=q=0{,}5)$:

$$P(X=0)=C_3^0\cdot(0{,}5)^0\cdot(0{,}5)^3=\frac{3!}{0!3!}\cdot 0{,}125=0{,}125,$$

$$P(X=1)=C_3^1\cdot(0{,}5)^1\cdot(0{,}5)^2=\frac{3!}{1!2!}\cdot(0{,}5)^3=0{,}375,$$

$$P(X=2)=C_3^2\cdot(0{,}5)^2\cdot 0{,}5=\frac{3!}{2!1!}\cdot(0{,}5)^3=0{,}375,$$

$$P(X=3)=C_3^3\cdot(0{,}5)^3\cdot(0{,}5)^0=\frac{3!}{3!0!}\cdot(0{,}5)^3=0{,}125.$$

Отже, розподіл випадкової величини є біномним:

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Числові характеристики:

$M(X)=n\cdot p=3\cdot 0{,}5=1{,}5$;

$D(X)=npq=3\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}75$;

$\sigma(X)=\sqrt{0{,}75}\approx 0{,}87$.

2. При проведенні дослідження хімічного складу сталі ймовірності того, що у випадково взятій пробі відсоток вуглецю перевищуватиме допустимий рівень, дорівнює $p=0{,}01$. Обчислити, користуючись законом розподілу Пуассона, скільки в середньому необхідно дослідити зразків, щоб з ймовірністю $p=0{,}95$ цей ефект спостерігався хоча б один раз.

Розв'язання. A - ефект спостерігався хоча б один раз,

$\overline{A}$ - ефект взагалі не спостерігався.

$$P(A)=1-P(\overline{A}),\quad P(\overline{A})=P(X=0)=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}$$, де $\lambda=np=0{,}01\cdot n$.

Тоді $P(A)=1-e^{-\lambda}=1-e^{-0{,}01\cdot n}=0{,}95$.

Звідси $e^{-0{,}01*n}=1-0{,}95=0{,}05$,

$$e^{0{,}01\cdot n}=20,\quad 0{,}01\cdot n=ln20\approx 3,\quad n=300.$$

За розподілом Пуассона $M(X)=D(X)=\lambda=3$.

3. У прибиральниці є зв'язка з чотирьох ключів, серед яких лише один відчиняє двері офісу. У темряві вона намагається потратити до офісу. Скласти закон розподілу числа спроб при відчиненні дверей, якщо прибиральниця: а) відкладає випробуваний ключ; б) повертає його у зв'язку. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення .

Розв'язання. а) Нехай X - випадкова величина, що визначає число спроб при відчиненні дверей. Оскільки у зв'язці 4 ключі, то X може набувати значень $1,2,3,4$. Якщо перший взятий ключ відчинить двері, то $X=1$, $P(X)=\frac{1}{4}$. Якщо перший ключ не підходить (таких ключів є три з чотирьох), то його відкладають. Якщо при цьому другий ключ підходить, то число спроб дорівнює двом. У цьому випадку $P(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$.

Аналогічно дістанемо: $P(X=3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. $P(X=4)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{4}$.

Отже, закон розподілу має вигляд:

X^2	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Ця величина X має рівномірний дискретний розподіл.

$$M(X)=\frac{1}{4}(1+2+3+4)=\frac{10}{4}=2{,}5,$$

$$D(X)=\frac{1}{4}\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)-(2{,}5)^2=7{,}5-6{,}25=1{,}25,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1{,}25}\approx 1{,}12.$$

б) Нехай випробуванні ключі повертаються у зв'язку. Тоді кожну спробу відчинити двері можна розглядати як незалежне випробування, в якому ймовірність успіху $p=\frac{1}{4}$, а ймовірність невдачі $q=\frac{3}{4}$.

Очевидно, $P(X=1)=p=\frac{1}{4}$, $P(X=2)=q\cdot p=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$

$$P(X=3)=q^2\cdot p=\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4},...$$

$$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p=\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{4},....$$

Отже, закон розподілу величини X у цьому випадку є геометричним:

X	1	2	3	...	k	...
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	...	$\frac{3^{k-1}}{4^k}$	...

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)}=4,$$

$$D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{3\cdot 16}{4}=12,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{12}\approx 3,46.$$

Завдання для самостійної роботи

1. У вазі лежать 5 куль, з них 3 червоних та 2 білі. Навмання вибирають 2 кулі. Знайти закон розподілу випадкової величини X - числа червоних куль серед узятих двох. Побудувати полігон розподілу. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

2. Гральна кістка кинута 3 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини X - числа появ одиниці у вигляді таблиці та аналітично.

3. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини X :

X	-1	0	1	5
P	0,3	0,1	0,2	p_4

Обчислити ймовірність $p_4 = P(X = 5)$. Визначити ймовірність того, що випадкова величина X набуває значень: а) не більших за 1; б) від 1 до 4. Записати функцію розподілу $F(x)$ для даної випадкової величини та побудувати її графік.

4. Дискретна випадкова величина задана:

X	-3	-1	0	2
P	p_1	0,4	0,3	0,1

Обчислити ймовірність $p_1 = P(X = -3)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

5. Дискретна випадкова величина набуває два значення x_1, x_2; $x_2 > x_1$. Знайти закон розподілу випадкової величини, якщо $p_1 = 0{,}9$; $M(X) = 3{,}1$; $D(X) = 0{,}09$.

6. Зроблено чотири постріли з ймовірностями влучень у ціль $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}4$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}7$. Знайти математичне сподівання та дисперсію загального числа влучень, користуючись властивостями суми цих числових характеристик.

7. Обчислити математичне сподівання та дисперсію числа виграшних лотерейних білетів, якщо придбали 20 білетів, причому ймовірність виграшу по одному білету дорівнює 0,3.

8. Середнє квадратичне відхилення кожної з 16 однаково розподілених незалежних випадкових величин дорівнює 10. Знайти середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного цих величин.

9. Симетричну монету підкидують вісім разів підряд. Знайти закон розподілу випадкової величини X - числа випадінь цифри. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

10. Для хижака ймовірність вдалого полювання дорівнює 0,4. Знайти середнє число спійманих жертв при 20 зіткненнях.

11. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,01. зроблено 900 пострілів. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення числа влучень у ціль.

12. Завод відправив на базу 5000 доброякісних виробів. Ймовірність того, що при перевезенні вироб зазнає пошкодження дорівнює 0,0002. Знайти середнє число пошкоджених виробів, що прибудуть на завод.

13. У коробці є 4 чорні і 1 біла куля. Скласти закон розподілу числа виймань куль до появи білої кулі у двох випадках: а) після виймання кулю не повертають у коробку; б) повертають до коробки. Обчислити числові характеристики випадкових величин.

14. Знайти середнє число помилок на сторінці рукопису, якщо ймовірність того, що сторінка містить хоча б одну помилку, дорівнює 0,95 (число помилок розподілено за законом Пуассона).

7. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

7.1. Інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини, її властивості

Випадкову величину називають ***неперервною***, якщо множина її можливих значень є проміжком, скінченим чи нескінченим. Задати неперервну випадкову величину таблично неможливо, тому застосовуються аналітичний та графічний способи.

Інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини $F(x) = P(X < x)$ є неперервною, диференційовною майже скрізь, за винятком можливо окремих ізольованих точок. До властивостей інтегральної функції, що були перелічені вище, приєднуються ще деякі властивості, а саме:

1. Ймовірність того, що неперервна величина X набуває якого-небудь значення x_1, дорівнює нулю: $P(X = x_1) = 0$.

2. Для неперервної випадкової величини X при будь-яких a й b, $a < b$, справджуються рівності:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

7.2. Щільність розподілу неперервної випадкової величини

Оскільки інтегральна функція неперервної величини є диференційовною функцією, можна розглядати її похідну, яку позначають $f(x)$ і називають ***щільністю розподілу неперервної величини***:

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

Графік $f(x)$ називається кривою розподілу. Щільність розподілу має такі властивості:

1. $f(x)\geq 0$ для будь-якого $x\in R$;

2. Ймовірність того, що неперервна величина прийме значення з інтервалу (a,b): $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$;

3. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $x\in R$;

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$.

Зразки розв'язування задач

1. Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ ax^2, & 0<x\leq 2\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Обчислити значення параметра a, щільність $f(x)$ та ймовірність того, що випадкова величина набуває значень з інтервалу $\left(0,\frac{2}{3}\right)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

Розв'язання. Знайдемо $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ 2ax, & 0<x\leq 2\\ 0, & x>2.\end{cases}$

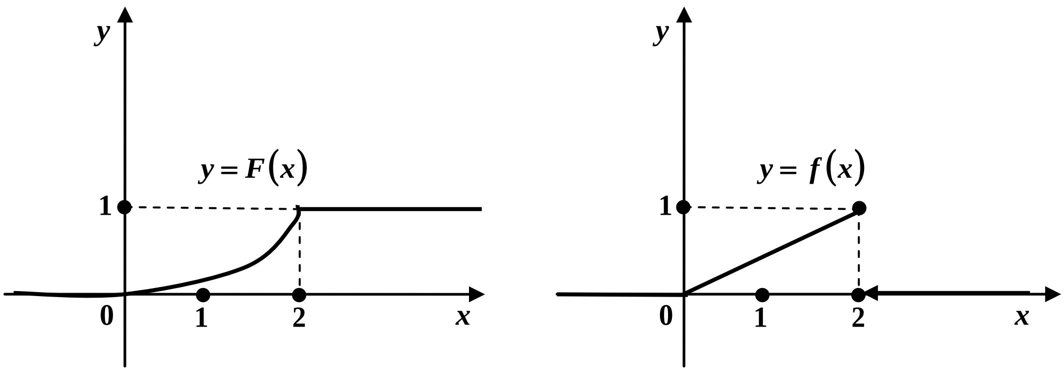
Значення параметра a обчислимо, користуючись властивістю $f(x)$: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{2} 2axdx + \int\limits_{2}^{+\infty} 0dx = 2a\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 4a = 1.$$

Звідки $a = \dfrac{1}{4}$.

Отже, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ або } x > 2 \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2. \end{cases}$

Графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$:



$$P\left(0 < X < \frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\right) - F(0) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} - 0 = \frac{1}{9}.$$

2. Задано щільність розподілу випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \text{ або } x > 3 \\ x - \dfrac{3}{4}, & -1 < x \le 3. \end{cases}$$

Визначити функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання. Розглянемо $x \le -1$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Якщо $-1 < x \le 3$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{x}\left(t - \frac{3}{4}\right)dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3t}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{x} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{4}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{4} - \frac{5}{4}.$$

При $x > 3$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)dt + \int_{3}^{x} 0dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3t}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= \left(\frac{3^2}{2} - \frac{9}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = 4 - 3 = 1.$$

Отже, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{4} - \dfrac{5}{4}, & -1 < x \le 3 \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

3. Щільність розподілу випадкової величини X задано функцією $f(x) = \dfrac{a}{1 + x^2}$. Визначити значення параметра a та знайти ймовірність того, що $X \in [-1,1]$.

Розв'язання. Знайдемо a, користуючись тим, що $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1 + t^2}dt = a\left(\lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dt}{1 + t^2} + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} \frac{dt}{1 + t^2}\right) =$$

$$= a\left(\lim_{\alpha \to -\infty} arctg\, t\Big|_{\alpha}^{0} + \lim_{\beta \to +\infty} arctg\, t\Big|_{0}^{\beta}\right) = a\left(\lim_{\alpha \to -\infty}(arctg 0 - arctg\, \alpha) +\right.$$

$$\left.+ \lim_{\beta \to +\infty}(arctg\, \beta - arctg 0)\right) = a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = a\pi = 1.$$

Звідки $a = \dfrac{1}{\pi}$.

Тоді $P(-1 \le X \le 1) = \int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\pi(1 + x^2)} = \dfrac{1}{\pi} arctg\, x\Big|_{-1}^{1} = \dfrac{1}{\pi}(arctg 1 - arctg(-1)) =$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}.$$

7.3. Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичне сподівання неперервної випадкової величини із щільністю $f(x)$ обчислюється за формулою

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

(за умови абсолютної збіжності вказаного невласного інтеграла).

Дисперсія неперервної величини – це, як і раніше, математичне сподівання величини $(X-M(x))^2$.

Отже, $D(X)=M(X-M(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx=$

$$=M(X)^2-M^2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-M^2(X).$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Усі властивості числових характеристик неперервних випадкових величин співпадають з властивостями числових характеристик дискретних величин.

Зразки розв'язування задач

1. Задано функцію розподілу випадкової величини

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Визначити числові характеристики цієї величини. Знайти ймовірність попадання X в інтервалі $(1,3)$.

Розв'язання. Знайдемо щільність розподілу

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ або } x > 2 \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Тоді $M(X) = \int\limits_0^2 x \cdot \dfrac{x}{2} dx = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$,

$$D(X) = \int\limits_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - 1\frac{7}{9} = 2 - 1\frac{7}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}47.$$

$$P(1 < X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1^2}{4} = \frac{3}{4}.$$

2. Задано щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ або } x > \pi \\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Знайти числові характеристики величини та ймовірність попадання в інтервал $\left(\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Розв'язання. Обчислимо математичне сподівання:

$$M(X) = \int\limits_0^\pi x \cdot \frac{\sin x}{2} dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \sin x dx; & V = -\cos x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(-x \cdot \cos x\Big|_0^\pi - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^\pi -\cos x\, dx \right) = \frac{1}{2}\left(-\pi \cos \pi + \sin x\Big|_0^\pi\right) = \frac{\pi}{2} \approx \frac{3{,}14}{2} \approx 1{,}57.$$

$$D(X) = \int\limits_0^\pi x^2 \cdot \frac{\sin x}{2} dx - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \begin{vmatrix} u = \dfrac{x^2}{2}; & du = xdx \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{x^2}{2} \cdot \cos x\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi -\cos x \cdot x dx - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{2} \cdot (-1) + \int\limits_0^\pi x \cos x dx - \frac{\pi^2}{4} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos x dx; & V = \sin x \end{vmatrix} = \frac{\pi^2}{4} + x \cdot \sin x\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} + \cos x\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx \frac{(3{,}14)^2}{4} - 2 \approx 0{,}46.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}68.$$

$$P\left(\frac{\pi}{2} < X < 2\pi\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{2}dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0dx = -\frac{\cos x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= -\frac{\cos \pi}{2} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

7.4. Деякі закони розподілу неперервних випадкових величин та їх числові характеристики

7.4.1. Рівномірний розподіл

Неперервна випадкова величина має рівномірний розподіл на проміжку $[a,b]$, якщо щільність розподілу є стала величина на цьому проміжку і дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \text{ або } x > b \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \end{cases}$$

де a, b - параметри розподілу.

Інтегральна функція розподілу має вигляд $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b. \end{cases}$

Числові характеристики рівномірного розподілу:

$$M(X) = \frac{a+b}{2},\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma(X) = \frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}.$$

Ймовірність попадання в інтервал (α, β) дорівнює:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

7.4.2. Показниковий розподіл

Неперервна випадкова величина має показниковий розподіл, якщо її щільність розподілу ймовірностей дорівнює

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\end{cases}$$

де $\lambda>0$ - параметр.

Інтегральна функція розподілу має вигляд $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$

Показниковий закон має наступні числові характеристики:

$M(X)=\frac{1}{\lambda}$, $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$.

Цей закон застосовується в багатьох задачах теорії масового обслуговування, наприклад, в задачах про час безвідмовної роботи пристроїв.

7.4.3. Нормальний розподіл (розподіл Гаусса)

Неперервна випадкова величина має нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу дорівнює $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де $a,\sigma>0$ - параметри.

Графік функції $f(x)$ називається кривою нормального розподілу.

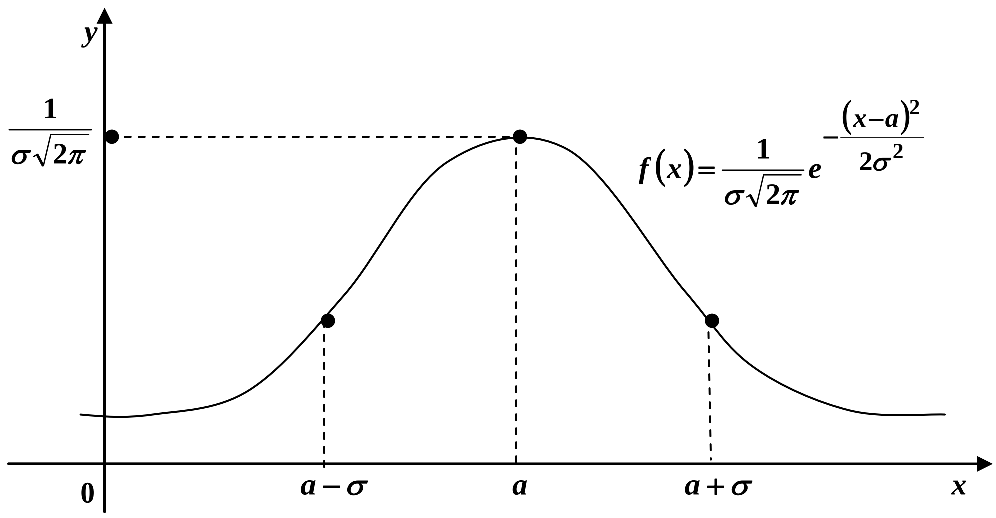


Рис. 7.1

Нормальна крива симетрична відносно прямої $x=a$, має максимум при $x=a$, що дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. У точках $x_1=a-\sigma$, $x_2=a+\sigma$ крива має перегини. При $x\to\pm\infty$ крива наближається до вісі $0x$. Якщо σ зростає, максимум зменшується, інтервал $(a-\sigma, a+\sigma)$ збільшується, крива стає більш розтягнутою вздовж $0x$.

Інтегральна функція нормального розподілу має вигляд

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Числові характеристики нормального розподілу:

$M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$, $\sigma(X)=\sigma$.

Отже, параметр a є математичне сподівання, а σ - середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини.

Ймовірність попадання в інтервал (α,β) дорівнює

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функція Лапласа, значення якої містяться у таблиці.

Досить часто треба обчислити ймовірність того, що нормально розподілена величина X відхилиться від свого математичного сподівання a на величину менш ніж ε, а саме

$$P(|x-a|<\varepsilon)=P(a-\varepsilon<X<a+\varepsilon)=\Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Якщо в цій формулі покласти $\varepsilon=\sigma t$, здобудемо $P(|x-a|<\sigma t)=2\Phi(t)$.

Розглянув різні значення t, отримаємо:

при $t=1$ $\quad P(|x-a|<\sigma)=2\Phi(1)\approx 0{,}6837$;

при $t=2$ $\quad P(|x-a|<2\sigma)=2\Phi(2)\approx 0{,}9545$;

при $t=3$ $\quad P(|x-a|<3\sigma)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973$.

В останньому рівнянні ймовірність дуже близька до одиниці, тому подія $|x-a|<3\sigma$ є майже вірогідною. Звідси випливає «правило 3σ», згідно з яким практично всі значення нормально розподіленої випадкової величини знаходяться в інтервалі $(a-3\sigma, a+3\sigma)$. Це правило часто використовується в математичній статистиці.

Розглянутий нормальний закон відіграє в теорії ймовірностей важливу роль. Це пояснюється тим, що при деяких припущеннях розподіл суми великого числа випадкових величин виявляється близьким до нормального розподілу.

Зразки розв'язування задач

1. Значення рівномірно розподіленої випадкової величини належать проміжку $[2,8]$. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ та ймовірність попадання у проміжок $[3,5]$.

Розв'язання. Оскільки параметри розподілу $a=2$, $b=8$, то

$$M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{2+8}{2}=5;$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(8-2)^2}{12}=\frac{36}{12}=3;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{3}\approx 1{,}73;$$

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}\text{, тому}$$

$$P(3\le X\le 5)=\frac{5-3}{8-2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

2. Хвилинна стрілка електронного годинника переміщується стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більш ніж на 20 секунд.

Розв'язання. Різницю між дійсним часом та часом на годиннику можна вважати випадковою величиною X, що рівномірно розподілена у інтервалі протягом $b-a=60$ сек. Щільність розподілу $f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{60}$.

Тоді $P(0 \le X \le 20) = \int\limits_0^{20} f(x)dx = \int\limits_0^{20} \frac{1}{60}dx = \frac{x}{60}\Big|_0^{20} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

3. Час безвідмовної роботи приладу – випадкова величина X, що задана щільністю розподілу ймовірностей $f(t) = 0{,}08e^{-0{,}08t}, t > 0$. Знайти: а) середній час безвідмовної роботи приладу; б) ймовірність безвідмовної роботи приладу протягом 4 годин; в) ймовірність відмови приладу в інтервалі часу $(4{,}20)$ годин.

Розв'язання. а) Середній час безвідмовної роботи приладу є математичним сподіванням величини X. З вигляду щільності розподілу ймовірностей випливає, що X розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda = 0{,}08$. Отже, $M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}08} = 12{,}5$ год.

б) Ймовірність безвідмовної роботи приладу знайдемо за формулою

$$P(X \ge t) = 1 - P(X < t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}.$$

При $\lambda = 0{,}08$, $t = 4$ маємо $P(X \ge 4) = e^{-0{,}08 \cdot 4} = e^{-0{,}32} \approx 0{,}726$.

в) Щоб знайти ймовірність відмови приладу в інтервалі часу $(4{,}20)$, знайдемо спочатку ймовірність протилежної події, того, що прилад працює безвідмовно $P(4 < X < 20) = F(20) - F(4) = e^{-0{,}32} - e^{-1{,}6} \approx 0{,}524$.

Тоді ймовірність відмови приладу в цьому інтервалі $P = 1 - P(4 < X < 20) = 1 - 0{,}524 = 0{,}476$.

4. Середній час безвідмовної роботи приладу складає 750 годин. Яка ймовірність того, що прилад безперервно пропрацює не менш ніж 1000 годин?

Розв'язання. Час безвідмовної роботи приладу є випадкова величина T, що розподілена за показниковим законом $F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$, де $\lambda -$ параметр розподілу, а саме число відмов за одиницю часу.

Середній час безвідмовної роботи приладу – це математичне сподівання випадкової величини. З тексту задачі $M(X) = 750$ год. Оскільки $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ для показникового розподілу, то $\lambda = \frac{1}{M(X)} = \frac{1}{750}$.

Обчислимо $P(T \geq 1000) = 1 - P(T < 1000) = 1 - F(1000) =$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1000}{750}}\right) = e^{-\frac{4}{3}} \approx 0{,}274.$$

5. Випадкова величина розподілена нормально з параметрами $a = 5$, $\sigma = 2$. Знайти: а) ймовірність попадання X в інтервал $(4{,}7)$; б) ймовірність того, що X прийме значення більше 10; в) інтервал такий, що ймовірність $P(|X - a| < \varepsilon) = 0{,}95$; г) ймовірність того, що $|X - a| < 0{,}1$; д) ймовірність того, що три навмання узятих можливих значення мають модуль відхилення від математичного сподівання не більш ніж 3; є) ймовірність того, що у чотирьох незалежних випробуваннях X хоча б один раз прийме значення з інтервалу $(4{,}7)$; ж) сформулювати «правило 3σ» для цієї випадкової величини.

Розв'язання. а) За формулою $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ маємо $P(4 < X < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(1) + \Phi(0{,}5) =$ $= 0{,}3413 + 0{,}1915 = 0{,}5328$.

б) $P(10 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{10-5}{2}\right) = 0{,}5 - 0{,}4938 = 0{,}0062$.

в) За формулою $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$ маємо $P(|X - 5| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) =$ $= 0{,}95$, звідки $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0{,}475$, $\frac{\varepsilon}{2} = 1{,}96$, $\varepsilon = 3{,}92$.

Тоді $|X - 5| < 3{,}92$; $\quad -3{,}92 < X - 5 < 3{,}92$, $\quad 1{,}08 < X < 8{,}92$.

г) Обчислимо ймовірність попадання X в інтервал $|X - 5| \leq 3$ при одному випробуванні $P(|X - 5| \leq 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}8664$. Якщо розглянути 3 можливих значення, то ймовірність буде $(0{,}8664)^3 = 0{,}6504$.

є) Вище була знайдена ймовірність попадання в інтервал $(4{,}7)$ при одному випробуванні, вона дорівнює $0{,}5328$. Ймовірність того, що X не прийме значення з цього інтервалу при одному випробуванні, дорівнює

$(1-0{,}5328)=0{,}4672$, а при чотирьох випробуваннях $(0{,}4672)^4=0{,}0476$. Звідки ймовірність, яку ми розшукуємо, дорівнює $(1-0{,}0476)=0{,}9524$.

ж) Згідно з «правилом 3σ» майже вірогідно, що X здобуде значення з інтервалу $(a-3\sigma,\ \ a+3\sigma)=(5-3\cdot 2;\ \ 5+3\cdot 2)=(-1{,}11)$.

6. Фірма, що займається продажем товарів за каталогом, щомісячно отримує поштою замовлення. Число цих замовлень є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням 560. У 90% випадків число щомісячних замовлень перевищує 12439. Знайти середнє число замовлень, що отримуються фірмою за місяць.

Розв'язання. Середнє число замовлень є математичним сподіванням випадкової величини a . За формулою $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ маємо

$$P(12439<X<+\infty)=\Phi(+\infty)-\Phi\left(\frac{12439-a}{560}\right)=0{,}9;$$

$$0{,}5-\Phi\left(\frac{12439-a}{560}\right)=0{,}9;$$

$$\Phi\left(\frac{a-12439}{560}\right)=0{,}4.$$

Із таблиці $\dfrac{a-12439}{560}=1{,}282$, тоді $a=13157$.

7. За статистичними даними річний дохід населення міста N має нормальний розподіл із середнім значенням 3 тис. грн. та середнім квадратичним відхиленням 1 тис. грн. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний житель міста має дохід: а) від 2,5 до 4 тис. грн.; б) менше 6 тис. грн.

Розв'язання. а) $a=3, \sigma=1$.

За формулою $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ маємо

$$P(2{,}5<X<4)=\Phi\left(\frac{4-3}{1}\right)-\Phi\left(\frac{2{,}5-3}{1}\right)=\Phi(1)-\Phi(-0{,}5)=\Phi(1)+\Phi(0{,}5)=$$

$= \mathbf{0{,}3413 + 0{,}1915 = 0{,}5328}$.

б) За правилом трьох сигм дістанемо $\boldsymbol{P(0 < X < 6) = P(|X - 3| < 3) =}$ $\boldsymbol{= P(|X - a| < 3\sigma) \approx 0{,}9973}$, тобто практично вірогідним є те, що дохід жителя менше 6 тис. грн.

Завдання для самостійної роботи

1. Неперервну випадкову величину задано функцією розподілу:

$$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ a(1 - \cos x), & 0 < x \le \pi \\ 1, & x > \pi. \end{cases}}$$

Обчислити значення параметра $\boldsymbol{a}$, щільність розподілу ймовірностей $\boldsymbol{f(x)}$ та ймовірність того, що випадкова величина набуває значень з інтервалу $\boldsymbol{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)}$. Побудувати графіки функцій $\boldsymbol{F(x)}$ і $\boldsymbol{f(x)}$.

2. Задано щільність розподілу випадкової величини $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ або } x > 3 \\ \dfrac{x^2}{9}, & 0 \le x \le 3. \end{cases}}$$

Визначити функцію розподілу $\boldsymbol{F(x)}$.

3. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $\boldsymbol{X}$ задано функцією

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a\,e^{-2x}, & x \ge 0. \end{cases}}$$

Визначити значення параметра $\boldsymbol{a}$ та знайти ймовірність попадання у проміжок $\boldsymbol{[0{,}1]}$.

4. Задано функцію розподілу випадкової величини:

$$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ (x - 3)^2, & 3 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4. \end{cases}}$$

Визначити числові характеристики цієї величини. Знайти ймовірність попадання $\boldsymbol{X}$ в інтервал $\boldsymbol{(3{,}5;4{,}5)}$.

5. Випадкова величина X задана щільністю розподілу ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{c}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|\le\dfrac{1}{2} \\ 0, & |x|>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(0<X<1)$.

6. Частота передавача імпульсної радіостанції розподілена за рівномірним законом на проміжку 8300 ± 30 МГц. Яка ймовірність того, що з п'яти його сигналів принаймні один буде виявлений станцією розвідки зі смугою пропускання приймача $8225-8285$ МГц.?

7. Дальність до цілі округляється до 10 м. Визначити середню квадратичну помилку округлення та ймовірність отримання помилки не більш ніж 5 м.

8. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 4e^{-4x}, & x\ge 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що у результаті випробування X попаде в інтервал $(0{,}2;0{,}5)$; математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

9. Час безвідмовної роботи елемента розподілено за показниковим законом $f(t)=0{,}02e^{-0{,}02t}\,(t\ge 0)$. Знайти ймовірність того, що елемент пропрацює безвідмовно 100 годин.

10. Добова витрата електроенергії в населеному пункті є випадковою величиною з нормальним розподілом, математичне сподівання якої дорівнює 2000 кВт/год, а дисперсія становить 2500 (кВт/год)^2. Оцінити ймовірність того, що найближчого дня витрата електроенергії в цьому населеному пункті буде від 1500 до 2500 кВт/год.

11. Випадкові помилки вимірювання розподілені за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=1$ мм і математичним сподіванням $a=0$. Знайти ймовірність того, що при двох незалежних вимірюваннях помилка хоча б одного з них не перевищуватиме за абсолютною величиною 1,28 мм.

12. Валики, що виготовляє автомат, будуть стандартними, якщо відхилення діаметра валика від проектного розміру не перевищує 2 мм. Випадкові відхилення діаметра валиків розподілені за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\boldsymbol{\sigma = 1{,}6}$ мм і математичним сподіванням $\boldsymbol{a = 0}$. Скільки відсотків стандартних валиків виготовляє автомат?

13. Випадкова величина розподілена нормально. Середнє квадратичне відхилення величини дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною буде менше 0,2.

14. Потяг складається з 50 вагонів. Маса кожного вагона – випадкова величина, розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 65 т. і середнім квадратичним відхиленням 1 т. Локомотив може вести потяг масою не більш, ніж 3300 т., інакше є потреба у другому локомотиві. Знайти ймовірність того, що не буде потреби у другому локомотиві.

ЛІТЕРАТУРА

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: Высшая школа, 2001.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.Теория вероятностей: Сборник задач. – М.: Наука, 2003.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 2002.
4. Вища математика: основні розділи: Підручник. У двох книгах. Книга 1/ За ред. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1995.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2002.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003.
7. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 2006.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.
9. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001.
10. Зайцев Е.П. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с индивидуальными заданиями и решениями типовых вариантов: Учебно-методическое пособие. – Кременчуг: Изд-во Кременчуг, 2008.
11. Овчинников П.Ф., Лисицин Б.М., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. Ч. 2. – К.: Техніка, 2004.
12. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова. М.: Наука, 2007.

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Навчальне видання

Павленко Анатолій Васильович
Запорожченко Олена Євгенівна
Моня Андрій Григорович
Пасічник Ірина Володимирівна
Дисковський Олександр Андрійович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина VI. Випадкові величини

Навчальний посібник

Тем. план 2012, поз. 319

Підписано до друку 11.07.2012 Формат 60x84 1/16 Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид.арк. 2,41. Умов. друк. арк. 2,38. Тираж 100 пр. Замовлення № .

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ – 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ