МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

І.В. ЩЕРБИНА,
І.В. ПАСІЧНИК, Т.П. БАС

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 2 від 11.05.2015

Дніпропетровськ НМетАУ 2015

УДК 517(07)
Вища математика. Частина 3: Навч. посібник / І.В.Щербина, І.В.Пасічник, Т.П.Бас. - Дніпропетровськ: НМетАУ, 2015. - с.

Наведені докладні теоретичні відомості до вивчення розділа «Невизначений інтеграл». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів напряму 6.050402 – ливарне виробництво.

Іл. 1 . Бібліогр.: 4 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, к.т.н., доцент.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (ДВНЗ НГУ)
А.В. Сясєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ЗМІСТ

ВСТУП

Оновлення програми для студентів напряму ”Ливарне виробництво”, і особливо, зменшення часів аудиторних занять передбачає новий підхід до викладання матеріалу з дисципліни ”Вища математика”.

Даний посібник дозволяє студентам не тільки отримати необхідну кількість інформації, але і поглибити та поширити знання, що були ними засвоєні на лекціях та практичних заняттях.

Посібник складено згідно з робочою програмою дисципліни, матеріал подається у звичній для студентів формі – спочатку теорія, а потім практичні завдання. Кожна частина посібника відповідає матеріалу дисципліни однієї чверті аудиторних занять, що робить посібник більш зручним у використанні.

Автори посібника сподіваються, що ця робота буде корисною для кожного студента.

ЛЕКЦІЯ 9. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ: ВИЗНАЧЕННЯ, ВЛАСТИВОСТІ, ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ

Із елементарної математики відомі взаємно обернені дії: додавання та віднімання, множення та ділення, піднесення до степеня та добування кореня, логарифмування та потенціювання. Такою ж парою взаємно обернених математичних операцій в математичному аналізі є диференціювання та інтегрування.

Інтегральне числення практично виникло із задач обчислення площ і об'ємів різних фігур і тіл. Вперше такі задачі намагались розв'язати вчені Стародавньої Греції (Евдокс Кнідський, Архимед та ін.). В XVI – XVII століттях інтенсивний промисловий розвиток в Європі привів до розвитку цього розділу математики та його застосування, праці вчених І. Кеплера, Б. Кавальєрі, П. Ферма, Е. Торрічеллі поглибили наявні теоретичні основи.

Заслуга відкриття диференціального та інтегрального числення як загального методу розв'язування різноманітних задач належить видатним вченим Ісааку Ньютону (1642 – 1727) та Готфриду Вільгельму Лейбніцу (1646 – 1716). Хоча Ньютон отримав більшість результатів у 60 – 70 роках XVII століття, однак першою була публікація Лейбніца (1664 р.). У цій роботі викладені основи диференціального числення, вводиться символіка (dx, dy), яка застосовується і тепер. В 1686 р. виходить у світ друга робота Лейбніца, в якій викладено основи інтегрального числення, зокрема введено символ $\int$. Донині формула Ньютона-Лейбніца, яка зв'язала невизначений і визначений інтеграли, є центральною формулою інтегрального числення.

Зазначимо, що сучасний виклад багатьох питань суттєво відрізняється від їх викладу часів Ньютона та Лейбніца. Головна проблема першовідкривачів полягала в тому, що в ключових поняттях (і, перш за все, в операції граничного переходу) на той час було дуже багато неясного. Відкриті нові методи були застосовані до аналізу змінних величин або за допомогою засобів геометрії, або аналітичними виразами, або як абстракції різних видів неперервного механічного руху (Ньютон). Лише через багато років, а саме в роботах видатного французького математика Огюстена Луї Коші (1789 – 1857), поняття границі функції (термін “функція” також вперше з’явився у Лейбніца у 1692 році) набуло того чіткого вигляду, яким ми користуємось сьогодні.

9.1. Первісна функція та невизначений інтеграл

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної $F'(x)$ або диференціала $dF(x)=F'(x)dx$ заданої функції $F(x)$. Одним із фізичних трактувань цієї задачі є визначення швидкості руху за функцією, яка задає пройдений шлях за певний час руху. З практичної точки зору природною є обернена задача, а саме, визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функцією часу. Отже, обернений процес – знаходження функції $F(x)$ за заданою похідною $F'(x)=f(x)$ або заданим диференціалом $dF(x)=f(x)dx$ – називають ***інтегруванням функції*** $f(x)$, а знайдену функцію $F(x)$ називають ***первісною***.

Частину математики, що вивчає цей процес та його застосування, називають ***інтегральним численням функції однієї змінної***.

Зауваження 9.1. Термін ***інтеграл*** походить від латинського слова ***integer*** – цілий. В широкому розумінні слово ***“інтегрування”*** означає ***об’єднання.***

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на деякому проміжку (a,b), якщо

$$F'(x)=f(x), \quad x\in(a,b). \tag{9.1}$$

Наприклад,

а) для $f(x)=2x$ первісною є $F(x)=x^2$, тому що $F'(x)=\left(x^2\right)'=$
$=2x=f(x)$;

б) для $f(x)=2\cos x$ первісною є $F(x)=2\sin x$, так як $F'(x)=(2\sin x)'=$
$=2\cos x=f(x)$.

Оскільки похідна сталої $C'=0$, то додавання до функції $F(x)$ будь-якого сталого доданку не порушує рівність (9.1):

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x).$$

Отже, разом з $F(x)=x^2$ для функції $f(x)=2x$ з прикладу а) первісними будуть функції $F_1(x)=x^2-2$, $F_2(x)=x^2+2$ та нескінченна множина інших функцій вигляду $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для функції $f(x)$ називають ***невизначеним інтегралом*** від цієї функції та позначають символом $\int f(x)dx$. Отже,

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \tag{9.2}$$

Знак $\int$ означає операцію інтегрування і називається ***знаком інтеграла***, вираз $f(x)dx$ називають ***підінтегральним виразом***, функцію $f(x)$ – ***підінтегральною***, зміну x – ***змінною інтегрування***. Процес знаходження невизначеного інтеграла називають ***інтегруванням***.

З погляду геометрії невизначений інтеграл – це сім'я кривих, кожна з яких утворюється зсувом однієї із них паралельно собі уздовж осі $0y$.

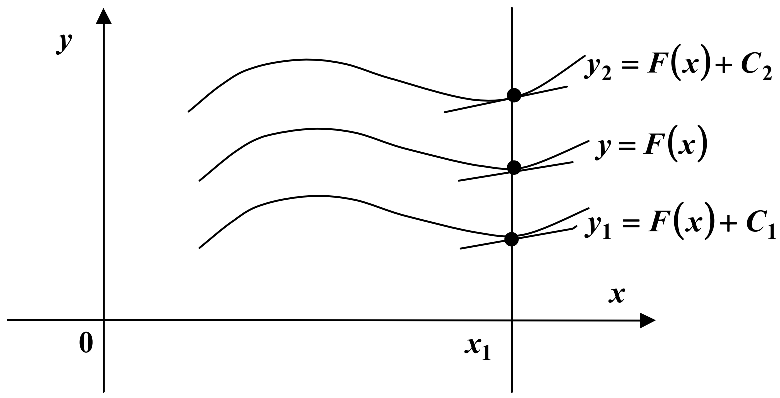

Рис. 9.1

<u>Теорема 9.1.</u> Якщо функція неперервна на деякому проміжку (a,b), то для неї існує первісна, отже і невизначений інтеграл.

9.2. Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x). \tag{9.3}$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx. \tag{9.4}$$

Дійсно, за означенням диференціала $d(F(x))=F'(x)dx$.

Отже, $d\left(\int f(x)dx\right)=d(F(x)+C)=d(F(x))=F'(x)dx=f(x)dx$.

3. Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C. \tag{9.5}$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int cf(x)dx=c\int f(x)dx, \quad (c=const). \tag{9.6}$$

Дійсно, $\left(\int cf(x)dx\right)'=cf(x)$ (за властивістю 1). Знайдемо похідну від правої частини (9.6):

$$\left(c\int f(x)dx\right)'=c\left(\int f(x)dx\right)'=cf(x).$$

Тобто обидві частини співвідношення (9.6) представляють собою множину первісних для однієї і тієї ж самої функції $f=f(x)$.

Аналогічно, диференціюванням лівої і правої частин рівності, доводяться властивості 5 і 6.

5.Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожної із цих функцій:

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx. \tag{9.7}$$

6. Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$ і $u=u(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du=F(u)+C. \tag{9.8}$$

Зокрема, при $u=kx+b$,

$\int f(kx+b)d(kx+b)=F(kx+b)+C$, або

$k\int f(kx+b)dx=F(kx+b)+C$.

Отже, якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C. \qquad (9.9)$$

9.3. Таблиця основних інтегралів

Частина формул таблиці інтегралів безпосередньо випливає з означення інтегрування як операції, що є оберненою до операції диференціювання, таблиці похідних і властивостей інтегралів.

Згідно з означенням невизначеного інтеграла та його властивістю 3 (формула (9.5)), якщо $dF(x) = f(x)dx$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$. Виведемо за допомогою цієї властивості деякі формули інтегрування. Інші виводяться аналогічно.

1) Інтегруючи формулу $d\,tg\,x = \dfrac{dx}{cos^2 x}$, одержимо $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$.

2) У випадку степеневої функції використовуємо формулу $dx^n = n \cdot x^{n-1}dx$. Якщо показник степеня дорівнює $n+1$ формула запишеться так: $dx^{n+1} = (n+1)x^n dx$. Інтегруючи цю рівність, одержимо $\int (n+1)x^n dx =$ $= (n+1)\int x^n dx = x^{n+1} + C_1$. І далі $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \dfrac{C_1}{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Внаслідок того, що $n+1$ величина стала, то і $\dfrac{C_1}{n+1}$ – теж довільна стала, яку прийнято записувати C. Отже, $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

3) Інтегруючи формулу $d\,arcsin\,x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, одержимо $\int d\,arcsin\,x =$ $= \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, або $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x + C$.

Використовуючи цю формулу, будемо мати $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \int \dfrac{dx}{\sqrt{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a}}} =$

$$= \int \frac{d\left(x \big/ \sqrt{a} \right)}{\sqrt{1 - x^2 \big/ a}} = arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + c \ .$$

Таблиця основних невизначених інтегралів

$\int f(x)dx = F(x) + C$	$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx+b) + C$
1. $\int dx = x + C$	
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ 4. $\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x \rvert + C$, $n = -1$	$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{kx+b}} = \frac{2}{k} \cdot \sqrt{kx+b} + C$ $\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} \cdot ln\lvert kx+b \rvert + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$ 6. $\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx}}{ln\, a} + C$, $(b = 0)$ $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C$
7. $\int sin\, xdx = -cos\, x + C$ 8. $\int cos\, xdx = sin\, x + C$ 9. $\int tg\, xdx = -\, ln\lvert cos\, x \rvert + C$ 10. $\int ctg\, xdx = ln\lvert sin\, x \rvert + C$ 11. $\int \frac{dx}{sin\, x} = ln\left\lvert tg \frac{x}{2} \right\rvert + C$ 12. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$ 13. $\int \frac{dx}{cos\, x} = ln\left\lvert tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\rvert + C$ 14. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$	$\int sin\, kxdx = -\frac{1}{k} \cdot cos\, kx + C$ $\int cos\, kxdx = \frac{1}{k} \cdot sin\, kx + C$ $\int tg\, kxdx = -\frac{1}{k} \cdot ln\lvert cos\, kx \rvert + C$ $\int ctg\, kxdx = \frac{1}{k} \cdot ln\lvert sin\, kx \rvert + C$ $\int \frac{dx}{sin\, kx} = \frac{1}{k} \cdot ln\left\lvert tg \frac{kx}{2} \right\rvert + C$ $\int \frac{dx}{sin^2 kx} = -\frac{1}{k} ctgkx + C$ $\int \frac{dx}{cos\, kx} = \frac{1}{k} \cdot ln\left\lvert tg\left(\frac{kx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\rvert + C$ $\int \frac{dx}{cos^2 kx} = \frac{1}{k} \cdot tg\, kx + C$

15. $\int \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} arctg \frac{x}{\sqrt{a}} + C$ 16. $\int \frac{dx}{a-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot ln\left\lvert\frac{\sqrt{a}+x}{\sqrt{a}-x}\right\rvert + C$ 17. $\int \frac{dx}{x^2-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot ln\left\lvert\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{a+kx^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} arctg \frac{\sqrt{k}x}{\sqrt{a}} + C$ $\int \frac{dx}{a-kx^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} ln\left\lvert\frac{\sqrt{a}+\sqrt{k}x}{\sqrt{a}-\sqrt{k}x}\right\rvert + C$ $\int \frac{dx}{kx^2-a} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} ln\left\lvert\frac{\sqrt{k}x-\sqrt{a}}{\sqrt{k}x+\sqrt{a}}\right\rvert + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C$ 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a-kx^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} arcsin \frac{\sqrt{k}x}{\sqrt{a}} + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{kx^2 \pm a}} = \frac{1}{\sqrt{k}} ln\left\lvert\sqrt{k}x + \sqrt{kx^2 \pm a}\right\rvert + C$

Основні (табличні) інтеграли грають важливу роль в інтегральному численні, тому їх треба запам'ятати. Крім знання наведеної таблиці необхідно також володіти ***методами*** пошуку первісної, які застосовуються з єдиною метою – звести інтеграл до табличного. Зауважимо, що саме ***зовнішній вигляд*** підінтегральної функції допомагає зорієнтуватись у виборі необхідного правила чи метода пошуку первісної $F(x)+C$. Можливості такої орієнтації підвищуються із досвідом. Допоміжні дії з підінтегральною функцією передбачають також ***вільне*** володіння шкільним математичним апаратом.

9.4. Основні методи інтегрування.
Метод безпосереднього інтегрування

Основними методами інтегрування є безпосереднє інтегрування, метод підстановки та інтегрування частинами.

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називають ***безпосереднім інтегруванням***.

Приклад 9.1. Знайти інтеграли:

а) $\int \left(x^5 + 3x^4 - 7\right)dx$; б) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{5-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{1}{x^2-4}\right)dx$;

в) $\int\left(3\cos x-5\cdot 2^x+\frac{4}{x}\right)dx$; г) $\int\frac{x^2+3\sqrt{x}-6x^3e^x}{x^3}dx$;

д) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Розв'язання. а) $\int\left(x^5+3x^4-7\right)dx\overset{\text{власт.}4,5}{=}\int x^5dx+3\int x^4dx-7\int dx\overset{\text{форм.}1,2}{=}$

$$=\frac{x^6}{6}+3\frac{x^5}{5}-7x+C.$$

б) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{1}{x^2-4}\right)dx=2\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}+3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-$

$$-\int\frac{dx}{x^2-4}\overset{\text{форм.}18,19.17}{=}2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+3\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

в) $\int\left(3\cos x-5\cdot 2^x+\frac{4}{x}\right)dx=3\int\cos xdx-5\int 2^xdx+4\int\frac{dx}{x}\overset{\text{форм.}8,5,4}{=}3\sin x-$

$$-5\frac{2^x}{\ln 2}+4\ln|x|+C.$$

г) $\int\frac{x^2+3\sqrt{x}-6x^3e^x}{x^3}dx$. Якщо інтегрується дріб, буває корисним поділити почленно чисельник на знаменник:

$$\int\frac{x^2+3\sqrt{x}-6x^3e^x}{x^3}dx=\int\left(\frac{x^2}{x^3}+\frac{3\sqrt{x}}{x^3}-\frac{6x^3e^x}{x^3}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}+3x^{-5/2}-6e^x\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x}+3\int x^{-5/2}dx-6\int e^xdx\overset{\text{форм.}4,2,6}{=}\ln|x|+3\frac{x^{-5/2+1}}{-5/2+1}-6e^x+C=\ln|x|+3\frac{x^{-3/2}}{-3/2}-$$

$$-6e^x+C=\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x^3}}-6e^x+C.$$

д) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=$

$$=\int\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}\overset{\text{форм.}14,12}{=}tgx-ctgx+C.$$

Зауваження 9.2. Інтегруючи алгебраїчну суму функцій, дістають кілька довільних сталих, але в результаті пишуть лише одну сталу – їхню алгебраїчну суму.

До безпосереднього інтегрування також відноситься інтегрування за допомогою операції “внесення під знак диференціала” (властивість 6 невизначеного інтеграла). Цей метод базується на рівності $dx = \frac{1}{k} \cdot d(kx + b)$, де k і b сталі, і застосовуються у тих випадках, коли підінтегральна функція заданого інтеграла має вигляд однієї із підінтегральних функцій табличних інтегралів, але її аргумент відрізняється від змінної інтегрування постійним доданком або постійним множником або тим та іншим одразу. У таких прикладах можна використовувати праву колонку таблиці інтегралів.

Приклад 9.2. Знайти інтеграли:

а) $\int (3x+1)^{10} dx$; б) $\int \sqrt[3]{(4x+7)^5}\, dx$;

в) $\int \frac{dx}{7-9x^2}$; г) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{3x-7}{2}}$.

Розв'язання. а) $\int (3x+1)^{10} dx = \left| dx = \frac{1}{3} d(3x+1) \right| = \int (3x+1)^{10} \times$

$\times \frac{1}{3} d(3x+1) = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{10} d(3x+1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^{11}}{11} + C$.

б) $\int \sqrt[3]{(4x+7)^5}\, dx = \left| dx = \frac{1}{4} d(4x+7) \right| = \frac{1}{4} \int (4x+7)^{5/3} d(4x+7) = \frac{1}{4} \times$

$\times \frac{(4x+7)^{8/3}}{8/3} + C = \frac{3}{32} \sqrt[3]{(4x+7)^8} + C$.

в) $\int \frac{dx}{7-9x^2} = -\frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{(3x)^2 - 7} \overset{форм.17}{=} -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln\left| \frac{3x-\sqrt{7}}{3x+\sqrt{7}} \right| + C = -\frac{1}{6\sqrt{7}} \times$

$\times \ln\left| \frac{3x-\sqrt{7}}{3x+\sqrt{7}} \right| + C$.

г) $\int \frac{dx}{cos^2 \frac{3x-7}{2}} = \int \frac{dx}{cos^2\left(\frac{3x}{2}-\frac{7}{2}\right)} = \frac{2}{3}\int \frac{d\left(3x/2 - 7/2\right)}{cos^2\left(3x/2 - 7/2\right)} = \frac{2}{3} tg\left(\frac{3x}{2}-\frac{7}{2}\right) +$

$+ C = \frac{2}{3} tg\left(\frac{3x-7}{2}\right) + C$.

Зауваження 9.3. Відомо [2], що похідна від елементарної функції є також елементарною функцією. З операцією інтегрування вже складніше. Доведено, що інтеграли від деяких елементарних функцій не є елементарними функціями. Прикладами таких інтегралів є: 1) $\int e^{-x^2} dx$ – інтеграл Пуасона; 2) $\int cos\, x^2 dx$, $\int sin\, x^2 dx$ – інтеграли Френеля; 3) $\int \frac{dx}{ln\, x}$, $x > 0$, $x \neq 1$ – інтегральний логарифм; 4) $\int \frac{sin\, x}{x} dx$, $\int \frac{cos\, x}{x} dx$ – інтегральні синус і косинус. Ці інтеграли існують, але вони не є елементарними функціями. Їх можна обчислити наближено.

ЛЕКЦІЯ 10. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ: ЗАМІНА ЗМІННОЇ (МЕТОД ПІДСТАНОВКИ) ТА ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ. ІНТЕГРУВАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДРОБІВ

10.1. Метод заміни змінної (метод підстановки)

Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування, що дозволяє спростити підінтегральний вираз і звести інтеграл до лінійної комбінації табличних інтегралів.

Цей метод містить два прийоми.

а) ***Пряма підстановка (заміна змінної)***.

Якщо для знаходження заданого інтеграла $\int f(x)dx$ зробити підстановку $\boxed{x = \varphi(t)}$, тоді має місце рівність:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt . \qquad (10.1)$$

Підстановки підбирають так, щоб одержані після перетворення нові інтеграли були табличними або зводились до них. Після знаходження невизначеного інтеграла методом підстановки потрібно зробити зворотній перехід у результаті інтегрування від змінної t до початкової змінної x (для цього необхідно, щоб функція $x=\varphi(t)$ мала обернену $t=\psi(x)$).

Приклад 10.1. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Розв'язання. $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=t^3 \\ dx=3t^2dt \\ t=\sqrt[3]{x} \end{array} \right| = \int \frac{\cos t\cdot 3t^2dt}{t^2} = 3\int \cos t dt =$

$= 3\sin t + C = 3\sin\sqrt[3]{x} + C$.

б) ***Обернена підстановка.***

Якщо зробити підстановку $\boxed{\varphi(x)=t}$, тоді має місце рівність

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x)=t \\ \varphi'(x)dx=dt \end{array} \right| = \int f(t)dt. \qquad (10.2)$$

Після знаходження останнього інтеграла також треба повернутись до змінної x, використовуючи рівність $t=\varphi(x)$.

Приклад 10.2. Знайти інтеграли: а) $\int x^4\left(3+x^5\right)^{10}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-4}}$.

Розв'язання. а) $\int x^4\left(3+x^5\right)^{10}dx = \left| \begin{array}{l} 3+x^5=t \\ 5x^4dx=dt \\ x^4dx=\frac{1}{5}dt \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int t^{10}dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{11}}{11} + C =$

$= \frac{1}{55}\cdot\left(3+x^5\right)^{11} + C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-4}} = \left| \begin{array}{l} e^x-4=t^2 \\ e^x=t^2+4 \\ x=\ln\left(t^2+4\right) \\ dx=\frac{2t}{t^2+4}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2tdt}{t^2+4}}{t} = 2\int \frac{dt}{t^2+4} = 2\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C =$

$$= arctg\frac{t}{2} + C = \left| t = \sqrt{e^x - 4} \right| = arctg\frac{\sqrt{e^x - 4}}{2} + C.$$

10.2. Метод інтегрування частинами

Цей метод застосовується тоді, коли підінтегральний вираз містить добуток функцій, причому хоча б одна з них є трансцендентною (не степеневою).

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Розглянемо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Інтегруючи обидві частини рівності, одержимо $\int d(u \cdot v) = \int u\,dv + \int v\,du$, або

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (10.3)$$

Формула (10.3) називається ***формулою інтегрування частинами***.

Ідея методу полягає в тому, що в підінтегральному виразі $f(x)dx$ необхідно правильно виділити ***два співмножники*** u та dv. За “u”, як правило, обирають множник, який при диференціюванні спрощується. Інша частина підінтегрального виразу містить множник “dv”. Його слід вибирати так, щоб інтегруванням можна було знайти v. При цьому вважають, що стала $C = 0$.

Після виділення u та dv необхідно знайти du і v: $du = u'(x)dx$, $v = \int dv$, а потім скористатися формулою (10.3). В цій рівності інтеграл $\int vdu$ простіше або подібний попередньому інтегралу $\int udv$.

Приклад 10.3. Обчислити інтеграл $\int x\sin 3x dx$.

Розв'язання.
$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin 3x dx}_{dv} = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin 3x dx \\ du = (x')dx = dx & v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)}_{v} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)}_{v}\underbrace{dx}_{du} = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Спробуємо навпаки:

$$\int \underbrace{\sin 3x}_{u}\,\underbrace{xdx}_{dv} = \left| \begin{matrix} u = \sin 3x & dv = xdx \\ du = (\sin 3x)'\,dx = 3\cos 3xdx & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \underbrace{\sin 3x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} -$$

$$-\int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \cdot \underbrace{3\cos 3xdx}_{du}.$$

У результаті хибного використання формули інтегрування частинами отриманий інтеграл виявився складніше попереднього.

Надамо рекомендації до застосування формули (10.3).

а) В інтегралах вигляду (група I)

$\int P_n(x)\left\{ \begin{matrix} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx} \\ a^{kx} \end{matrix} \right\}dx$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n, $k \in R$ доцільно обирати $u = P_n(x)$, $dv = \left\{ \begin{matrix} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx} \\ a^{kx} \end{matrix} \right\}dx$.

б) В інтегралах вигляду (група II)

$\int P_n(x)\left\{ \begin{matrix} \log_a x \\ \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ arctgx \\ arcctgx \end{matrix} \right\}dx$ маємо $u = \left\{ \begin{matrix} \log_a x \\ \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ arctgx \\ arcctgx \end{matrix} \right\}$;

$dv = P_n(x)dx$.

Зауважимо, що в групі II іноді $P_n(x) = 1$. Тоді $dv = dx$.

в) Інтеграли вигляду $\int e^{kx}\sin lxdx$, $\int e^{kx}\cos lxdx$, де k, l – дійсні числа (група III). Тут після двократного застосування формули (10.3) утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв’язуючи це рівняння, знаходять цей інтеграл.

Приклад 10.4. Обчислити інтеграл $\int \ln x dx$.

Розв'язання. $\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx & v = \int dx = x \end{array} \right| = \ln x \cdot x -$

$- \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot x - \int dx = \ln x \cdot x - x + C$.

Зауваження 10.1. Метод інтегрування частинами може бути застосований двічі або, навіть, тричі, у залежності від степеня многочлена $P_n(x)$.

Приклад 10.5. Обчислити інтеграл $\int (x^2+1) e^{2x} dx$.

Розв'язання. $\int (x^2+1) e^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2+1 & dv = e^{2x} dx \\ du = 2x dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = (x^2+1) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} -$

$- \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2x dx = (x^2+1) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int x e^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{2x} dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = (x^2+1) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} -$

$- \left(x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right) = \frac{1}{2} (x^2+1) e^{2x} - \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C$.

10.3. Інтегрування елементарних дробів

Дроби $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{(x-a)^k}$, $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, де A, B, N, M, a, p, q – дійсні числа, а $k \in N$, і тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, називають ***елементарними*** або ***найпростішими***.

Знайдемо невизначені інтеграли від елементарних дробів. Інтеграли від найпростіших дробів I-го та II-го типів знаходять методом безпосереднього інтегрування:

$$\text{I.} \quad \int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C. \qquad (10.4)$$

$$\text{II. } \int \frac{Bdx}{(x-a)^k} = B\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = B\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \tag{10.5}$$

$$= \frac{B}{(-k+1)(x-a)^{k-1}} + C.$$

При інтегруванні найпростішого дробу III-го типу треба спочатку в знаменнику виділити повний квадрат, а потім той вираз, що під квадратом, замінити через нову змінну.

$$\text{III.} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4} + q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x + {}^{p}\!/_{2} = t \\ dx = dt \\ x = t - {}^{p}\!/_{2} \\ q - {}^{p^2}\!/_{4} = k^2 \end{array} \right| = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2+k^2}dt = \int \frac{Mtdt}{t^2+k^2} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{t^2+k^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+k^2\right)}{t^2+k^2} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{t^2+k^2} \overset{табл.(4),(15)}{=} \frac{M}{2} ln\left(t^2+k^2\right) + \frac{2N-Mp}{2}\cdot\frac{1}{k} arctg\frac{t}{k} +$$
$$+ C.$$

Повертаючись до змінної x, та враховуючи. Що $k^2 = \frac{4q-p^2}{4}$ або $k = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}$, одержимо:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right) + \frac{2N-Mp}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \times$$
$$\times arctg\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{4q-p^2}} + C. \tag{10.6}$$

Зауваження 10.2. Інтеграл від найпростішого дробу типу IV шляхом повторного інтегрування частинами зводять до інтеграла від найпростішого дробу типу III.

Приклад 10.6. Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{3}{x-2}dx$; б) $\int \frac{5}{(x-2)^3}dx$;

в) $\int \frac{4}{x^2+2x+10}dx$; г) $\int \frac{5x+1}{x^2-2x+5}dx$.

Розв'язання. а) $\int \frac{3}{x-2}dx = 3\int \frac{d(x-2)}{x-2} = 3\,ln|x-2|+C$.

б) $\int \frac{5}{(x-2)^3}dx = 5\int (x-2)^{-3}d(x-2) = 5\frac{(x-2)^{-3+1}}{-3+1}+C = 5\frac{(x-2)^{-2}}{-2}+C =$

$= -\frac{5}{2(x-2)^2}+C$.

в) $\int \frac{4}{x^2+2x+10}dx = 4\int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+10} = 4\int \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \left|\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| =$

$= 4\int \frac{dt}{t^2+9} = 4\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C = \frac{4}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C$.

г) $\int \frac{5x+1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{5x+1}{x^2-2x+1-1+5}dx = \int \frac{5x+1}{(x-1)^2+4}dx = \left|\begin{matrix} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{matrix}\right| =$

$= \int \frac{5(t+1)+1}{t^2+4}dt = \int \frac{5t+6}{t^2+4}dt = \int \frac{5tdt}{t^2+4} = \int \frac{6dt}{t^2+4} = 5\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+4}+6\int \frac{dt}{t^2+4} =$

$= \frac{5}{2}ln\left(t^2+4\right)+6\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C = |t=x-1| = \frac{5}{2}ln\left((x-1)^2+4\right)+3arctg\frac{x-1}{2}+C$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 13. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

13.1. Таблиця інтегралів. Метод безпосереднього інтегрування

Нагадаємо, що безпосереднє інтегрування – метод, який полягає в прямому застосуванні табличної формули і властивостей невизначеного інтеграла (лекція 9).

Зауваження 13.1. Інтегруючи алгебраїчну суму функцій, дістають кілька довільних сталих, але в результаті пишуть лише одну сталу – їхню алгебраїчну суму.

Приклад 13.1. Знайти інтеграли:

1) $\int \left(10x^5+6x^3+4x-11\right)dx$;

2) $\int x^2\sqrt[4]{x^3}\,dx$;

3) $\int \frac{\left(x^2-1\right)^2}{\sqrt{x}}dx$;

4) $\int \left(\frac{4}{x^2+3}-\frac{2}{x^2-4}+\frac{7}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\right)dx$;

5) $\int \frac{1}{x^4+x^2}dx$;

6) $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$;

7) $\int 2^x\cdot 3^{2x}dx$;

8) $\int ctg^2 x dx$;

9) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$;

10) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{3x^2-2}}+\frac{7}{4+5x^2}\right)dx$.

Розв'язання. 1) $\int \left(10x^5+6x^3+4x-11\right)dx=10\int x^5dx+6\int x^3dx+4\int xdx-$

$$-11\int dx=10\cdot\frac{x^6}{6}+6\frac{x^4}{4}+4\cdot\frac{x^2}{2}-11x+C.$$

2) $\int x^2\sqrt[4]{x^3}\,dx=\int x^2\cdot x^{3/4}dx=\int x^{2+\frac{3}{4}}dx=\int x^{11/4}dx=\frac{x^{\frac{11}{4}+1}}{\frac{11}{4}+1}+C=\frac{4}{15}x^{15/4}+$

$$+C=\frac{4}{15}\sqrt[4]{x^{15}}+C.$$

3) $\int \frac{\left(x^2-1\right)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^4-2x^2+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{x^4}{\sqrt{x}}-\frac{2x^2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left|\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-1/2}\right|=$

$$=\int\left(x^{4-1/2}-2x^{2-1/2}+x^{-1/2}\right)dx=\int x^{7/2}dx-2\int x^{3/2}dx+\int x^{-1/2}dx=\frac{x^{7/2+1}}{\frac{7}{2}+1}-2\frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1}+$$

$$+\frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2x^{9/2}}{9}-2\cdot\frac{2x^{5/2}}{5}+2x^{1/2}+C=\frac{2\sqrt{x^9}}{9}-\frac{4\sqrt{x^5}}{5}+2\sqrt{x}+C.$$

$$4)\int\left(\frac{4}{x^2+3}-\frac{2}{x^2-4}+\frac{7}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\right)dx=4\int\frac{dx}{x^2+3}-2\int\frac{dx}{x^2-4}+$$

$$+7\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}=4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{4}}ln\left|\frac{x-\sqrt{4}}{x+\sqrt{4}}\right|+7\,arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+$$

$$+ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C=\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+7\,arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C.$$

$$5)\int\frac{1}{x^4+x^2}dx=\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{1+x^2}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)}dx-\int\frac{x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{x}-arctgx+C.$$

$$6)\int\frac{x^4dx}{x^2+1}=\int\frac{\left(x^4-1\right)+1}{x^2+1}dx=\int\frac{x^4-1}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\int\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx+$$

$$+\int\frac{dx}{x^2+1}=\int\left(x^2-1\right)dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^3}{3}-x+arctgx+C.$$

$$7)\int 2^x\cdot 3^{2x}dx=\int 2^x\cdot 9^x dx=\int(2\cdot 9)^x dx=\int 18^x dx=\frac{18^x}{ln18}+C.$$

$$8)\int ctg^2xdx=\int\left(\frac{1}{sin^2x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{sin^2x}-\int dx=-ctgx-x+C.$$

$$9)\int\frac{cos\,2x}{sin^2x\cdot cos^2x}dx=\int\frac{cos^2x-sin^2x}{sin^2x\cdot cos^2x}dx=\int\frac{cos^2xdx}{sin^2x\cdot cos^2x}-$$

$$-\int\frac{sin^2x}{sin^2x\cdot cos^2x}dx=\int\frac{dx}{sin^2x}-\int\frac{dx}{cos^2x}=-ctgx-tgx+C.$$

$$10)\int\left(\frac{4}{\sqrt{3x^2-2}}+\frac{7}{4+5x^2}\right)dx=\frac{4}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}}+\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x^2+\frac{4}{5}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}\right|+\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}}arctg\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{5}}}+C=\frac{4}{\sqrt{3}}ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}\right|+\frac{7}{2\sqrt{5}}\times arctg\frac{\sqrt{5}x}{2}+$$

$$+C.$$

13.1.2. Метод "лінійної" підстановки

Досить часто до безпосереднього інтегрування також відноситься інтегрування за властивістю 6 невизначеного інтеграла, а саме, застосування формули (9.9):

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$$

і правої колонки таблиці інтегралів (лекція 9, п. 9.3).

Приклад 13.2. Знайти інтеграли:

1) $\int (9x+7)^5 dx$; 4) $\int \frac{dx}{2x+3}$;

2) $\int \sqrt[3]{(5x+2)^5}dx$; 5) $\int \left(6^{3x-1}-e^{-5x}\right)dx$;

3) $\int \sin 7x dx$; 6) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 4x}-\frac{1}{\sin^2 x/3}+\frac{5}{\sin 7x/3}\right)dx$.

Розв'язання. 1) $\int (9x+7)^5 dx = \left| \begin{array}{l} d(9x+7)=9dx \Rightarrow \\ dx=\frac{1}{9}d(9x+7) \end{array} \right| = \int (9x+7)^5 \times$

$\times \frac{1}{9}d(9x+7) = \frac{1}{9}\int (9x+7)^5 d(9x+7) = \frac{1}{9}\cdot\frac{(9x+7)^6}{6}+C$.

Або, згідно з формулою 2а) таблиці інтегралів

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1}+C,$$

маємо $\int (9x+7)^5 dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{(9x+7)^6}{6}+C$.

2) $\int \sqrt[3]{(5x+2)^5}dx = \int (5x+2)^{5/3}dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x+2)^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}+C = \frac{1}{5}\frac{3(5x+2)^{8/3}}{8}+$

$+C = \frac{3\sqrt[3]{(5x+2)^8}}{40}+C$.

3) $\int \sin 7x dx = \left| \int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cdot\cos kx + C \right| = -\frac{1}{7}\cos 7x + C$.

$$4)\int\frac{dx}{2x+3}=\left|\int\frac{dx}{kx+b}=\frac{1}{k}\cdot ln|kx+b|+C\right|=\frac{1}{2}\cdot ln|2x+3|+C.$$

$$5)\int\left(6^{3x-1}-e^{-5x}\right)dx\overset{форм.5a),6a)}{=}\int 6^{3x-1}dx-\int e^{-5x}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{6^{3x-1}}{ln6}+\frac{1}{5}\cdot e^{-5x}+$$

$$+C.$$

$$6)\int\left(\frac{1}{cos^2 4x}-\frac{1}{sin^2 x/3}+\frac{5}{sin 7x/3}\right)dx=\int\frac{dx}{cos^2 4x}-\int\frac{dx}{sin^2\frac{x}{3}}+5\int\frac{dx}{sin\frac{7x}{3}}=$$

$$\overset{форм.14a),12a),11a)}{=}\frac{1}{4}tg4x+3ctg\frac{x}{3}+5\cdot\frac{3}{7}ln\left|tg\frac{7x}{3\cdot 2}\right|+C.$$

13.2. Інтегрування за допомогою підстановки або методом заміни змінної

Нагадаємо, що в багатьох випадках заміна змінної дозволяє звести знаходження заданого інтеграла до табличного. Існує декілька варіантів заміни змінної в невизначеному інтегралі: введення під знак диференціала, заміна змінної (пряма підстановки) та обернена підстановка (підстановка).

13.2.1. Метод внесення під знак диференціала

Елементарні функції можна вносити під знак диференціала. Цей прийом дозволяє значно спростити перетворення підінтегрального виразу з метою приведення його до табличного вигляду. У наведених нижче прикладах в підінтегральній функції виділяється така її частина, яка при внесенні її під знак інтеграла дозволяє отримати табличний інтеграл.

Приклад 13.3. Знайти інтеграли:

$1)\int cos^3 x\cdot sin\, xdx$; $\quad 2)\int\frac{dx}{x\cdot ln^3 x}$; $\quad 3)\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^5+1}}$.

Розв'язання. 1) $\int cos^3 x \cdot sin\, x dx = \left| \begin{matrix} d(cos\, x) = -sin\, dx \\ sin\, x dx = -d(cos\, x) \end{matrix} \right| = -\int cos^3 x \times$

$$\times d(cos\, x) \overset{вл.6}{=} \left| \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C \right| = -\frac{cos^4 x}{4} + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{x \cdot ln^3 x} = \left| d(ln\, x) = \frac{1}{x} dx \right| = \int \frac{d(ln\, x)}{ln^3 x} = \left| \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3} du = \frac{u^{-2}}{-2} + C \right| =$$

$$= \frac{(ln\, x)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2\, ln^2 x} + C.$$

$$3) \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5 + 1}} = \left| \begin{matrix} d(x^5 + 1) = 5x^4 dx \\ x^4 dx = \frac{1}{5} d(x^5 + 1) \end{matrix} \right| = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 + 1)}{\sqrt{x^5 + 1}} = \left| \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \right| =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{x^5 + 1} + C.$$

13.2.2. Метод заміни змінної (пряма підстановка)

Застосуємо для знаходження інтеграла $\int f(x) dx$ підстановку $x = \varphi(t)$ та рівність (10.1):

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

– ***формула заміни змінної*** у невизначеному інтегралі. Зауважимо, що після знаходження інтеграла треба повернутися до "старої" змінної.

Приклад 13.4. Знайти інтеграли: 1) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$; 2) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 5}}$.

Розв'язання. 1) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \left| \begin{matrix} x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{t \cdot 2tdt}{t^2 + 1} = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} =$

$$= 2\int \frac{(t^2 + 1) - 1}{t^2 + 1} dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \right) = 2(t - arctg\, t) + C = 2\left(\sqrt{x} - arctg\sqrt{x}\right) + C.$$

$$2)\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4x+5}} = \left| \begin{matrix} x=\frac{1}{t} \Rightarrow t=\frac{1}{x} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t}+5}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{5t^2+4t+1}{t^2}}} = \int \frac{tdt}{t\sqrt{5t^2+4t+1}} = \left| \begin{matrix} 5t^2+4t=5\left(t^2+\frac{4}{5}t\right)= \\ =5\left(t^2+2\cdot\frac{2}{5}t+{}^4\!/_{25}-{}^4\!/_{25}\right)=5\left(t+{}^2\!/_5\right)^2- \\ -5\cdot{}^4\!/_{25}=5\left(t+{}^2\!/_5\right)^2-{}^4\!/_5 \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{5\left(t+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{25}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(t+{}^2\!/_5\right)}{\sqrt{\left(t+{}^2\!/_5\right)^2+{}^1\!/_{25}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}ln\left|t+\frac{2}{5}-\sqrt{\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{25}}\right|+C = \left|t=\frac{1}{x}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}ln\left|\frac{1}{x}+\frac{2}{5}-\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{25}}\right|+C.$$

13.2.3. Метод підстановки (обернена підстановка)

Якщо заданий інтеграл має вигляд $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, то доцільно зробити підстановку $\varphi(x)=t$. Тоді, згідно з формулою (10.2):

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \left| \begin{matrix} \varphi(x)=t \\ \varphi'(x)dx=dt \end{matrix} \right| = \int f(t)dt.$$

Приклад 13.5. Знайти інтеграли: 1) $\int x\cdot\sqrt[3]{1+x^2}dx$;

2) $\int 2^{x^2}\cdot xdx$; 3) $\int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

4) $\int \frac{sin\,xdx}{4+3cos\,x}$; 5) $\int \frac{sin\,xdx}{4+3cos^2 x}$;

6) $\int \frac{e^{x}\sqrt{arctg\, e^{x}}}{1+e^{2x}}$;   7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^{2}}}$.

Розв'язання. 1) $\int x\cdot\sqrt[3]{1+x^{2}}\,dx = \left|\begin{matrix} 1+x^{2}=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\sqrt[3]{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=$

$=\frac{3}{8}\cdot t^{4/3}+C=\frac{3\sqrt[3]{\left(1+x^{2}\right)^{4}}}{8}+C$.

2) $\int 2^{x^{2}}\cdot xdx = \left|\begin{matrix} x^{2}=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int 2^{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{t}}{ln2}+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{x^{2}}}{ln2}+C$.

3) $\int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = \left|\begin{matrix} \sqrt{x}=t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \\ dx/\sqrt{x}=2dt \end{matrix}\right| = 2\int e^{t}dt = 2\cdot e^{t}+C=2e^{\sqrt{x}}+C$.

4) $\int \frac{sin\, xdx}{4+3\,cos\,x} = \left|\begin{matrix} 4+3\,cos\,x=t \\ 3\cdot(-\,sin\,x)dx=dt \\ sin\,xdx=-\frac{1}{3}dt \end{matrix}\right| = -\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{3}ln|t|+C=$

$=-\frac{1}{3}ln\;\;|4+3\,cos\,x|+C$.

5) $\int \frac{sin\,xdx}{4+3\,cos^{2}x} = \left|\begin{matrix} cos\,x=t \\ -\,sin\,xdx=dt \\ sin\,xdx=-dt \end{matrix}\right| = -\int\frac{dt}{4+3t^{2}}=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^{2}+4/3}=-\frac{1}{3}\times$

$\times\frac{1}{\sqrt{4/3}}arctg\frac{t}{\sqrt{4/3}}+C=-\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{3}t}{2}+C=-\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{3}\cdot cos\,t}{2}+C$.

$$6)\int\frac{e^x\sqrt{arctg\,e^x}}{1+e^{2x}}=\left|\begin{array}{l} arctg\,e^x=t\\ \dfrac{e^x dx}{1+e^{2x}}=dt\end{array}\right|=\int\sqrt{t}dt=\frac{t^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2\sqrt{t^3}}{3}+C=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{\left(arctg\,e^x\right)^3}}{3}+C.$$

$$7)\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\left|\begin{array}{l}-x^2+4x=-\left(x^2-4x\right)=-\left(x^2-2\cdot 2x+4-4\right)=\\ =-(x-2)^2+4\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x-2)^2+4}}=\left|\begin{array}{l}x-2=t\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=arcsin\frac{t}{2}+C=arcsin\frac{x-2}{2}+C.$$

13.3. Метод інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами (лекція 10, п. 10.2) застосовується в тих випадках, коли підінтегральний вираз можна подати у вигляді добутку множників $u=u(x)$ і $dv=dv(x)$ таким чином, щоб інтегрування виразів $dv(x)$ і vdu зводилось до простіших, ніж початкові інтеграли.

Формула інтегрування частинами (10.3) має вигляд:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Приклад 13.6. Знайти інтеграли:

1) $\int(3x-1)e^{2x}dx$;

2) $\int\sqrt{x}\,ln^2 x dx$;

3) $\int e^{-4x}cos\,5xdx$;

4) $\int e^{\sqrt{x}}dx$;

5) $\int e^{2x}sin\,e^x dx$.

Розв'язання. 1) $\int(3x-1)e^{2x}dx\overset{гр.I}{=}\left|\begin{array}{ll}u=3x-1 & dv=e^{2x}dx\\ du=3dx & v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\\ & (c=0)\end{array}\right|=$

$$=(3x-1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 3dx=\frac{3x-1}{2}\cdot e^{2x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$

$$2)\int\sqrt{x}\,ln^2 x dx \overset{гр.II}{=} \left| \begin{array}{ll} u = ln^2 x & dv = \sqrt{x}dx \\ du = 2\,ln\,x\cdot\frac{1}{x}dx & v = \int\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x^3}\big/3 \end{array} \right| = ln^2 x \times$$

$$\times\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{2}{3}\cdot 2\int\sqrt{x^3}\cdot ln\,x\cdot\frac{1}{x}dx = ln^2 x\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{4}{3}\int\sqrt{x}\cdot ln\,x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = ln\,x & dv = \sqrt{x}dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \int\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x^3}\big/3 \end{array} \right| = ln^2 x\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{4}{3}\left(ln\,x\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\int\sqrt{x^3}\cdot\frac{1}{x}dx \right) = ln^2 x\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{4}{3}\left(ln\,x\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3} \right) + C = \frac{2}{27}\times$$

$$\times\sqrt{x^3}\left(9\,ln^2 x - 12\,ln\,x + 8\right) + C.$$

$$3)\int e^{-4x}\cos 5x dx \overset{гр.III}{=} \left| \begin{array}{ll} u = \cos 5x & dv = e^{-4x}dx \\ du = -5\sin 5x dx & v = \int e^{-4x}dx = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{array} \right| =$$

$$= \cos 5x\cdot\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right) - \int\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right)\cdot\left(-5\sin 5x\right)dx = -\frac{1}{4}\cos 5x\cdot e^{-4x} -$$

$$-\frac{5}{4}\int e^{-4x}\cdot\sin 5x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin 5x & dv = e^{-4x}dx \\ du = 5\cos 5x dx & v = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{array} \right| = -\frac{1}{4}\cos 5x\cdot e^{-4x} -$$

$$-\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\cdot\sin 5x - \int\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right)\cdot 5\cos 5x dx\right) = -\frac{1}{4}\cos 5x\cdot e^{-4x} + \frac{5}{16}e^{-4x}\times$$

$$\times\sin 5x - \frac{25}{16}\int e^{-4x}\cos 5x dx.$$

Запишемо рівняння щодо шуканого інтеграла I:

$$I = \frac{e^{-4x}}{16}\left(5\sin 5x - 4\cos 5x\right) - \frac{25}{16}I.$$

Звідси $\left(1 + \frac{25}{16}\right)I = \frac{e^{-4x}}{16}\left(5\sin 5x - 4\cos 5x\right)$.

Таким чином, дістанемо

$$I = \int e^{-4x}\cos 5x dx = \frac{e^{-4x}}{41}\left(5\sin 5x - 4\cos 5x\right) + C.$$

$$4)\int e^{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{l}x=t^2\\dx=2tdt\\t=\sqrt{x}\end{array}\right|=2\int e^t tdt=\left|\begin{array}{ll}u=t & dv=e^t dt\\du=dt & v=e^t\end{array}\right|=2\left(t\cdot e^t-\int e^t dt\right)=$$

$$=2\left(t\cdot e^t-e^t\right)+C=2\left(\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}\right)+C.$$

$$5)\int e^{2x}\sin e^x dx=\left|\begin{array}{ll}u=e^x & dv=e^x\cdot\sin e^x dx\\du=e^x dx & v=\int\sin e^x\cdot e^x dx=\int\sin e^x d\left(e^x\right)=\\ & =-\cos e^x\end{array}\right|=$$

$$=-e^x\cdot\cos e^x+\int\cos e^x\cdot e^x dx=-e^x\cdot\cos e^x+\int\cos e^x d\left(e^x\right)=-e^x\cos e^x+$$

$$+\sin e^x+C.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1) $\int\left(x^2-3\right)^2 dx$;

2) $\int\dfrac{x^3+2x^2-x+3}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int tg^2 x dx$;

4) $\int\dfrac{x\sin 2x+\sqrt[3]{x}\cdot\cos x}{x\cos x}dx$;

5) $\int\dfrac{1+\sin^2 x}{1-\cos^2 x}dx$;

6) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$;

7) $\int 4\cos^2\dfrac{x}{2}dx$;

8) $\int\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx$.

2. Знайти інтеграли за допомогою підстановки:

1) $\int x\sin\left(4-x^2\right)dx$;

2) $\int\dfrac{e^{2x}dx}{\sqrt{9-e^{4x}}}$;

3) $\int\dfrac{7^x dx}{1-49^x}$;

4) $\int\dfrac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$;

5) $\int\dfrac{arctg^5 x dx}{1+x^2}$;

6) $\int\dfrac{dx}{x^2+6x+17}$.

3. Знайти інтеграли методом інтегрування частинами:

1) $\int xe^{-3x}dx$;

4) $\int\arcsin 3x dx$;

2) $\int x^2 \cdot \sin 8x dx$;

3) $\int x^2 \log_6 x dx$;

5) $\int e^{-x} \cdot \sin 8x dx$;

6) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

ЛЕКЦІЯ 11. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Відношення двох алгебраїчних многочленів

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, $Q_m(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$; $n \in Z$, $m \in N$, називається ***раціональною функцією*** або ***раціональним дробом***. Якщо $n < m$, то раціональний дріб називається ***правильним***. Так, наприклад, $\frac{4x^3 - 2x + 7}{2x^5 + 7x^2 + 3}$ – правильний дріб, а дріб $\frac{7x^4 + 3x^2 - 2}{9x^2 + x}$ – неправильний.

Якщо $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дріб неправильний, тоді треба поділити чисельник на знаменник (за правилом ділення многочленів [1]) і одержати заданий дріб у вигляді суми многочлена (частки цього ділення) та правильного дробу, тобто

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, \tag{11.1}$$

де $R(x)$ – залишок від ділення.

<u>Теорема 11.1. (Теорема Вейєрштраса про наближення).</u> Будь-яку функцію $f(x)$, неперервну на (a,b), можна з наперед заданою довільною похибкою замінити многочленом $R_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$.

Отже, практично багато інтегралів можна звести до інтегрування раціональних функцій. ***Математична ідея*** методу базується на знаменитій теоремі алгебри.

Теорема 11.2. Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів вигляду

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{B}{(x-a)^k},\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \frac{Cx+D}{\left(x^2+px+q\right)^r}, \qquad (11.2)$$

де k, $r \in N$, $A, B, C, D, M, N, p, q, a \in R$, а квадратний тричлен не має дійсних коренів.

Це роблять ***методом невизначених коефіцієнтів***.

Отже, інтегрування раціонального дробу (11.1) зводиться до інтегрування многочлена $M_{n-m}(x)$ та суми простіших дробів (11.2).

Зауваження 11.1. Вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$.

Можливі такі випадки.

1. Корені знаменника дійсні та різні, тобто $Q_m(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m)$.

У цьому випадку дріб $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів І-го типу:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_m}{x-\alpha_m}. \qquad (11.3)$$

2. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, наприклад $Q_m(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^k,\ k+1=m$.

Тоді дріб $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів І-го та ІІ-го типів:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-\beta)^k}. \qquad (11.4)$$

3. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратний тричлен x^2+px+q з комплексними коренями (дискримінант $p^2-4q<0$), який не розкладається на множники

$$Q_m(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^k\cdot\left(x^2+px+q\right).$$

В цьому випадку дріб $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму простіших дробів I-го, II-го та III-го типів:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + ... + \frac{B_k}{(x-\beta)^k} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q}. \quad (11.5)$$

$$(k+3=m)$$

Зауваження 11.2. ***Комплексним числом*** називається вираз $z = x + yi$, де $x, y \in R$, а символ i – уявна одиниця, яка визначається умовою $i^2 = -1$. При цьому число x називається ***дійсною*** частиною комплексного числа z і позначається $x = Re\,z$, а y – уявною частиною z, $y = Im\,z$ (від французьких слів: reel – дійсний, imaginaire – уявний).

Два комплексні числа $z = x + yi$ і $z = x - yi$, які відрізняються тільки знаком уявної частини, називаються ***спряженими***.

Якщо користуватися декартовою системою координат, то число z зображується точкою $M(x; y)$.

Приклад 11.1. Знайти корені рівняння $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$, то корені рівняння є комплексно-спряженими:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Зауваження 11.3. Метод невизначених коефіцієнтів дає алгоритм для знаходження коефіцієнтів розкладу правильного раціонального дробу на суму простіших (формула (11.4)). Зводимо праву частину рівності до спільного знаменника. Прирівнюємо многочлени чисельників правої і лівої частини, а потім прирівнюємо відповідні коефіцієнти при однакових степенях x обох чисельників, оскільки якщо два многочлени рівні між собою, то вони мають рівні коефіцієнти при x в однакових степенях. Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язки її є коефіцієнтами розкладу.

Зауваження 11.4. Крім методу порівняння коефіцієнтів, користуються також ***методом окремих значень аргументу***. Можна знайти невідомі коефіцієнти після того як запишемо рівняння многочленів, надаючи x числові значення. Система рівнянь значно спрощується, коли змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_m(x)$.

Приклад 11.2. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3-3x-12}{x^3-7x^2+12x}dx$.

Розв'язання. 1. Дріб $\frac{x^3-3x-12}{x^3-7x^2+12x}$ неправильний $(n=m=3)$. Виділимо цілу частину. Для цього поділимо чисельник на знаменник "кутом":

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3-3x-12 & x^3-7x^2+12 \\ \underline{x^3-7x^2+12x} & \overline{1} \\ 7x^2-15x-12 & \end{array}$$

Отже, $\frac{x^3-3x-12}{x^3-7x^2+12x}=1+\frac{7x^2-15x-12}{x^3-7x^2+12x}$.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладемо на співмножники:

$x^3-7x^2+12x=x\left(x^2-7x+12\right)$,

$x_1=0$; $x^2-7x+12=0$,

$x_{2,3}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm1}{2}$,

$x_2=4$; $x_3=3$.

Отже, $x^3-7x^2+12x=x(x-4)(x-3)$.

Застосуємо формулу (11.3): $\frac{7x^2-15x-12}{x(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-4}$.

3. У запису розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші дроби приведемо праву частину до спільного знаменника

$$\frac{7x^2-15x-12}{x(x-3)(x-4)}=\frac{A(x-3)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x-4)}.$$

Прирівняємо чисельники лівої і правої частини цього рівняння

$$A(x-3)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x-3)=7x^2-15x-12.$$

Для знаходження коефіцієнтів A, B, C застосуємо ***метод окремих значень аргумента***, а саме, підставимо в останнє рівняння по черзі $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=4$.

Покладемо $x=0$, одержимо $12A=-12$, $A=-1$.

При $x=3$ маємо $-3B=6$, $B=-2$.

При $x=4$ дістанемо $4C=40$, $C=10$.

Отже, одержали $\dfrac{7x^2-15x-12}{x(x-3)(x-4)}=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{10}{x-4}$.

4. Отже $\displaystyle\int\frac{x^3-3x-12}{x^3-7x^2+12x}dx=\int\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x-3}+\frac{10}{x-4}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{x}-$

$\displaystyle -2\int\frac{dx}{x-3}+10\int\frac{dx}{x-4}=x-ln|x|-2\,ln|x-3|+10\,ln|x-4|+C$.

Приклад 11.3. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^3}dx$.

Розв'язання. 1. Підінтегральний дріб правильний. Розкладемо його на елементарні. Знаменник має чотири дійсних корені, серед них є кратні: $x_1=0$, $x_2=x_3=x_4=1$.

Отже, $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^3}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$.

2. Застосуємо загальну схему для знаходження невідомих коефіцієнтів. У цьому прикладі зручно скористатись ***комбінованим*** методом, тобто деякі з невідомих коефіцієнтів визначимо, надаючи x значення дійсних коренів знаменника, а інші визначимо методом порівняння.

$$x^2+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx.$$

$$\begin{array}{l|c}
x=0 & 1=-A;\ A=-1; \\
x=1 & 2=D;\ D=2; \\
x^3 & 0=A+B;\ B=-A=1; \\
x^2 & 1=-3A-2B+C;\ C=1+3A+2B=1-3+2=0.
\end{array}$$

Маємо $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^3}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^3}$.

3. Отже, $\int\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^3}dx=\int\left(-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^3}\right)dx=-ln|x|+ln|x-1|-$

$-\dfrac{2}{2(x-1)^2}+C=ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|-\dfrac{1}{(x-1)^2}+C$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 14. ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Для інтегрування раціонального дробу $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ послідовно виконуються три кроки.

Крок 1. Перевіримо чи правильний раціональний дріб. Якщо неправильний, виділимо цілу частину шляхом ділення чисельника на знаменник "кутом". Отже,

$$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=\int\left(M_{n-m}(x)+\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}\right)dx,\ (n\geq m,\ k<m).$$

Крок 2. Представимо правильний раціональний дріб $\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ як суму найпростіших з невизначеними коефіцієнтами, для чого розкладемо знаменник на лінійні та квадратичні множники виду $x-a$, $(x-a)^k$, x^2+px+q.

Крок 3. Знайдемо невизначені коефіцієнти розкладів (11.3) – (11.5) методом ***невизначених коефіцієнтів*** або методом ***окремих значень аргументу***.

Крок 4. Знайдемо інтеграли від цілої частини та від суми найпростіших дробів.

Приклад 14.1. Проінтегрувати елементарні (найпростіші) дроби:

1) $\int\dfrac{3dx}{x-4}$; 2) $\int\dfrac{3dx}{(x-4)^2}$; 3) $\int\dfrac{x+5}{x^2+2x+5}dx$.

Розв'язання. 1) $\int\dfrac{3dx}{x-4}=3\,ln|x-4|+C$.

$$2)\int\frac{3dx}{(x-4)^2}=3\int(x-4)^{-2}dx=3\cdot\frac{(x-4)^{-1}}{-1}+C=-\frac{3}{x-4}+C.$$

$$3)\int\frac{x+5}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{x+5}{\left(x^2+2x+1\right)+4}dx=\int\frac{x+5}{(x+1)^2+4}dx=\begin{vmatrix}x+1=t\\ dx=dt\\ x=t-1\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{t-1+5}{t^2+4}dt=\int\frac{tdt}{t^2+4}+4\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}ln\left(t^2+4\right)+4\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}ln\left((x+1)^2+4\right)+$$

$$+2arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

Приклад 14.2. Виділити цілу частину дробу діленням многочленів "кутом": $\dfrac{x^5+x^2-1}{x^2+x+1}$.

Розв'язання. Ділення припиняють тоді, коли степінь остачі стане меншим за степінь дільника:

$$\begin{array}{l|l}
-\;x^5+x^2-1 & x^2+x+1\\
\quad\underline{x^5+x^4+x^3} & \overline{x^3-x^2+2}\\
\qquad -\;-x^4-x^3+x^2-1 & \\
\qquad\quad \underline{-x^4-x^3-x^2} & \\
\qquad\qquad -\;2x^2-1 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x^2+2x+3} & \\
\qquad\qquad\qquad -2x-3. &
\end{array}$$

Маємо $\dfrac{x^5+x^2-1}{x^2+x+1}=x^3-x^2+2+\dfrac{-2x-3}{x^2+x+1}$.

Приклад 14.3. Розкласти правильні дроби на елементарні:

1) $\dfrac{3x+1}{(x-4)(x+7)^3}$; 2) $\dfrac{x}{x^3-8}$; 3) $\dfrac{3x+4}{x^4-6x^3+9x^2}$.

Розв'язання. 1) $\dfrac{3x+1}{(x-4)(x+7)^3}=\dfrac{A}{\underbrace{x-4}_{\textit{відповідає}\,(x-4)}}+\underbrace{\dfrac{B_1}{x+7}+\dfrac{B_2}{(x+7)^2}+\dfrac{B_3}{(x+7)^3}}_{\textit{відповідає}\,(x+7)^3}$.

2) $$\frac{x}{x^3-8}=\frac{x}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\underbrace{\frac{A}{x-2}}_{\text{відповідає}(x-2)}+\underbrace{\frac{Mx+N}{x^2+2x+4}}_{\text{відповідає}\left(x^2+2x+4\right)}.$$
$$D<0$$

3) $$\frac{3x+4}{x^4-6x^3+9x^2}=\frac{3x+4}{x^2\left(x^2-6x+9\right)}=\frac{3x+4}{x^2(x-3)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x-3}+$$
$$+\frac{B_2}{(x-3)^2}.$$

Випадок 1. Знаменник має тільки дійсні корені.

Приклад 14.4. Знайти інтеграл $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

Розв'язання. Дріб $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}$ неправильний.

Крок 1. Виділяємо цілу частину неправильного дробу:
$$\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}=5+\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}.$$

Крок 2. Правильний дріб розкладаємо на суму елементарних (найпростіших) дробів:
$$x^3-4x=x\left(x^2-4\right)=x(x-2)(x+2).$$
$$\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)}\overset{\text{форм.}(11.3)}{=}\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Крок 3. Приведемо праву частину до спільного знаменника
$$\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}.$$

Прирівнюємо чисельник лівої і правої частин цього рівняння (знаменники у них рівні):
$$9x^2-2x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Застосуємо для знаходження коефіцієнтів A, B, C метод невизначених коефіцієнтів. Два многочлена того самого степеня тотожно рівні, якщо вони мають рівні коефіцієнти при однакових степенях. Отже, прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x та одержимо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 9 = A + B + C \\ x & -2 = 2B - 2C \\ x^0 & -8 = -4A \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 9 \\ B - C = -1 \\ A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 9 \\ 2B = 8 - A \\ A = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 9 - A - B \\ B = 3 \\ A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 4 \\ B = 3. \\ A = 2 \end{cases}$$

Зауваження 14.1. Знаходження коефіцієнтів можна значно спростити, підставляючи у тотожність зручні значення – дійсні корені знаменника (метод окремих значень аргументу).

Підставляємо в тотожність значення:

$x = 0 \Rightarrow -8 = -4A \Rightarrow A = 2;$

$x = 2 \Rightarrow 24 = 8B \Rightarrow B = 3;$

$x = -2 \Rightarrow 32 = 8C \Rightarrow C = 4.$

Таким чином, одержимо

$$\frac{9x^2 - 2x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2}.$$

Крок 4. Інтегруємо суму цілої частини дробу і елементарних дробів:

$$\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx = \int 5dx + \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2} \right) dx = 5x + 2\ln|x| +$$

$$+ 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C.$$

Випадок 2. Знаменник має дійсні корені, деякі з них кратні.

Приклад 14.5. Знайти інтеграл $\int \frac{3x+4}{x^2(x-1)} dx$.

Розв'язання. Підінтегральний дріб правильний. Розкладемо його на елементарні:

$$\frac{3x+4}{x^2(x-1)} \overset{форм.(11.4)}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)};$$

$$3x + 4 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2.$$

Надаємо x значення, що дорівнюють дійсним кореням знаменника:

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad 4=-B \quad \Rightarrow \quad B=-4;$$
$$x=1 \quad \Rightarrow \quad 7=C \quad \Rightarrow \quad C=7.$$

Для знаходження коефіцієнта A порівняємо коефіцієнти при x^2 у лівій і правій частинах тотожності: $x^2: \quad 0=A+C \quad \Rightarrow \quad A+7=0 \quad \Rightarrow \quad A=-7$.

Отже, маємо $\dfrac{3x+4}{x^2(x-1)}=-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{7}{x-1}$.

Тоді $\displaystyle\int\frac{3x+4}{x^2(x-1)}dx=\int\left(-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{x-1}\right)dx=-7\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2}+7\int\frac{dx}{x-1}=$

$$=-7\ln|x|+\frac{4}{x}+7\ln|x-1|+C.$$

Випадок 3. Серед коренів знаменника є дійсні і комплексно-спряжені.

Приклад 14.6. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{3x^2-5x+1}{x^4+9x^2}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є правильним дробом. Розкладемо його на елементарні. Для цього спочатку знаменник розкладемо на множники $x^4+9x^2=x^2\left(x^2+9\right)$.

$$\frac{3x^2-5x+1}{x^4+9x^2}\overset{\text{форм.}(11.5)}{=}\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+9}=\frac{A\left(x^2+9\right)+B\left(x^3+9x\right)+Mx^3+Nx^2}{x^2\left(x^2+9\right)}.$$

Прирівняємо чисельники лівої і правої частин:

$$3x^2-5x+1=A\left(x^2+9\right)+B\left(x^3+9x\right)+Mx^3+Nx^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & B+M=0 \quad \Rightarrow \quad M=-B=5/9; \\
x^2 & A+N=3 \quad \Rightarrow \quad N=3-A=3-1/9=26/9; \\
x & 9B=-5 \quad \Rightarrow \quad B=-5/9; \\
x^0 & 9A=1 \quad \Rightarrow \quad A=1/9.
\end{array}$$

Отже, дістанемо $\dfrac{3x^2-5x+1}{x^4+9x^2}=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{x}{x^2+9}+\dfrac{26}{9}\cdot\dfrac{1}{x^2+9}$.

Маємо $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^4 + 9x^2} dx = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{5}{9}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{9}\int \frac{xdx}{x^2 + 9} + \frac{26}{9}\int \frac{dx}{x^2 + 9} = -\frac{1}{9x} -$
$- \frac{5}{9} ln|x| + \frac{5}{18} ln\left(x^2 + 9\right) + \frac{26}{27} arctg \frac{x}{3} + C$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{2x^2 + 41x - 9}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$;

2) $\frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}$;

3) $\int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx$;

4) $\int \frac{7x^3 - 9}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} dx$;

5) $\int \frac{x^4}{x^3 + 8} dx$;

6) $\int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2\left(x^2 + 4\right)} dx$.

ЛЕКЦІЯ 12. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

12.1. Інтегрування тригонометричних функцій

При інтегруванні тригонометричних функцій важливо вміти використовувати тригонометричні формули, в багатьох випадках цього виявляється вже достатньо для виходу підінтегрального виразу на табличний рівень. В інших, складніших, випадках необхідно застосовувати методи інтегрування (лекція 10). Вдало підібрана заміна або підстановка дозволяє звести інтеграл до простішого (дробово-раціонального виразу), а в результаті і до табличного.

Розглянемо деякі види інтегралів, для яких є правила їх знаходження.

12.1.1. Інтеграли виду $\int sin^m x \cdot cos^n xdx, (m, n \in Z_+)$

Розрізняють два випадки: 1) принаймні один з показників m чи n непарне число; 2) обидва показники m і n парні числа.

У першому випадку інтеграл 12.1.1. знаходиться за допомогою метода підстановки, якщо відщепити від непарного степеня один множник і виразити за допомогою формули $sin^2 x + cos^2 x = 1$ парний степінь, який залишився, через другу функцію. Слід пам'ятати: якщо n – додатнє ***непарне число***, то роблять підстановку $cos\, x = t$, а якщо m, то $sin\, x = t$.

Приклад 12.1. Знайти $\int sin^2 x \cdot cos^3 xdx$.

Розв'язання. $\int sin^2 x \cdot cos^3 xdx = \begin{vmatrix} n = 2 \\ m = 3 \end{vmatrix} = \int sin^2 x \cdot cos^2 x \cdot cos\, xdx =$

$$= \int sin^2 x \cdot \left(1 - sin^2 x\right) \cdot cos\, xdx = \begin{vmatrix} sin\, x = t \\ cos\, xdx = dt \end{vmatrix} = \int t^2 \left(1 - t^2\right) dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} -$$

$$- \frac{t^5}{5} + C = \frac{sin^3 x}{3} - \frac{sin^5 x}{5} + C.$$

У другому випадку для знаходження інтегралу 12.1.1. використовують формули зниження степеня $sin^2 \alpha = \frac{1 - cos\, 2\alpha}{2}$, $cos^2 \alpha = \frac{1 + cos\, 2\alpha}{2}$.

Приклад 12.2. Знайти $\int sin^2 3xdx$.

Розв'язання. $\int sin^2 3xdx = \begin{vmatrix} m = 2 \\ n = 0 \end{vmatrix} = \int \frac{1 - cos\, 6x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int cos\, 6xdx =$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} sin\, 6x + C.$$

12.1.2. Інтеграли виду $\int tg^n xdx$; $\int ctg^n xdx$, де n – ціле додатнє число

Скористаємось формулами $tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x} - 1$, $ctg^2 x = \frac{1}{sin^2 x} - 1$.

Або зробимо заміну змінної, а саме:

$tgx = t \Rightarrow x = arctg\,t$, $\qquad ctgx = t \Rightarrow x = arcctgt$,

$dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\qquad dx = -\dfrac{dt}{1+t^2}$.

Приклад 12.3. Знайти $\int tg^3 xdx$.

Розв'язання. $\int tg^3 xdx = \int tg^2 x \cdot tgxdx = \int \left(\dfrac{1}{cos^2 x} - 1\right) tgxdx = \int \dfrac{tgx}{cos^2 x} dx -$

$- \int tgxdx = \left| \dfrac{1}{cos^2 x} dx = d(tgx) \right| = \int tgxd(tgx) - \int tgxdx = \dfrac{tg^2 x}{2} + ln|cos\,x| + C$.

Приклад 12.4. Знайти інтеграл $\int ctg^4 xdx$.

Розв'язання. $\int ctg^4 xdx = |ctgx = t| = -\int \dfrac{t^4}{t^2+1} dt = -\int \dfrac{(t^4-1)+1}{t^2+1} dt =$

$= -\int \dfrac{(t^2-1)(t^2+1)+1}{t^2+1} dt = -\int \dfrac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^2+1} dt - \int \dfrac{dt}{t^2+1} = -\int (t^2-1) dt - \int \dfrac{dt}{t^2+1} =$

$= -\int t^2 dt + \int dt - \int \dfrac{dt}{t^2+1} = -\dfrac{t^3}{3} + t - arctgt + C = -\dfrac{ctg^3 x}{3} + ctgx - arctg(ctgx) + C$.

12.1.3. Інтеграли виду $\int sin\,mx \cdot cos\,nxdx$, $\int cos\,mx \cdot cos\,nxdx$, $\int sin\,mx \cdot sin\,nxdx$

Ці інтеграли спрощуються застосуванням формул перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$sin\,mx \cdot cos\,nx = \dfrac{1}{2}[sin(m+n)x + sin(m-n)x]$;

$cos\,mx \cdot cos\,nx = \dfrac{1}{2}[cos(m+n)x + cos(m-n)x]$;

$sin\,mx \cdot sin\,nx = \dfrac{1}{2}[cos(m-n)x - cos(m+n)x]$.

Приклад 12.5. Знайти інтеграл $\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx$.

Розв'язання. $\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cos 5x -$
$- \cos x + C$.

12.1.4. Інтеграли виду $\int R(\sin x, cox)dx$

Для інтегралів такого виду, де $R(\sin x, \cos x)$ – раціональна функція, часто застосовують універсальну тригонометричну підстановку:

$$tg\frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad (-\pi < x < \pi).$$

Приклад 12.6. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = \left| tg\frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 5} =$

$$= \int \frac{2dt}{4 - 4t^2 + 6t + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} = \left| \begin{matrix} t+3 = z \\ dt = dz \end{matrix} \right| = 2\int \frac{dz}{z^2} = 2\cdot\frac{z^{-1}}{-1} + C =$$
$$= -\frac{2}{z} + C = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{tg\frac{x}{2} + 3} + C.$$

Зауваження 12.1. Взагалі, універсальна підстановка у багатьох випадках приводить до складних обчислень, бо при її застосуванні $\sin x$ і $\cos x$ виражаються через t у вигляді раціональних дробів, що містять t^2.

У деяких частинних випадках інтеграли виду 12.1.4. можна значно спростити.

12.2. Інтегрування найпростіших ірраціональностей

При інтегруванні виразів, що містять дробові степені змінної інтегрування (тобто ірраціональності), методом підстановки зводять підінтегральну функцію до раціонального дробу. Розглянемо декілька випадків.

12.2.1. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен у знаменнику

Ці інтеграли виду $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Вони приводяться до табличних шляхом виділення повного квадрата в квадратному тричлені:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Приклад 12.7. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$

$$= \left|\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C = ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

Приклад 12.8. Знайти $\int \frac{x-1}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{x-1}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx = \left|\begin{matrix} -x^2+6x-8=-\left(x^2-6x+9-9\right)-8= \\ =-\left((x-3)^2-9\right)-8=-(x-3)^2+9- \\ -8=-(x-3)^2+1 \end{matrix}\right| =$

$$=\int\frac{x-1}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx=\left|\begin{matrix}x-3=t\\dx=dt\\x=t+3\end{matrix}\right|=\int\frac{t+3-1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{t+2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}+2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{-2tdt}{\sqrt{1-t^2}}+2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-t^2}+2\arcsin t+C=-\sqrt{1-(x-3)^2}+$$

$$+2\arcsin(x-3)+C=-\sqrt{6x-x^2-8}+2\arcsin(x-3)+C.$$

12.2.2. Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt[k]{x},\sqrt[l]{x},...,\sqrt[m]{x}\right)dx$

Такі інтеграли зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки $x=t^s$, де $S=HCK(k,l,...,m)$ – найменше спільне кратне чисел $k,l,...,m$.

Приклад 12.9. Знайти $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}}$.

Розв'язання. Маємо $\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{5}{4}}}$. Спільний знаменник дробових показників степенів $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ змінної x $S=HCK(2;3;4)=12$. Тому зробимо підстановку $x=t^{12}$:

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}}=\left|\begin{matrix}x=t^{12}\\dx=12t^{11}dt\\t=\sqrt[12]{x}\end{matrix}\right|=\int\frac{\sqrt{t^{12}}\cdot 12t^{11}dt}{\sqrt[3]{\left(t^{12}\right)^4}-\sqrt[4]{\left(t^{12}\right)^5}}=12\int\frac{t^6\cdot t^{11}dt}{t^{16}-t^{15}}=$$

$$=12\int\frac{t^{17}dt}{t^{15}(t-1)}=12\int\frac{t^2}{t-1}dt=12\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=12\left(\int\frac{(t-1)(t+1)}{t-1}dt+\int\frac{dt}{t-1}\right)=$$

$$=12\left(\int(t+1)dt+\int\frac{dt}{t-1}\right)=12\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=12\left(\frac{\sqrt[12]{x^2}}{2}+\sqrt[12]{x}+\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|\right)+$$

$$+C=12\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+\sqrt[12]{x}+\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|\right)+C.$$

12.2.3. Інтеграли виду $\int R\left(\sqrt[k]{ax+b}, \sqrt[l]{ax+b}, ..., \sqrt[m]{ax+b}\right)dx$

Підінтегральний вираз містить дробові степені лінійного двочлена $(ax+b)$. У цьому випадку доцільно зробити підстановку $ax+b=t^s$, де $s=НСК(k,l,m)$.

Приклад 12.10. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{array}{l} s=НСК(2;3)=6 \Rightarrow x+1=t^6 \\ dx=6t^5dt; \quad t=\sqrt[6]{x+1} \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{6t^5dt}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}} = 6\int \frac{t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} = 6\left(\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt - \int \frac{dt}{t+1} \right) =$$

$$= 6\left(\int (t^2-t+1)dt - \int \frac{dt}{t+1} \right) = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - ln|t+1| \right) + C = 6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{3} - \frac{\sqrt[6]{(x+1)^2}}{2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[6]{x+1} - ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right| \right) + C.$$

12.2.4. Інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[b]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right)dx$

Такі інтеграли раціоналізуються підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$, де $s=НСК$ $(k,l,...,m)$.

Приклад 12.11. Знайти $\int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} \frac{dx}{2x+1}$.

Розв'язання. $\int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} \frac{dx}{2x+1} = \left| \begin{array}{l} \frac{2x-1}{2x+1}=t^2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx=\frac{2tdt}{(1-t^2)^2}; 2x+1=\frac{2}{1-t^2} \end{array} \right| =$

$$=\int \frac{t\cdot 2tdt}{\frac{2}{1-t^2}\cdot\left(1-t^2\right)^2}=\int\frac{t^2dt}{1-t^2}=-\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=-\int\left(\frac{t^2-1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-\int dt-$$

$$-\int\frac{dt}{t^2-1}=-t-\frac{1}{2}ln\frac{t-1}{t+1}+C=-\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}-\frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}}\right|+C.$$

12.2.5. Тригонометричні підстановки

Метою тригонометричних підстановок є звільнення від квадратного кореня у підінтегральному виразі. Розглянемо наступні інтеграли, де R є раціональною функцією.

1. $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $a=const$. Тут скористаємося підстановкою $x=a\,sin\,t$ $\left(x=a\,cos\,t\right)$, де $dx=a\,cos\,tdt$, $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\,sin^2\,t}=a\sqrt{1-sin^2\,t}=a\sqrt{cos^2\,t}=a\,cos\,t$

2. $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ – підстановка $x=a\,tg\,t\left(x=a\,ctg\,t\right)$, $dx=\frac{a\,dt}{cos^2\,t}$, $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2tg^2t}=a\sqrt{1+tg^2t}=a\sqrt{\frac{1}{cos^2\,t}}=\frac{a}{cos\,t}$.

3. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ – підстановка $x=\frac{a}{sin\,t}\left(x=\frac{a}{cos\,t}\right)$, $dx=-a\frac{sin\,t}{cos^2\,t}dt$; $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{sin^2\,t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1-sin^2\,t}{sin^2\,t}}=a\sqrt{\frac{cos^2\,t}{sin^2\,t}}=a\frac{cos\,t}{sin\,t}=a\,ctg\,t$.

Зауваження 12.2. Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можна звести, виділивши під знаком радікала повний квадрат, до одного із трьох зазначених вище інтегралів.

Приклад 12.12. Знайти $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}} = \left| \begin{matrix} x=\sqrt{9}\cdot tgt; & t = arctg\,\frac{x}{3} \\ dx = \frac{3}{cos^2\,t}dt & \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{3dt}{9tg^2 t\cdot cos^2\,t\cdot\sqrt{9+9tg^2 t}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\frac{sin^2\,t}{cos^2\,t}\cdot cos^2\,t\cdot\sqrt{9\left(1+tg^2 t\right)}} = \frac{1}{30}\int\frac{dt}{sin^2\,t\cdot\frac{3}{cos\,t}} =$$

$$= \frac{1}{9}\int\frac{cos\,tdt}{sin^2\,t} = \frac{1}{9}\int\frac{d(sin\,t)}{sin^2\,t} = \frac{1}{9}\cdot\frac{(sin\,t)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{9\,sin\,t} + C = -\frac{1}{9\,sin\left(arctg\,\frac{x}{3}\right)} + C$$

Приклад 12.13. Знайти $\int\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$.

Розв'язання. $\int\sqrt{-\left(x^2-2x\right)+3}dx = \int\sqrt{-\left(x^2-2x+1-1\right)+3}dx =$

$$= \int\sqrt{-(x-1)^2+1+3}dx = \int\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x-1 = 2\,sin\,t;\ t = arcsin\,\frac{x-1}{2} \\ dx = 2\,cos\,tdt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\sqrt{4-4\,sin^2\,t}\cdot 2\,cos\,tdt = 2\cdot 2\int\sqrt{1-sin^2\,t}\cdot cos\,tdt = 4\int cos\,t\cdot cos\,tdt = 4\int cos^2\,tdt =$$

$$= 4\int\frac{1+cos\,2t}{2}\,dt = 2\left(\int dt + \int cos\,2tdt\right) = 2\left(t+\frac{1}{2}\,sin\,2t\right) + C = 2\left(arcsin\,\frac{x-1}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,sin\left(2\,arcsin\,\frac{x-1}{2}\right)\right) + C.$$

Зауваження 12.3. Зауважимо, що різні способи інтегрування можуть привести до різних аналітичних виразів первісної. Проте ми отримаємо вирази, які відрізняються хіба, що на сталу.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 15. ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Приклад 15.1. Обчислити інтеграл**:** $\int\frac{dx}{4\,sin\,x+3\,cos\,x+4}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 4} = \left| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x = 2arctgt; & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 4} = 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 4 + 4t^2} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 8t + 7} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{\left(t^2 + 2\cdot 4t + 16\right) - 16 + 7} = 2\int \frac{dt}{(t+4)^2 - 9} = \frac{2}{6} ln\frac{t+4-3}{t+4+3} + C = \frac{1}{3} ln\frac{t+1}{t+7} + C = .$$

$$= \frac{1}{3} ln\frac{tg\frac{x}{2} + 1}{tg\frac{x}{2} + 7} + C .$$

Приклад 15.2. Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + 3\sin x}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + 3\sin x} = \left| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x = 2arctgt; & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left[9 + \frac{8\left(1-t^2\right)}{1+t^2} + \frac{6t}{1+t^2}\right]} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 17} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2 + 8} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{t+1}{\sqrt{8}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{tg\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{8}} + C .$$

Приклад 15.3. Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{3 + 4\cos x}$.

$$\textit{Розв'язання.}\int\frac{dx}{3+4\cos x}=\left|\begin{array}{l} t=tg\dfrac{x}{2} \\ x=2arctgt;\quad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left[3+\dfrac{4\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\right]}=2\int\frac{dt}{7-t^2}=\frac{1}{\sqrt{7}}ln\left|\frac{t+\sqrt{7}}{t-\sqrt{7}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{7}}ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+\sqrt{7}}{tg\frac{x}{2}-\sqrt{7}}\right|+C.$$

Приклад 15.4. Обчислити інтеграл: $\int\frac{\cos^7 xdx}{\sin^5 x}$.

$$\textit{Розв'язання.}\int\frac{\cos^7 xdx}{\sin^5 x}=\left\{\begin{array}{l}\sin x=t \\ dt=\cos xdx \\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{array}\right\}=\int\frac{\left(1-t^2\right)^3}{t^5}dt=$$

$$=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^5}dt=\int\frac{dt}{t^5}-3\int\frac{dt}{t^3}+3\int\frac{dt}{t}-\int tdt=-\frac{1}{4t^4}+\frac{3}{2t^2}+3\,ln|t|-\frac{1}{2}t^2+C=$$

$$=-\frac{1}{4\sin^4 x}+\frac{3}{2\sin^2 x}+3\,ln|\sin x|-\frac{\sin^2 x}{2}+C.$$

Приклад 15.5. Обчислити інтеграл: $\int\sqrt[5]{\sin x}\cdot\cos^3 xdx$.

$$\textit{Розв'язання.}\int\sqrt[5]{\sin x}\cdot\cos^3 xdx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t \\ dt=\cos xdx \\ \cos^3 xdx=\cos^2 x\cdot\cos xdx= \\ =\left(1-\sin^2 x\right)\cos xdx=\left(1-t^2\right)dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\sqrt[5]{t}\left(1-t^2\right)dt=\int\left(t^{1/5}-t^{7/5}\right)dt=\frac{t^{6/5}}{6/5}-\frac{t^{12/5}}{12/5}+C=\frac{5}{6}\sqrt[5]{\sin^6 x}-\frac{5}{12}\sqrt[5]{\sin^{12} x}+C.$$

Приклад 15.6. Обчислити інтеграл: $\int\frac{\sin^5 xdx}{\cos^2 x}$.

Розв'язання. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^4 x \sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx}{\cos^2 x} =$

$$= \int \frac{\left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\sin x dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ dt = \sin x dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^2} dt =$$

$$= -\int \left(t^{-2} - 2 + t^2\right) dt = \frac{1}{t} + 2t - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Приклад 15.7. Обчислити інтеграл: $\int \frac{\sin x dx}{3 + 2\cos^2 x}$.

Розв'язання. $\int \frac{\sin x dx}{3+2\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{3+2t^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times$

$$\times \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}} + C = -\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 15.8. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 4\sin x \cos x + 5}.$$

Розв'язання. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 4\sin x\cos x + 5} =$

$$= \left| \begin{matrix} tgx = t & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ x = \operatorname{arctg} t & \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} & \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(2\frac{1}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 5\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{5t^2+4t+7} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{7}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{31}{25}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{t + 2/5}{\sqrt{31/25}} +$$

$$+ C = \frac{1}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg}\left(\frac{5tgx+2}{\sqrt{31}}\right) + C.$$

Приклад 15.9. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 15\cos^2 x}.$$

Розв'язання. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 15\cos^2 x} =$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{3\left(tg^2 x + 2tgx - 5\right)} dx = \left\{\begin{array}{l} tgx = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(tgx) = dt \end{array}\right\} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + 2t - 5} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{dt}{(t+1)^2 - 6} = \frac{1}{6\sqrt{6}} \ln\left|\frac{tgx + 1 - \sqrt{6}}{tgx + 1 + \sqrt{6}}\right| + C.$$

Приклад 15.10. Обчислити інтеграл: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 \cos^6 x}$.

Розв'язання. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 \cos^6 x} = \left|\begin{array}{ll} tgx = t & \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ x = arctgt & \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right| =$

$$= \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)^3}} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^2} dt = \int \frac{1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6}{t^2} dt =$$

$$= \int \left(t^{-2} + 3 + 3t^2 + t^4\right) dt = -\frac{1}{t} + 3t + \frac{3t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{tgx} + 3tgx + tg^3 x +$$

$$+ \frac{tg^5 x}{5} + C = -ctg\, x + 3tg\, x + tg^3 x + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

Приклад 15.11. Обчислити інтеграл: $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}} dx$.

Розв'язання. $\int\sqrt{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^7 x}}\,dx = \left|\begin{array}{ll} tgx = t & \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ x = arctgt & \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right| =$

$$= \int\sqrt{\frac{t^3\left(1+t^2\right)^{7/2}}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}}\,dt = \int\sqrt{t^3\left(1+t^2\right)^2} = \int\left(1+t^2\right)t^{3/2}\,dt = \int\left(t^{3/2} + t^{7/2}\right)dt =$$

$$= \frac{t^{5/2}}{5/2} + \frac{t^{9/2}}{9/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{tg^5 x} + \frac{2}{9}\sqrt{tg^9 x} + C.$$

Приклад 15.12. Обчислити інтеграл: $\int\dfrac{tg^3 x dx}{1+tgx}$.

Розв'язання. $\int\dfrac{tg^3 x dx}{1+tgx} = \left|\begin{array}{ll} tgx = t & dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ x = arctg\,t & \end{array}\right| = \int\dfrac{t^3 dt}{(1+t)\left(1+t^2\right)}$.

$\dfrac{t^3}{(1+t)\left(1+t^2\right)}$ – неправильний раціональний дріб. Щоб його про інтегрувати треба спочатку виділити цілу частину, а потім розкласти отриманий правильний раціональний дріб на простіші раціональні дроби (лекція11).

$(1+t)\left(1+t^2\right) = t^3 + t^2 + t + 1$;

$$\begin{array}{r|l} -\,t^3 & t^3 + t^2 + t + 1 \\ \underline{t^3 + t^2 + t + 1} & 1 \\ -t^2 - t - 1. & \end{array}$$

Отже, $\dfrac{t^3}{(1+t)\left(1+t^2\right)} = 1 - \dfrac{t^2+t+1}{(1+t)\left(1+t^2\right)}$;

$\dfrac{t^2}{(1+t)\left(1+t^2\right)} = \dfrac{A}{1+t} + \dfrac{Bt+C}{1+t^2} = \dfrac{A\left(1+t^2\right) + Bt(1+t) + C(1+t)}{(1+t)\left(1+t^2\right)}$;

$t^2 = A\left(1+t^2\right) + Bt(1+t) + C(1+t)$;

$$\begin{array}{c|l} t=-1 & 1=2A \quad \Rightarrow \quad A={}^1\!/_2 \\ t^2 & 1=A+B \quad \Rightarrow \quad B={}^1\!/_2 \\ t & 0=B+C \quad \Rightarrow \quad C=-{}^1\!/_2 \end{array}.$$

Таким чином, $\int \frac{tg^3 x}{1+tg^2 x}dx = \int\left(1-\frac{{}^1\!/_2}{1+t}-\frac{1}{2}\frac{t+1}{1+t^2}\right)dt =$

$$= \int dt - {}^1\!/_2 \int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = t - \frac{1}{2}ln|1+t| - \frac{1}{4}ln\left|1+t^2\right| - \frac{1}{2}arctg\,t +$$

$$+C = tg\,x - \frac{1}{2}ln|1+tg\,x| - \frac{1}{4}ln\left|1+tg^2 x\right| - \frac{1}{2}x + C.$$

Приклад 15.13. Обчислити інтеграл: $\int sin^4 3xdx$**.**

Розв'язання. $\int sin^4 3x\,dx = \int \left(sin^2 3x\right)^2 dx = \int\left(\frac{1-cos\,6x}{2}\right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 6x + cos^2 6x\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 6x + \frac{1+cos\,12x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 6x+\frac{1}{2}cos\,12x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{6}sin\,6x+\frac{1}{24}sin\,12x\right)+C = \frac{3}{8}x -$$

$$-\frac{1}{12}sin\,6x + \frac{1}{96}sin\,12x + C.$$

Приклад 15.14. Обчислити інтеграл: $\int sin^2 x\,cos^4 xdx$.

Розв'язання. $\int sin^2 x\,cos^4 xdx = \int \frac{1-cos\,2x}{2}\left(\frac{1+cos\,2x}{2}\right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{8}\int(1-cos\,2x)(1+cos\,2x)(1+cos\,2x)dx = \frac{1}{8}\int\left(1-cos^2 2x\right)(1+cos\,3x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int sin^2 2x(1+cos\,2x)dx = \frac{1}{8}\int sin^2 2x + \frac{1}{8}\int sin^2 2x\,cos\,2xdx = \frac{1}{8}\int\frac{1-cos\,4x}{2}dx +$$

$$+\left|\begin{array}{l} sin\,2x = t \\ dt = 2\cos 2xdx \end{array}\right| + \frac{1}{16}\int t^2 dt = \frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}sin\,4x\right)+\frac{1}{16}\frac{t^3}{3}+C = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}sin\,4x +$$

$$+\frac{sin^3 2x}{48}+C.$$

Приклад 15.15. Обчислити інтеграл : $\int sin\,2x\,cos\,5xdx$.

Розв'язання. $\int sin\,2x\,cos\,5xdx = \frac{1}{2}\int\left(sin(-3x) + sin\,7x\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(sin\,7x -\right.$

$\left.- sin\,3x\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}cos\,7x + \frac{1}{3}cos\,3x\right) + C = -\frac{1}{14}cos\,7x + \frac{1}{6}cos\,3x + C$.

Приклад 15.16. Обчислити інтеграл: $\int cos\frac{x}{3}\cdot cos\frac{x}{5}dx$.

Розв'язання. $\int cos\frac{x}{3}\cdot cos\frac{x}{5}dx = \frac{1}{2}\int\left(cos\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{5}\right) + cos\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{5}\right)\right)dx =$

$= \frac{1}{2}\int\left(cos\frac{8x}{15} + cos\frac{2x}{15}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{8}sin\frac{8x}{15} + \frac{15}{2}sin\frac{2x}{15}\right) + C$.

Приклад 15.17. Обчислити інтеграл: $\int sin\,7x\,sin\,2xdx$.

Розв'язання. $\int sin\,7x\,sin\,2xdx = \frac{1}{2}\int cos\,5xdx - \frac{1}{2}\int cos\,9xdx = \frac{1}{10}sin\,5x -$

$-\frac{1}{18}sin\,9x + C$.

Приклад 15.18. Обчислити інтеграл: $\int sin10x\,cos7x\,cos4xdx$.

Розв'язання. $\int sin10x\,cos7x\,cos4xdx = \int sin10\left[x\,cos\,7x\,cos\,4x\right]dx =$

$= \frac{1}{2}\int sin\,10\,x\,cos\,11\,xdx + \frac{1}{2}\int sin\,10\,x\,cos\,3\,xdx = \frac{1}{4}\int sin\,21\,xdx - \frac{1}{4}\int sin\,xdx +$

$+\frac{1}{4}\int sin\,13xdx + \frac{1}{4}\int sin\,7xdx = -\frac{1}{84}cos\,21x - \frac{1}{4}cos\,x - \frac{1}{52}cos\,13x - \frac{1}{28}cos\,7x + C$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int\frac{dx}{3\,cos\,x + 2\,sin\,x + 1}$;
2. $\int\frac{dx}{4\,cos\,x + 5}$;
6. $\int tg^3\,x\,dx$;
7. $\int\frac{1 - tgx}{1 + 2tgx}dx$;

3. $\int \frac{dx}{9\cos^2 x - 1}$;

8. $\int \sqrt[3]{\sin x}\cos^5 x\,dx$;

4. $\int \frac{\sin x\,dx}{9\cos^2 x - 1}$;

9. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx$;

5. $\int \frac{dx}{9\cos^2 x + 4\sin x\cos x + 3}$;

10. $\int \frac{\sin x}{\cos^8 x}dx$;

11. $\int \sin^6 x dx$;

12. $\int \sin 5x\cos 3x\,dx$;

13. $\int \cos^2 5x\sin^2 5x\,dx$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 16. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРАЦІОНАЛЬНОСТЕЙ

Приклад 16.1. Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + 3t^2} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2(t+3)} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+3} =$

$$= 6\int \frac{t^3 + 27 - 27}{t+3}dt = 6\int \frac{(t+3)(t^2 - 3t + 9) - 27}{t+3}dt = 6\int \left(t^2 - 3t + 9 - \frac{27}{t+3} \right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 9t - 27\ln|t+3| \right) + C = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - 27\ln\left|\sqrt[6]{x} + 3\right| \right) + C.$$

Приклад 16.2. Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{x + \sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{2x+1}} = \left| \begin{matrix} 2x + 1 = t^2 & \\ 2x = t^2 - 1 & dx = tdt \\ x = \frac{1}{2}(t^2 - 1) & \end{matrix} \right| = \int \frac{tdt}{\frac{1}{2}(t^2 - 1) + t} =$

$$= 2\int \frac{tdt}{t^2 - 1 + 2t} = 2\int \frac{tdt}{(t+1)^2 - 2} = 2\int \frac{(t+1) - 1}{(t+1)^2 - 2}dt = 2\int \frac{(t+1)dt}{(t+1)^2 - 2} - 2\int \frac{dt}{(t+1)^2 - 2} =$$

$$= ln\left|(t+1)^2-2\right| - ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C = ln\left|2x+\sqrt{2x+1}\right| - ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}+1-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+1+\sqrt{2}}\right| + C$$

Приклад 16.3. Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left\{ \sqrt[4]{1-2x} = t; dt = \frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-dx}{2t^3} \right\} =$

$$= \int \frac{-2t^3dt}{t^2-t} = -2\int \frac{t^2dt}{t-1} = -2\int\left(t+\frac{t}{t-1}\right)dt = -2\int tdt - 2\int \frac{t}{t-1}dt =$$

$$= -t^2 - 2\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt = -t^2 - 2t - 2\,ln|t-1| + C = -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} -$$

$$- 2\,ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right| + C.$$

Приклад 16.4. Обчислити інтеграл: $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1} = t; \quad x-1 = t^{12}; \\ dx = 12t^{11}dt; \end{array} \right\} =$

$$= \int \frac{\left(t^4+t^3\right)12t^{11}dt}{t^{12}\left(1+t^2\right)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt == 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt + \int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right) =$$

$$= 12\left(\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt + \int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right) = 12\int tdt - 12\int \frac{tdt}{t^2+1} + 12\int dt -$$

$$- 12\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2 + 12t - 6\,ln\left(t^2+1\right) - 12arctgt + C = 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} -$$

$$- 6\,ln\left(\sqrt[6]{x-1}+1\right) - 12arctg\sqrt[12]{x-1} + C.$$

Приклад 16.5. Обчислити інтеграл: $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$.

Розв'язання. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3} = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^3,\ x+1 = t^3x - t^3,\ dx = \frac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2} \\ x+1 = t^3(x-1),\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \end{array} \right| =$

$$=\int t\frac{-6t^2}{\left(t^3-1\right)\left(\frac{t^3+1}{t^3-1}-1\right)^3}=-6\int\frac{t^3dt}{\left(t^3-1\right)^2\frac{\left(t^3+1-t^3+1\right)^3}{\left(t^3-1\right)^3}}=-\frac{3}{4}\int t^3\left(t^3-1\right)dt=$$

$$=-\frac{3}{4}\int\left(t^6-t^3\right)dt=-\frac{3}{4}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{7}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}\right)+C.$$

Приклад 16.6. Обчислити інтеграл: $\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}$.

Розв'язання. $\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}dx=\left|\begin{array}{l}x=2\sin t\\ dx=2\cos t\,dt\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{\left(4-4\sin^2 t\right)^3}\,2\cos t\,dt}{64\sin^6 t}=$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=\left|\begin{array}{ll}tg\,t=z & \cos^2 t=\frac{1}{1+z^2}\\ t=arctg\,z & \\ dt=\frac{dz}{1+z^2} & \sin^2 t=\frac{z^2}{1+z^2}\end{array}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+z^2\right)^3}{\left(1+z^2\right)^2z^6}\frac{dz}{\left(1+z^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^6}=\frac{1}{4}\int z^{-6}dz=\frac{1}{4}\frac{z^{-5}}{-5}+C=-\frac{1}{20z^5}+C=\left|tg\,t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right|=$$

$$=-\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}{20x^5}+C.$$

Приклад 16.7. Обчислити інтеграл: $\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1+x^2}}=\left|\begin{array}{l}x=tg\,t\\ dx=\frac{dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(1-tg^2 t\right)\sqrt{1+tg^2 t}}=$

$$=\int\frac{dt}{\cos^2 t\left(\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)\frac{1}{\cos t}}=\int\frac{\cos t\,dt}{1-2\sin^2 t}=\left|\begin{array}{l}\sin t=z\\ dz=\cos t\,dt\end{array}\right|=\int\frac{dz}{1-2z^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}z}{1-\sqrt{2}z}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\,\frac{tg\,t}{\sqrt{1+tg^2 t}}}{1-\sqrt{2}\,\frac{tg\,t}{\sqrt{1+tg^2 t}}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+C$$

Приклад 16.8. Обчислити інтеграл: $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

Розв'язання. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\left|\begin{array}{l} x=3/\cos t \\ dx=\frac{3\sin tdt}{\cos^2 t}\end{array}\right|=\int\frac{3\sin tdt}{\cos^2 t\,\frac{9}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}}=$$

$$=\frac{1}{9}\int\cos t\,dt=\frac{1}{9}\sin t=\left|\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right|=\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}+C$$

Приклад 16.9. Обчислити інтеграл: $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{4+x^2}}$.

Розв'язання. $$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{4+x^2}}=\left\{\begin{array}{l} x=2tgt;\, dx=\frac{2}{\cos^2 t}dt; \\ \sqrt{4+x^2}=\frac{2}{\cos t}; \end{array}\right\}=\int\frac{2\cos tdt}{\cos^2 t\,16\,tg^4 t2}=$$

$$=\int\frac{\cos^3 tdt}{16\sin^4 t}=\frac{1}{16}\int\frac{\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t}{\sin^4 t}=-\frac{1}{48\sin^3 t}+\frac{1}{16\sin t}+C=$$

$$=\left\{\sin t=\sqrt{1-\frac{4}{4+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right\}=-\frac{\left(4+x^2\right)^{3/2}}{48x^3}+\frac{4\sqrt{a^2+x^2}}{16x}+C.$$

Приклад 16.10. Обчислити інтеграл: $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання. $$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{\cos t};\, dx=\frac{tgt}{\cos t}dt; \\ \sqrt{x^2-1}=tgt; \end{array}\right\}=\int\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}\cdot tgt}dt=$$

$$= \int \frac{\sin t \cos^4 t}{\cos^2 t \sin t} dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C =$$

$$= \left\{ \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right\} = \frac{1}{2}\left(\arccos \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \right) + C .$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x}$;
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x - 1} + 4\sqrt{2x - 1}}$;
3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{3x + 2} + 5}$;
4. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$;
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x + 7}}$;
6. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 4}}$;
7. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навч. посібник. – К.: А.С.К. 2005. – 648 с.
2. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення – 3-тє вид., випр. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
3. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П.Дубовик, І.І.Юрик, І.П.Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 480 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 608 с.

Навчальне видання

Щербина Ірина Володимирівна
Пасічник Ірина Володимирівна
Бас Тетяна Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Тем. план 2015, поз. 120

Підписано до друку . Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 6,06. Умов. друк. арк. 5,97. Тираж 100 пр. Замовлення № 104

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ