МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М. КАДИЛЬНИКОВА, Т.П. БАС, І.Л. ШИНКОВСЬКА,
І.П. ЗАЄЦЬ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина II

Дніпропетровськ НМетАУ 2013

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М. КАДИЛЬНИКОВА, Т.П. БАС, І.Л. ШИНКОВСЬКА,
І.П. ЗАЄЦЬ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина ІІ

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 14 від 05.02.2013

Дніпропетровськ НМетАУ 2013

УДК 517(07)
Вища математика. Частина ІІ: Навч. посібник / Т.М. Кадильникова, Т.П. Бас, І.Л. Шинковська та ін. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2013. – 66 с.

Наведені докладні рекомендації до вивчення дисципліни «Вища математика». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями та ілюстраціями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів напряму 6.040106 – екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування.

Іл. 5. Бібліогр.: 7 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.П. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.- мат. наук, проф. (НГУ)
Ю.Я. Годес, канд. фіз.- мат. наук, доц. (ДНУ)

З М І С Т

В С Т У П

Характерною особливістю останніх десятиріч є швидка математизація різних галузей науки, техніки, економіки та управління. Створення нових теорій і технологій, вивчення та прогнозування складних процесів та явищ все частіше зводиться до побудови та дослідження відповідних математичних моделей. Тому сучасний інженер повинен мати досить високий рівень підготовки, що передбачає не тільки знання основ математики, а й добре володіння математичними методами, які застосовуються при розв'язанні задач з спеціальності.

Основне призначення цього навчального посібника – допомогти студентам – екологам в опануванні дисципліни «Вища математика». Зміст та структура посібника цілком відповідають робочій програмі дисципліни для студентів напряму 6.040106 – екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування. У другій частині продовжується знайомство з «Інтегральним численням функції однієї змінної (розглядаються глави «Визначений інтеграл та його застосування» та «Невласні інтеграли»), «Звичайними диференціальними рівняннями» та «Числовими рядами».

Автори сподіваються, що проста побудова посібника, доступне викладання, що супроводжується розв'язанням багатьох прикладів із поясненням, допоможе студентам при самостійній роботі над навчальним матеріалом.

Тема 1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦА. ЗАМІНА ЗМІННОЇ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $a < b$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних частин так, щоб

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Сукупність точок $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ назвемо T-розбиттям відрізка $[a;b]$ на частини. Для кожного з частинних відрізків визначимо його довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 0,1,\ldots,n-1)$ та значення функції $f(\xi_i)$ у довільній точці $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Позначимо через λ - найбільшу довжину серед довжин частинних відрізків, тобто $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$. Утворимо суму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, яка називається ***інтегральною сумою*** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

<u>Означення 1.</u> Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ_n при умові, що найбільша із різниць Δx_i прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частинні відрізки, ані від вибору проміжних точок ξ_i у кожному з частинних відрізків, то вона називається ***визначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Отже, згідно з означенням,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i .$$

Числа a і b називають відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування; функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією; $f(x)dx$ - підінтегральним виразом; x - змінною інтегрування, а відрізок $[a;b]$ - проміжком інтегрування.

<u>Означення 2.</u> Функція $f(x)$, для якої на відрізку $[a;b]$ існує визначений інтеграл, називається ***інтегровною*** на цьому відрізку.

Геометричний зміст визначеного інтеграла полягає в тому, що визначений інтеграл від невід'ємної та інтегровної на відрізку $[a;b]$ функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ та віссю ox:

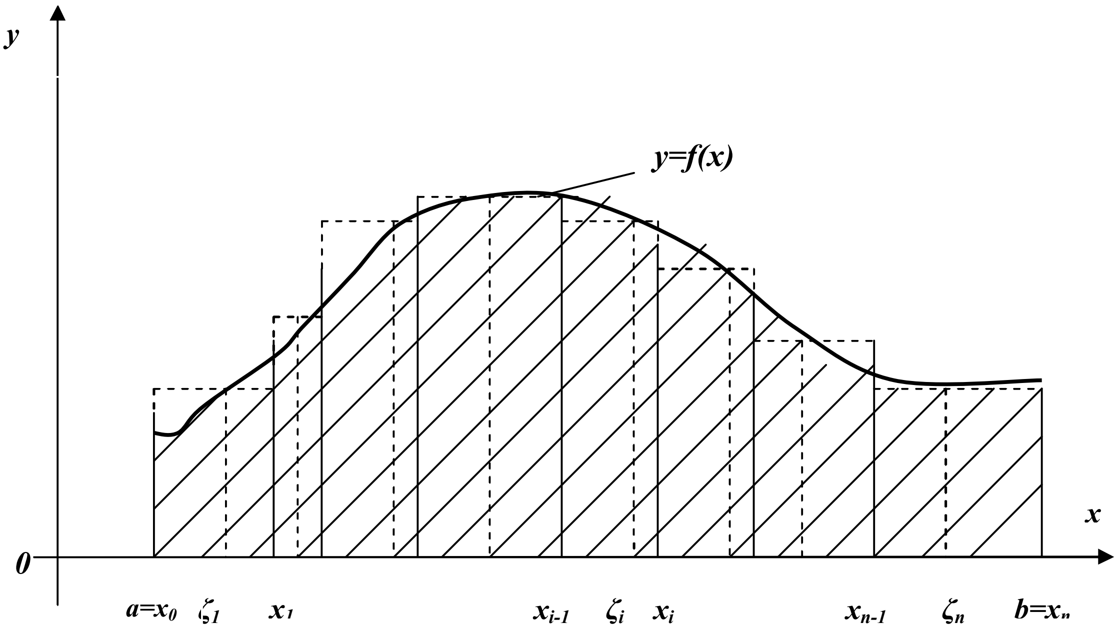


Рис.1.1

Необхідною умовою існування визначеного інтеграла є обмеженість функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Достатньою умовою існування визначеного інтеграла є неперервність функції $f(x)$ на цьому ж відрізку.

Розглянемо деякі основні властивості визначеного інтеграла:

1) Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2) Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3) Для будь-якого довільного сталого числа C справджується рівність:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

4) При переставленні меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

5) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ - інтегровні на відрізку $[a;b]$, то функція $f(x) \pm g(x)$ також є інтегровною на цьому відрізку, причому

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx .$$

6) Якщо функція $f(x)$ - інтегровна на найбільшому з відрізків $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то вона інтегровна і в двох інших і, для будь-якого взаємного розташування точок a,b,c, має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

7) Якщо функція $f(x)$ - інтегровна на відрізку $[a;b]$ $(a < b)$ і всюди на цьому відрізку $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 .$$

Аналогічно маємо, що $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, якщо $f(x) \leq 0$.

Формула Ньютона-Лейбніца

Для пошуку способу обчислення визначеного інтеграла встановимо зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами. Для цього розглянемо $\int_a^x f(t)dt$, де функція $f(x)$ є неперервною на $[a;x]$ та інтегровною на ньому, x - довільна фіксовна точка відрізка $[a;b]$.

Цей інтеграл називають ***визначеним інтегралом із змінною верхньою межею.*** Очевидно, він є функцією від x, тому позначимо його через $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Має місце наступна ***теорема Барроу***:

Якщо функція $f(x)$ - неперервна на $[a;b]$, то функція $\phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ - диференційовна на цьому відрізку, причому $\phi'(x)=f(x)$ для усіх $x\in[a;b]$.

Тобто для всякої неперервної на $[a;b]$ функції завжди існує первісна, та однією з цих первісних є визначений інтеграл із змінною верхнею межею. Таким чином, встановлений зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами.

Ефективний і простий спосіб обчислення визначеного інтеграла дається ***формулою Ньютона-Лейбніца***:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

де $f(x)$ - неперервна на $[a;b]$, $F(x)$ - яка-небудь її первісна.

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

Первісною від даної підінтегральної функції є $F(x)=ln|1+x|$. Обчислимо її значення при верхній границі $F(1)=ln|1+1|=ln2$, при нижній границі $F(0)=ln|1+0|=ln1=0$. За формулою Ньютона-Лейбніца значення інтегралу становить $I=F(1)-F(0)=ln2-0=ln2$.

Розв'язування може бути подане у вигляді

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}=ln|1+x|\Big|_0^1=ln|1+1|-ln|1+0|=ln2-ln1=ln2-0=ln2.$$

2. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}}=arctg\sqrt{3}-arctg0=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$.

3. $\int\limits_2^3 \left(1+2x+3x^2\right)dx = \left(x+2\cdot\frac{x^2}{2}+3\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 = \left(x+x^2+x^3\right)\Big|_2^3 = \left(3+3^2+3^3\right)-$

$-\left(2+2^2+2^3\right) = (3+9+27)-(2+4+8) = 39-14 = 25$.

4. $\int\limits_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}dx = \int\limits_1^8 \frac{2+5x^{\frac{1}{3}}}{x^3}dx = \int\limits_1^8 \left(2x^{-3}+5x^{-8/3}\right)dx = \left(2\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+5\cdot\frac{x^{-5/3}}{-5/3}\right)\Bigg|_1^8$

$= \left(-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^5}}\right)\Bigg|_1^8 = \left(-\frac{1}{64}-\frac{3}{\sqrt[8]{8^5}}\right)-(-1-3) = -\frac{1}{64}-\frac{3}{32}+4 = -\frac{7}{64}+4 = 3\frac{57}{64}$.

5. $\int\limits_2^{13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} = \int\limits_2^{13} (3-x)^{-\frac{4}{5}} = -\frac{(3-x)^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}}\Bigg|_2^{13} = -5\sqrt[5]{3-x}\,\Big|_2^{13} = -5\left(\sqrt[5]{3-13}-\sqrt[5]{3-2}\right) =$

$= -5\left(-\sqrt[5]{10}-1\right) = 5\sqrt[5]{10}+5$.

6. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$.

Первісну можна знайти, використавши формулу пониження степеня: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Отримаємо

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 2\cdot 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

7. $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

Для знаходження первісної в знаменнику виділимо повний квадрат.

$$\int\limits_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int\limits_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+1+9} = \int\limits_2^5 \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}\Bigg|_2^5 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[arctg\frac{5+1}{3}-arctg\frac{2+1}{3}\right] = \frac{1}{3}(arctg 2 - arctg 1) = \frac{1}{3}\left(arctg 2-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}arctg 2-\frac{\pi}{12}.$$

Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

Нехай треба обчислити інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де функція $f(x)$ - неперервна на $[a;b]$. Якщо виконуються умови:

1) функція $\varphi(t)$ неперервна разом із своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $[a;b]$;
2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;
3) при змінюванні t на відрізку $[\alpha;\beta]$ значення функції $x=\varphi(t)$ не виходять за межі відрізка $[a;b]$, то справедлива ***формула заміни змінної*** (або підстановки) у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad \textbf{(1.1)}$$

$$\left(\alpha=\varphi^{-1}(a), \beta=\varphi^{-1}(b)\right).$$

Треба відзначити, що іноді набагато зручніше замість підстановки $x=\varphi(t)$ використовувати так звану «обернену» підстановку $t=\psi(x)$, де функція $\psi(x)$ є строго монотонною і неперервно диференційовною на відрізку $[a;b]$, а множиною її значень є відрізок $[\alpha;\beta]$. Тоді для неї існує обернена функція $x=\psi^{-1}(t)$, яка задовольняє переліченим вище умовам. Отже, в цьому випадку маємо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\psi^{-1}(t)\right)\cdot\left(\psi^{-1}(t)\right)' dt \qquad \textbf{(1.2)}$$

$$\left(\alpha=\psi(a), \beta=\psi(b)\right).$$

Звернемо увагу на те, що на відміну від заміни змінної у невизначеному інтегралі, заміна змінної у визначеному інтегралі не потребує повернення до початкової змінної. Треба лише змінити межі інтегрування за формулами (1.1) або (1.2).

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^4} = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+\left(x^2\right)^2}$.

Зробимо заміну $x^2 = t$. Тоді $2xdx = dt$, $xdx = \frac{1}{2}dt$.

Визначимо нові межі інтегрування. Якщо $x = 0$, то $t = 0^2 = 0$, при $x = 1$ $t = 1^2 = 1$.

Отримаємо:

$$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arctgt \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(arctg1 - arctg0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

2. $$\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x dx = \left| \begin{array}{ll} \cos x = t, & \text{при} \quad x = 0 \quad t = 1 \\ -\sin xdx = dt, & \text{при} \quad x = \pi/2 \quad t = 0 \\ \sin xdx = -dt, & \end{array} \right| = -\int\limits_1^0 t^2 dt.$$

Використаємо властивість 4 і змінюємо межі інтегрування:

$$-\int\limits_1^0 t^2 dt = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

3. $$\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{ll} 1+\ln x = t, & \text{при} \quad x = 1 \quad t = 1 \\ dx/x = dt, & \text{при} \quad x = e \quad t = 2 \end{array} \right| = \int\limits_1^2 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(2^2 - 1^2\right) = \frac{3}{2}.$$

4. $$\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2} = \left| \begin{array}{ll} 1/x = t, & \text{при} \quad x = 1 \quad t = 1 \\ dx/x^2 = -dt, & \text{при} \quad x = 2 \quad t = 1/2 \end{array} \right| = -\int\limits_1^{1/2} e^t dt = \int\limits_{1/2}^1 e^t dt = e^1 - e^{1/2} = e - \sqrt{e}.$$

5. $$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+5tgx}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{ll} 1+5tgx = t, & \text{при} \quad x = \pi/6 \quad t = \frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}} \\ \frac{5dx}{1+t^2} = dt, & \text{при} \quad x = \pi/4 \quad t = 6 \\ \frac{dx}{1+t^2} = \frac{1}{5}dt, & \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\int\limits_{\frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}}}^{6} tdt=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}}}^{6}=\frac{1}{10}\left[36-\left(\frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}}\right)^2\right]=\frac{1}{10}\left(36-\frac{3+10\sqrt{3}+25}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{10}\left(36-\frac{28+10\sqrt{3}}{30}\right)=\frac{1}{10}\left(\frac{108-28+10\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{10}\cdot\frac{80+10\sqrt{3}}{3}=\frac{8+\sqrt{3}}{3}.$$

6. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

Оскільки підінтегральна функція є раціональною відносно $\sin^2 x$, зробимо заміну $tgx=t$.

Тоді $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}=\left|\begin{array}{ll} tgx=t, & \text{при } x=0 \quad t=0 \\ x=arctgt, & \\ dx=\frac{dt}{1+t^2}, & \\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}, & \text{при } x=\pi/4 \quad t=1 \end{array}\right|=$

$$=\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{2t^2}{1+t^2}\right)}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{1+t^2+2t^2}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{3t^2+1}=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}arctg\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\Bigg|_{0}^{1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\sqrt{3}t\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\sqrt{3}-arctg0\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ - неперервно диференційовні на відрізку $[a;b]$, то справедлива формула:

$$\int\limits_{a}^{b} udv=uv\Big|_{a}^{b}-\int\limits_{a}^{b} vdu.$$

Схема використання цієї формули співпадає із обчисленням невизначених інтегралів цим методом.

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx$.

Покладемо $u = x$, $dv = \cos x dx$; тоді $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$. Отримаємо

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx = (x \cdot \sin x)\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = (\pi \cdot \sin\pi - 0) + \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 =$$

$$= -1 - 1 = -2.$$

2. $$\int\limits_0^3 x\,arctgx dx = \left| \begin{array}{ll} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = x^2/2 \end{array} \right| = \left(arctgx \cdot \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \left(arctg3 \cdot \frac{9}{2} - arctg0 \cdot 0 \right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx = \frac{9}{2}arctg3 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}arctg3 - \frac{1}{2}(x - arctgx)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}arctg3 - \frac{1}{2}[(3 - arctg3) - 0] = \frac{9}{2}arctg3 - \frac{3}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}arctg3 = 5arctg3 - \frac{3}{2}.$$

3. $$\int\limits_0^{e-1} ln(x+1)dx = \left| \begin{array}{ll} u = ln(x+1), & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| = (x\,ln(x+1))\Big|_0^{e-1} - \int\limits_0^{e-1} \frac{xdx}{x+1} =$$

$$= ((e-1)ln(e-1+1) - 0) - \int\limits_0^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = e - 1 - \int\limits_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= e - 1 - (x - ln(x+1))\Big|_0^{e-1} = e - 1 - [(e - 1 - ln(e-1+1)) - (0 - ln(0+1))] =$$

$$= e - 1 - [e - 1 - 1] = e - 1 - e + 2 = 1.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
2. $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$;
3. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^2}$;
4. $\int\limits_{0}^{\pi/2} sin^2\,xdx$;
5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;
6. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\,ln\,x}$;
7. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;
8. $\int\limits_{-\pi}^{3\pi/2} sin^3\,xdx$;
9. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$;
10. $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$;
11. $\int\limits_{0}^{1} arcsin\,xdx$;
12. $\int\limits_{1}^{e} \frac{ln\,x}{\sqrt{x}}dx$.

Тема 2. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Невласні інтеграли першого роду (з нескінченними межами)

Як відомо, ми розглядали визначений інтеграл на скінченному відрізку $[a;b]$. Проте у ряді задач стає потреба розглядати інтеграли на нескінченних проміжках $[a;\infty)$, $(-\infty;b]$, $(-\infty;+\infty)$. Безпосередньо поширити поняття визначеного інтеграла на ці випадки не можна. Тому введемо нові означення. Отже, нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[a;B]$ де $B > a$. Тоді існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, який є функцією своєї верхньої межі.

Означення 1. ***Невласним інтегралом першого роду*** функції $f(x)$ ***на проміжку*** $[a;+\infty)$ називають границю $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx$ і записують

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx\,. \qquad \textbf{(2.1)}$$

У цьому випадку інтеграл називають ***збіжним*** (якщо границя скінченна) і ***розбіжним*** (якщо границя не існує або нескінченна), а підінтегральну функцію – інтегровною на проміжку $[a;+\infty)$.

Нехай тепер функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;b]$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[A;b]$, де $A < b$. Тоді визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ є функцією своєї нижньої межі.

Означення 2. ***Невласним інтегралом першого роду*** функції $f(x)$ ***на проміжку*** $(-\infty;b]$ називають границю $\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)dx$ і записують

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)dx\,. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Збіжність (розбіжність) цього інтеграла й інтегровність функції $f(x)$ на відповідному проміжку визначають так само, як і для інтеграла (2.1).

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$ і неперервна на будь-якому відрізку $[a;b]$, то можна означити інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{C} f(x)dx + \int\limits_{C}^{+\infty} f(x)dx\,, \qquad \textbf{(2.3)}$$

де C - довільне дійсне число.

Інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^C f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int\limits_C^B f(x)dx \qquad \textbf{(2.4)}$$

називається також ***невласним інтегралом першого роду*** функції $f(x)$ на ***проміжку*** $(-\infty;+\infty)$.

При цьому, якщо обидва інтеграли в правій частині рівності (2.3) збігаються, то невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають ***збіжним***. Якщо хоча б один з інтегралів правої частини рівності (2.3) розбігається, то невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають ***розбіжним***.

Зразки розв'язування задач

Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли.

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Згідно з формулою (2.1) матимемо

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to+\infty} ln|x| \Big|_{1}^{B} = \lim_{B\to+\infty}\left(ln|B| - ln\,1\right) = \lim_{B\to+\infty} ln|B| = +\infty .$$

Границя, нескінченна, отже інтеграл розбігається.

2. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-4x+1}dx$.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-4x+1}dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} e^{-4x+1}dx = -\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty} e^{-4x+1}\Big|_{0}^{B} = -\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty}\left(e^{-4B+1} - e^{1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty} e^{-4B+1} + \frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty} e = -\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot e = \frac{e}{4}.$$ Границя скінченна, заданий інтеграл збігається.

3. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty} arctgx \Big|_{1}^{B} = \lim_{B\to+\infty}\left(arctgB - arctg1\right) =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} arctgB - \lim_{B\to+\infty} arctg1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$ Границя скінченна, інтеграл збігається.

4. $\int\limits_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2}$.

Згідно з формулою (2.2) будемо мати

$$\int\limits_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2} = -\frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{(3x-1)}\Bigg|_{A}^{-5} = -\frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{(3\cdot(-5)-1)} +$$

$$+\frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{3A-1} = \frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{3A-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{13}\cdot 0 = \frac{1}{48}.$$

Границя скінченна, інтеграл збігається.

5. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+3}$.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+3} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} \frac{xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2} \lim_{B\to+\infty} ln\left|x^2+3\right| \Bigg|_{0}^{B} = \frac{1}{2} \lim_{B\to+\infty} \left(ln\left|B^2+3\right| - ln\,3\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{B\to+\infty} ln\left(B^2+3\right) - \frac{1}{2} \lim_{B\to+\infty} ln\,3 = \infty.$$

Границя нескінченна, отже інтеграл розбігається.

6. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}$.

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{e}^{B} \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}.$$

Як бачимо, визначений інтеграл не є табличним, тому обчислимо його окремо, розглядаючи як невизначений.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}} = \left| \begin{array}{l} t = ln\,x \\ dt = dx/x \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ln\,x} + C.$$

Повертаємось до границі:

$$\lim_{B\to+\infty} \int\limits_{e}^{B} \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}} = 2 \lim_{B\to+\infty} \sqrt{ln\,x}\,\Bigg|_{e}^{B} = 2 \lim_{B\to+\infty} \left(\sqrt{ln\,B} - \sqrt{ln\,e}\right) = 2 \lim_{B\to+\infty} \sqrt{ln\,B} -$$

$$-2\sqrt{ln\,e} = 2 \lim_{B\to+\infty} \sqrt{ln\,B} - 2\cdot 1 = \infty.$$

Границя нескінченна, тому інтеграл розбігається.

7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17}$.

Згідно з формулою (2.3) розіб’ємо наш невласний інтеграл на суму двох невласних інтегралів, а саме:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+17} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+17} +$$

$$+ \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} \frac{dx}{x^2+2x+17}.$$

Обчислимо окремо невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+17} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x\cdot 1+1\right)-1+17} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+16} = \frac{1}{4}\cdot arctg\frac{x+1}{4} + C.$$

Повертаємось до границь:

$$\frac{1}{4}\lim_{A\to-\infty} arctg\frac{x+1}{4}\Bigg|_A^0 + \frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty} arctg\frac{x+1}{4}\Bigg|_0^B = \frac{1}{4}\lim_{A\to-\infty}\left(arctg\frac{1}{4} - arctg\frac{A+1}{4}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty}\left(arctg\frac{B+1}{4} - arctg\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(arctg\frac{1}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Границя скінченна, наш інтеграл збігається.

Зауваження. При обчисленні границь слід мати на увазі, що $arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, $arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

Невласні інтеграли другого роду (від необмежених функцій)

Як відомо, необхідною умовою інтегрованості функції на відрізку $[a;b]$ є її обмеженість. Проте є задачі, що приводять до розгляду інтеграла від функції, яка майже на всьому відрізку обмежена і стає необмеженою поблизу деякої точки, наприклад, поблизу однієї чи обох меж. Тоді природно поширити поняття визначеного інтеграла і на такі функції, ввівши при цьому додаткові означення.

Отже, нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, крім, можливо, кінців, і є необмеженою, наприклад, поблизу точки $x=a$, зокрема на відрізку $[a;a+\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$. Нехай $f(x)$ є обмеженою і інтегрованою на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon;\ b]$. Точку a при цьому називають ***особливою точкою*** функції $f(x)$.

<u>Означення 1.</u> Невласним інтегралом другого роду функції $f(x)$ на проміжку $(a;b]$ називається границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\ . \tag{2.5}$$

Якщо ця границя скінченна, то інтеграл називається ***збіжним***. Якщо границя нескінченна, або взагалі не існує, тоді інтеграл називається ***розбіжним***. Функція $f(x)$ при цьому називається інтегрованою на даному проміжку.

Нехай тепер функція $f(x)$ є обмеженою і інтегрованою на будь-якому відрізку $[a;b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$ і не є інтегрованою на відрізку $[b-\varepsilon;b]$.

<u>Означення 2.</u> Невласним інтегралом другого роду функції $f(x)$ на проміжку $[a;b)$ називається границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{2.6}$$

У цьому випадку точка b вважається ***особливою точкою*** функції $f(x)$.

Збіжність (розбіжність) інтеграла й інтегрованість функції $f(x)$ на відповідному проміжку визначають так само, як і для інтеграла (2.5). Інші можливі випадки можуть бути зведені до вже розглянутих.

Розглянемо випадок, коли особливими точками функції є одночасно точки $x=a$ й $x=b$. Це означає, що функція $f(x)$ необмежена на $[a;a+\varepsilon]$ та на $[b-\varepsilon;b]$, а на будь-якому відрізку $[\alpha;\beta]\subset(a;b)$ вона є інтегрованою .

Тоді покладають $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, де $x = c$ - довільна точка інтервалу $(a;b)$.

В цьому разі $$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_c^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad \mathbf{(2.7)}$$

Іноді може трапитися випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ є необмеженою поблизу точки $x = c$, яка знаходиться всередині відрізка $[a;b]$. В інших частинах відрізка $[a;b]$ функція $f(x)$ інтегрована. Тобто точка $x = c$ є ***особливою точкою*** функції $f(x)$.

Тоді покладають $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, але тепер у цій рівності обидва інтеграла правої частини означаються формулами (2.5) та (2.6). Позначають: $$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad \mathbf{(2.8)}$$

Висновок про збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ у формулах (2.7) та (2.8) роблять тільки в тому випадку, коли обидві границі правих частин цих формул, знайдені незалежно одна від одної, існують і скінченні. Інтеграл розбігається, якщо хоча б одна з цих границь нескінченна або взагалі не існує.

Зразки розв'язування задач

Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \{x = 0 - \textit{особлива точка}\} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\sqrt{x}\,\Big|_{\varepsilon}^{1} =$

$= 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0}1 - 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\sqrt{\varepsilon} = 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2.$

Границя існує і скінченна, отже інтеграл збігається.

2. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{4-x} = \{x = 4 - \textit{особлива точка}\} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_2^{4-\varepsilon} \frac{dx}{4-x} = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0} ln|4-x|\,\Big|_2^{4-\varepsilon} =$

$$= -\lim_{\varepsilon \to +0}\left(ln|4-4+\varepsilon| - ln|4-2|\right) = -\lim_{\varepsilon \to +0} ln\,\varepsilon + \lim_{\varepsilon \to +0} ln\,2 = \infty,$$

оскільки перша границя нескінченна (при $\varepsilon \to +0$ $\;ln\,\varepsilon \to -\infty$). Тобто наш інтеграл розбігається.

3. $$\int_{-2}^{3}\frac{dx}{x^2-x-6} = \left\{\begin{matrix} x=-2, & x=3- \\ \textit{особливі} & \textit{точки} \end{matrix}\right\} = \int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2-x-6} + \int_{0}^{3}\frac{dx}{x^2-x-6} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\int_{-2+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{x^2-x-6} + \lim_{\varepsilon \to +0}\int_{0}^{3-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-x-6}.$$

Обчислимо інтеграл окремо:

$$\int\frac{dx}{x^2-x-6} = \int\frac{dx}{x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-6} = \int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}} = \frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}ln\left|\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}\right| =$$

$$= \frac{1}{5}ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + C.$$

Повертаючись до границь, отримаємо:

$$\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon \to +0} ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\Bigg|_{-2+\varepsilon}^{0} + \frac{1}{5}\lim_{\varepsilon \to +0} ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|\Bigg|_{0}^{3-\varepsilon} = \frac{1}{5}\lim_{\varepsilon \to +0}\left(ln\left|-\frac{3}{2}\right| - ln\left|\frac{-5+\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right) +$$

$$+\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon \to +0}\left(ln\left|\frac{-\varepsilon}{5-\varepsilon}\right| - ln\left|-\frac{3}{2}\right|\right) = \frac{1}{5}\left(ln\frac{3}{2} - \lim_{\varepsilon \to +0} ln\left|\frac{\varepsilon-5}{\varepsilon}\right|\right) + \frac{1}{5}\left(\lim_{\varepsilon \to +0}\left|\frac{-\varepsilon}{5-\varepsilon}\right| - ln\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\lim_{\varepsilon \to +0} ln\left|\frac{-\varepsilon}{5-\varepsilon}\right| - \lim_{\varepsilon \to +0} ln\left|\frac{\varepsilon-5}{\varepsilon}\right|\right).$$

Оскільки обидві границі нескінченні, то інтеграл розбігається.

4. $$\int_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \{x=4 - \textit{особлива точка}\} = \int_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \int_{4}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\int_{2}^{4-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \lim_{\varepsilon \to +0}\int_{4+\varepsilon}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = -3\lim_{\varepsilon \to +0}\sqrt[3]{4-x}\,\Big|_{2}^{4-\varepsilon} -$$

$$-3\lim_{\varepsilon \to +0}\sqrt[3]{4-x}\,\Big|_{4+\varepsilon}^{6} = -3\lim_{\varepsilon \to +0}\left(\sqrt[3]{4-4+\varepsilon} - \sqrt[3]{2}\right) - 3\lim_{\varepsilon \to +0}\left(\sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{4-4-\varepsilon}\right) =$$

$$=-3\left(\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt[3]{\varepsilon}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{-2}+\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt[3]{-\varepsilon}\right)=-3\left(0-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}+0\right)=6\sqrt[3]{2}\,.$$

Обидві границі скінченні, інтеграл збігається.

5. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\{x=0-\textit{особлива точка}\}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx\,.$

Обчислимо інтеграл окремо:

$$\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\left|\begin{array}{l}1/x=t\\ -dt/x^2=dt\end{array}\right|=-\int e^t dt=-e^t+C=-e^{\frac{1}{x}}+C\,.$$

Тоді $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=-\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(e^1-e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)=-e+\lim\limits_{\varepsilon\to+0}e^{\frac{1}{\varepsilon}}=\infty$, бо при $\varepsilon\to+0$ $e^{\frac{1}{\varepsilon}}\to+\infty$.

Отже наш інтеграл розбігається.

6. $\int\limits_0^1 \ln x dx=\{x=0-\textit{особлива точка}\}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx\,.$

Обчислимо інтеграл, застосовуючи метод інтегрування частинами:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\ln x dx=\left|\begin{array}{l}u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{array}\right|=\left(u\cdot v\Bigg|_a^b-\int\limits_a^b v\cdot du\right)=x\cdot\ln x\Bigg|_{\varepsilon}^{1}-\int\limits_{\varepsilon}^{1}x\cdot\frac{dx}{x}=1\cdot\ln 1-$$

$$-\varepsilon\ln\varepsilon-\int\limits_{\varepsilon}^{1}dx=0-\varepsilon\ln\varepsilon-x\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon\,.$$

Повертаючись до границі, отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon\right)=-1-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon=-1-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-1-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=$$

$=-1+\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon=-1+0=-1$ (при обчисленні границі застосовано правило Лопіталя).

Як бачимо,границя скінченна, наш інтеграл збігається.

7. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{1-\cos x}=\{x=0-\text{особлива точка}\}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{\pi/2}\frac{dx}{1-\cos x}$.

Для обчислення інтеграла застосуємо універсальну підстановку:

$$\int\frac{dx}{1-\cos x}=\left|\begin{array}{l} t=tg\,x/2, \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\left(1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\dfrac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2}}=2\cdot\int\frac{dt}{2t^2}=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}}+C.$$

Тоді $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(-\dfrac{1}{tg\,x/2}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}=-\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\dfrac{1}{tg\,\pi/4}-\dfrac{1}{tg\,\varepsilon/2}\right)=-1+\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{1}{tg\frac{\varepsilon}{2}}=\infty$, бо

якщо $\varepsilon\to+0$ $\dfrac{1}{tg\frac{\varepsilon}{2}}\to\infty$. Границя скінченна, інтеграл розбігається.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{3}\dfrac{dx}{x^2+3}$;
3. $\int\limits_{-\infty}^{-1}e^{7-2x}dx$;
4. $\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$;
5. $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x-5}$;
6. $\int\limits_{0}^{+\infty}x\cdot\cos x\,dx$;
7. $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
8. $\int\limits_{2}^{3}\dfrac{dx}{(x-2)^3}$;
9. $\int\limits_{0}^{2}\dfrac{dx}{x^2-4x+3}$;
10. $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Тема 3. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ

Обчислення площ плоских фігур

Визначений інтеграл від додатної неперервної функції $f(x)$, заданої на відрізку $[a;b]$, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$ і прямими $x=a,\ x=b,\ y=0$ (рис. 3.1):

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.1}$$

В разі, коли $f(x)<0$ на $[a;b]$ (рис.3.2)

$$S=\int_a^b[-f(x)]\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

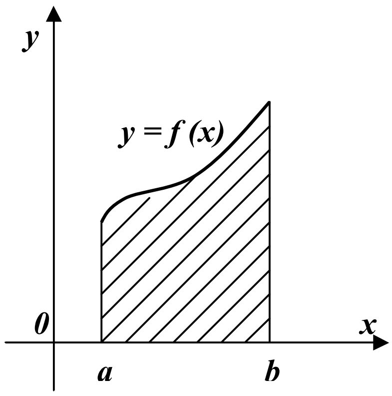


Рис. 3.1

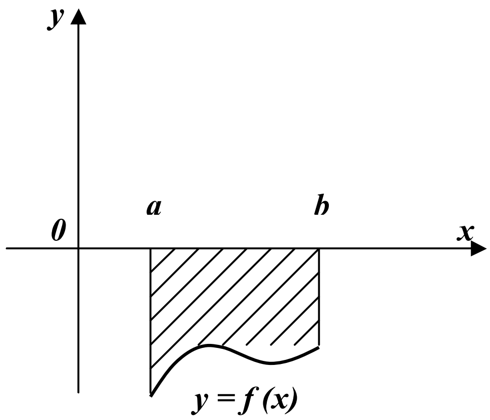


Рис. 3.2

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ скінчене число разів змінює знак, то

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Площу фігури, обмеженої кривими $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ і прямими $x=a,\quad x=b$ за умови, що $f_2(x)\geq f_1(x)$ (рис.3.3) знаходять за формулою

$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \tag{3.3}$$

У випадку, коли фігура обмежена кривою $x=\psi(y)$ $(\psi(y)>0)$ та прямими $y=c,\ y=d,\ x=0$ (рис.3.4), її площу знаходять за формулою

$$S=\int_c^d \psi(y)\,dy. \qquad (3.4)$$

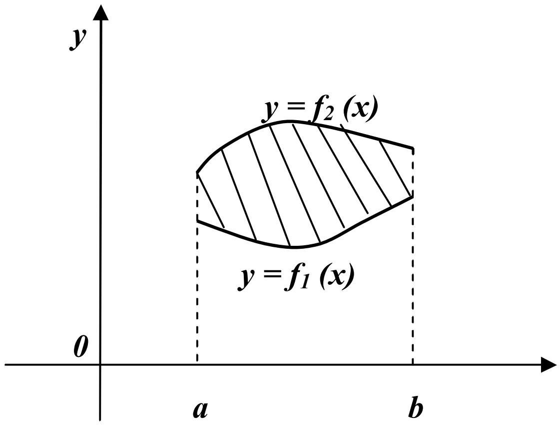


Рис. 3.3

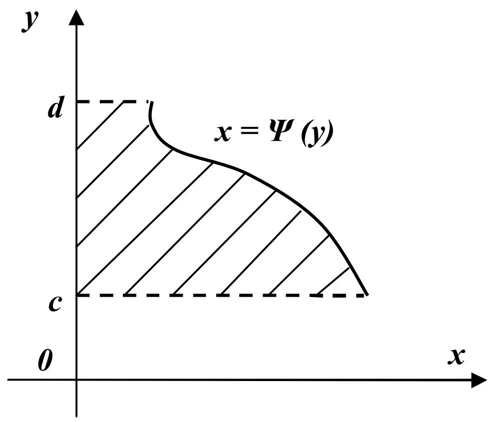
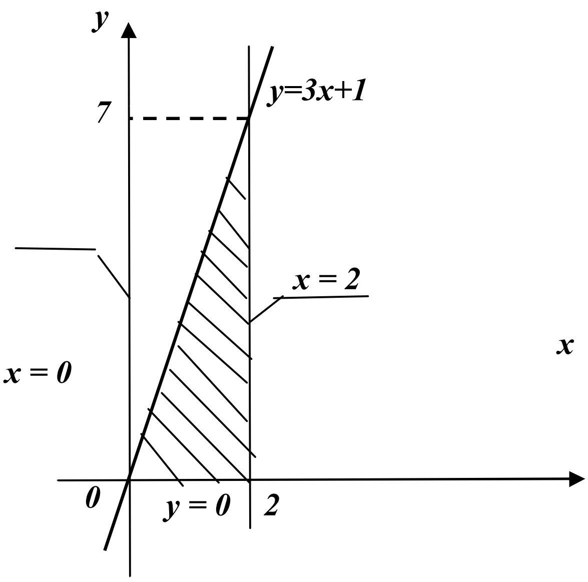


Рис. 3.4

Зразки розв'язування задач

Обчислити площі фігур, обмежених лініями.

1. $y=3x+1,\quad x=0,\quad x=2,\quad y=0$.



Розв'язання

Побудуємо дані лінії і визначимо фігуру, площу якої треба знайти.

Площа визначається за формулою (3.1) :

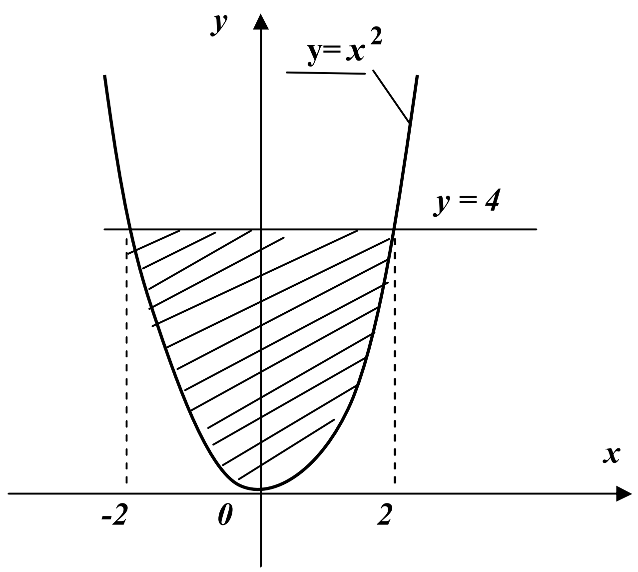
$$S=\int_0^2 (3x+1)dx=\left(\frac{3x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 2^2+2=8 \text{ кв. од.}$$

2. $y=x^2,\quad y=4$.

Розв'язання

Фігура обмежена параболою $y=x^2$ і прямою $y=4$.



Щоб визначити межі інтегрування, знайдемо абсциси точок перетину ліній $y = x^2$ та $y = 4$:

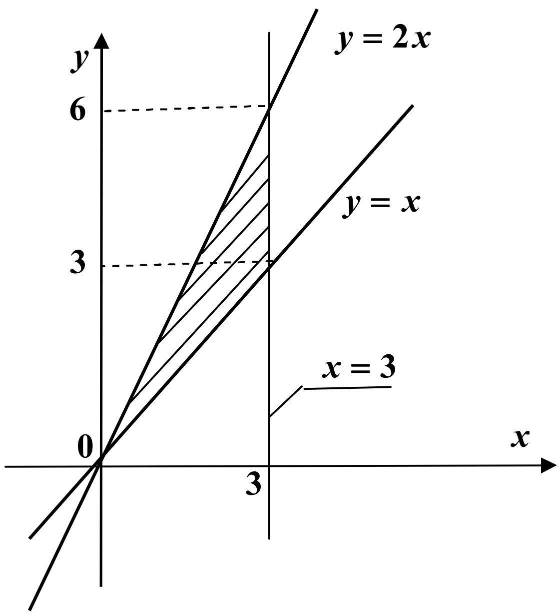
$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$, звідки $x^2 = 4$, $x = \pm 2.$.

Як бачимо, фігура симетрична відносно осі Oy, тому обчислимо площу її правої половини, а загальний результат подвоємо.

Будемо мати

$$S = 2 \cdot \int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(2^3 - 0^3\right) = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} \text{ кв. од.}$$

3. $y = x, \quad y = 2x, \quad x = 3$.



Розв'язання

Побудуємо дані лінії. Фігура на відрізку $[0;3]$ обмежена зверху $y = 2x$, знизу прямою $y = x$. Її площу знайдемо за формулою (3.3):

$$S = \int_0^3 (2x - x)dx = \int_0^3 xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2} \text{ кв. од.}$$

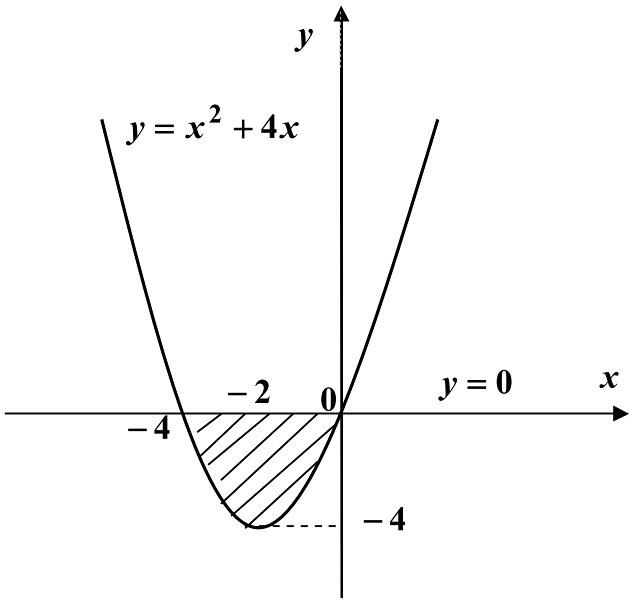
4. $y = x^2 + 4x, \quad y = 0$.

Розв'язання

Побудуємо параболу $y = x^2 + 4x$. Приведемо рівняння до канонічного виду, виділивши повний квадрат:

$$y = x^2 + 4x + 4 - 4, \quad y + 4 = x^2 + 4x + 4, \quad y + 4 = (x+2)^2.$$

Отже, парабола $y = x^2 + 4x$ має вершину в точці $(-2; -4)$ і перетинає вісь Ox в точках $x_1 = -4, \quad x_2 = 0 \quad (x^2 + 4x = 0)$.



На відрізку $[-4; 0]$ функція $y = x^2 + 4x$ має від'ємні значення. За формулою (3.2) шукана площа дорівнює

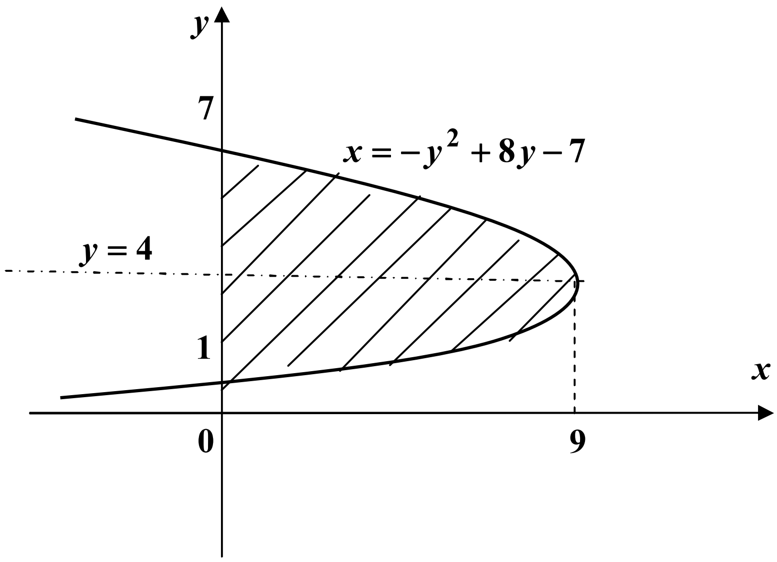
$$S = -\int_{4}^{0} (x^2 + 4x)dx = -\left(\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-4}^{0} =$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right)\Bigg|_{-4}^{0} =$$

$$= 0 + \left(\frac{1}{3} \cdot (-4)^3 + 2(-4)^2\right) = -\frac{64}{3} + 32 =$$

$$= \frac{32}{3} \text{ кв. од.}$$

5. $x = -y^2 + 8y - 7, \quad x = 0$.



Розв'язання

Канонічний вид параболи $x = -y^2 + 8y - 7$:

$$x = -(y^2 - 8y + 16) + 16 - 7,$$

тоді $x - 9 = -(y-4)^2$.

Парабола симетрична відносно прямої $y = 4$, має вершину $(9; 4)$.

Точки перетину з віссю Oy:

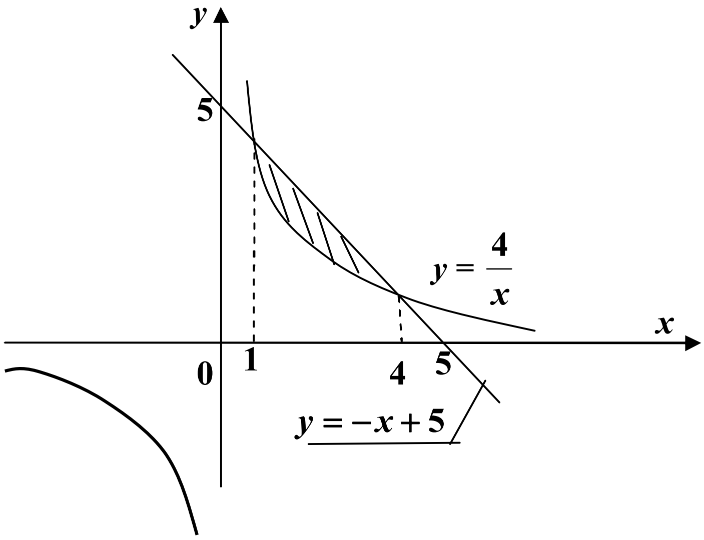
$$\begin{cases} x = -y^2 + 8y - 7 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \text{тоді} \quad y^2 - 8y + 7 = 0, \text{ звідки} \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 7.$$

За формулою (3.4) знайдемо площу:

$$S=\int_1^7\left(-y^2+8y-7\right)dy=\left(-\frac{y^3}{3}+8\cdot\frac{y^2}{2}-7y\right)\Bigg|_1^7=$$

$$=\left(-\frac{343}{3}+4\cdot 49-49\right)-\left(-\frac{1}{3}+4-7\right)=-\frac{343}{3}+196-49+\frac{1}{3}+3=36 \text{ кв. од.}$$

6. $y=\dfrac{4}{x}, \quad x+y-5=0$.



Розв'язання

Побудуємо дані гіперболу та пряму. Для знаходження абсцис точок перетину графіків розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y=\dfrac{4}{x} \\ y=-x+5 \end{cases}, \quad \text{тоді} \quad \frac{4}{x}=-x+5,$$

$4=-x^2+5x$, $\quad x^2-5x+4=0$,

звідки $x_1=1 \quad x_2=4$.

Отже, $S=\int_1^4\left(-x+5-\dfrac{4}{x}\right)dx=$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}+5x-4\,ln|x|\right)\Bigg|_1^4=\left(-8+20-4\,ln\,4\right)-\left(-\frac{1}{2}+5-4\,ln\,1\right)=12-4\,ln\,4+\frac{1}{2}-5=$$

$$=7{,}5-4\,ln\,4 \text{ кв. од.}$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1. $y=3x-x^2$, $y=0$;
2. $y=\sqrt{x-1}$, $y=x+1$, $x=1$, $x=3$;
3. $y=-x^2+4$, $y+x-2=0$;
4. $y=cos\,x$, $y=sin\,x$, $x=0$;
5. $xy=4$, $y=3x+1$, $y=1$.

Тема 4. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальним рівнянням називають рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію y та її похідні (або диференціали):

$$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0$$

або $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2},..., \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad .$$

Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком похідної (диференціала) цього рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці у це рівняння перетворює його на тотожність.

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (4.1)$$

де $x-$ незалежна змінна, $y-$ шукана функція, $y'-$ похідна шуканої функції.

Якщо рівняння можна розв'язати відносно похідної, то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y).$$

Розв'язком диференціального рівняння (4.1) на деякому інтервалі (a,b) називається диференційована на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (4.1) перетворює його на тотожність на (a,b).

Функція $y = \varphi(x,C)$, де $C-$довільна стала, називається ***загальним розв'язком рівняння*** (4.1) в області G, якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $y = \varphi(x,C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0, y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x,C_0)$ задовольняє ***початкову умову***:

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0 .$$

Частинним розв'язком рівняння (4.1) називається функція $y = \varphi(x,C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x,C)$ при певному значенні $C = C_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають ***загальним інтегралом диференціального рівняння*** (4.1).

Види диференціальних рівнянь першого порядку:

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними;
2. Однорідні диференціальні рівняння;
3. Лінійні диференціальні рівняння;
4. Диференціальні рівняння Бернуллі.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними мають вигляд

$$y' = f(x)g(y), \tag{4.2}$$

де $f(x)$ і $g(y)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції. Вважаючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, дістанемо $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

$$\text{або} \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \ \left(g(y) \neq 0 \right). \tag{4.3}$$

Рівняння (4.3) називається ***рівнянням з відокремленими змінними***.

Інтегруючи обидві частини останнього рівняння, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Диференціальне рівняння (4.2) є окремим випадком рівняння виду

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0 \tag{4.4}$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на добуток $N_1(x) \cdot M_2(x)$ $\left(N_1(y) \neq 0, \quad M_2(x) \neq 0 \right)$.

Однорідні диференціальні рівняння

Функція $f(x,y)$ називається ***однорідною функцією $n-$го виміру*** відносно змінних x та y, якщо для довільного $t \neq 0$ виконується тотожність

$$f(t\,x, t\,y) = t^n f(x,y).$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x,y) \tag{4.5}$$

називається ***однорідним***, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто, $f(tx, t\,y) = f(x,y)$.

Підстановкою $y = ux,\quad y' = u'x + u,\quad t = \dfrac{1}{x}$, де $u(x) -$ невідома функція, рівняння (4.5) зводиться до рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{4.6}$$

де $P(x)$ та $Q(x) -$ задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Розв’язок рівняння (4.6) знаходимо у вигляді

$$y = uv, \tag{4.7}$$

де $u(x)$ та $v(x) -$ невідомі функції, причому одна з них функція довільна (але не дорівнює тотожно нулю). Після підстановки (4.7) в рівняння (4.6) останнє перетворюється на систему 2-х рівнянь з відокремлюваними змінними.

Рівняння Бернуллі має вигляд

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \tag{4.8}$$

де $\alpha \in R \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$.

При $\alpha = 0$ рівняння (4.8) буде лінійним, при $\alpha = 1 -$ рівнянням з відокремлюваними змінними. Метод розв’язання рівняння Бернуллі такий самий як і для лінійного рівняння, тобто розв’язок його знаходимо у вигляді $y = u\,v$.

Зразки розв'язування задач

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1. $y' = 3x^2$.

Розв'язання

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними ($f(x) = 3x^2$, $g(y) = 1$). Враховуючи, що $y' = \frac{dy}{dx}$, будемо мати $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, звідки $dy = 3x^2 dx$. Це рівняння з відокремленими змінними. Проінтегруємо його:

$\int dy = 3\int x^2 dx$, $y = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C$ або $y = x^3 + C$ - це загальний розв'язок рівняння.

2. $y' = \frac{y}{x^2 - 4}$.

Розв'язання

Це теж рівняння з відокремлюваними змінними ($f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, $g(y) = y$).

Будемо мати $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2 - 4}$.

Помножимо обидві частини на dx, а потім відокремимо змінні. Для цього рівняння розділимо на y: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2 - 4}$.

Після інтегрування отримаємо:

$ln|y| = \frac{1}{2 \cdot 2} ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + ln|C|$, $ln|y| = ln\left|\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{1/4} \cdot C\right|$, звідки $y = C \cdot \sqrt[4]{\frac{x-2}{x+2}}$ – загальний розв'язок.

3. Розв'язати задачу Коші:

$$\left(x^2 y - x^2\right) dy = \left(xy^2 + y^2\right) dx, \quad y(1) = 1.$$

Розв'язання

Для того, щоб відокремити змінні, треба спочатку винести за дужки співмножники в кожній з частин рівняння, тобто x^2 та y^2 з лівої і правої частин рівняння відповідно, а потім розділити рівняння на $\left(x^2 \cdot y^2\right)$ і проінтегрувати. Будемо мати:

$$x^2(y-1)\,dy = y^2(x+1)\,dx\ ,$$

$$\frac{x^2(y-1)\,dy}{x^2y^2} = \frac{y^2(x+1)\,dx}{x^2y^2},\quad \int\frac{y-1}{y^2}\,dy = \int\frac{x+1}{x^2}\,dx\,,$$

$\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)dy = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$, $\ln|y| + \frac{1}{y} = \ln|x| - \frac{1}{x} + C$, звідки $\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = C$ – загальний розв'язок.

Підставимо початкові умови в загальний розв'язок та отримаємо частинний розв'язок рівняння:

$\ln\left|\frac{1}{1}\right| + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = C \Rightarrow\ C = 2$, тоді $\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2$ – частинний розв'язок.

4. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку $(0;1)$, кутовий коефіцієнт дотичної до якої у кожній точці дорівнює $-y\,tgx$.

Розв'язання

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у кожній точці є y'. Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = -y\,tgx$.

$\frac{dy}{dx} = -y\,tgx$, тоді $\frac{dy}{y} = -\,tgx\,dx$, $\int\frac{dy}{y} = -\int tgx\,dx$. Отримаємо $\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln C$, звідки $y = C\cdot\cos x$ - загальний розв'язок рівняння.

Для того, щоб знайти C підставимо координати точки, через яку проходить шукана крива, в отриманий розв'язок: $1 = C\cdot\cos 0$, звідки $C = 1$. Тоді $y = \cos x$ є рівнянням цієї кривої.

5. Розв'язати рівняння $xy' - y = x\cdot 2^{-\frac{y}{x}}$.

Розв'язання

Доведемо, що це рівняння є однорідним. Нехай $\begin{matrix} x \to xt \\ y \to yt \end{matrix}$, тоді

$xt \cdot y' - yt = xt \cdot 2^{-\frac{yt}{xt}}$, $\quad y' = \dfrac{yt + xt \cdot 2^{-\frac{y}{x}}}{xt} \Rightarrow \quad y' = \dfrac{y}{x} + 2^{-y/x}$, тобто рівняння однорідне.

Для того, щоб перетворити його на рівняння з відокремлюваними змінними зробимо підстановку: $y = u \cdot x, \quad y' = u'x + u, \quad u = \dfrac{y}{x}$.

Отримаємо $x(u'x + u) - ux = x \cdot 2^{-\frac{ux}{u}}$ або $u'x + u - u = 2^{-u}$, $\quad u'x = 2^{-u}$, тоді $x\dfrac{du}{dx} = 2^{-u}$. Відокремлюючи змінні, маємо $2^u du = \dfrac{dx}{x}$.

Після інтегрування отримаємо загальний інтеграл даного диференціального рівняння:

$$\frac{2^u}{ln 2} = ln|x| + ln|C|, \text{ тоді } 2^{y/x} = ln 2 \cdot ln|Cx|.$$

6. Знайти загальний розв'язок рівняння $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$.

Розв'язання

Маємо: $P = y^2 - 2xy, \quad Q = x^2$.

Функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є однорідними функціями другого виміру:

$$P(tx, ty) = (ty)^2 - 2(tx)(ty) = t^2 y^2 - 2t^2 y^2 - 2t^2 xy = t^2 (y^2 - 2xy) = t^2 P(x, y);$$

$$Q(tx, ty) = (tx)^2 = t^2 x^2 = t^2 Q(x, y).$$

Тобто початкове рівняння є однорідним.

Зробимо підстановку $y = ux, \quad y' = u'x + u, \quad u = \dfrac{y}{x}$ та зведемо це рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y^2 - 2xy + x^2 y' = 0,$$

$$(ux)^2 - 2x\,ux + x^2(u'x + u) = 0,$$

$$u^2 x^2 - 2x^2 u + x^2(u'x + u) = 0, \text{ тоді } u^2 - 2u + u'x + u = 0, \text{ звідки}$$

$$u'x = u - u^2, \quad \frac{du}{dx}x = u - u^2.$$

Відокремимо змінні в останньому рівнянні:

$$\int \frac{du}{u - u^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

Перетворимо $u - u^2 = -\left(u^2 + u\right) = -\left(u^2 - 2\cdot\frac{1}{2}u + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4} - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2.$

Тоді $\int \frac{du}{\frac{1}{4} - \left(u - 1/2\right)^2} = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} ln\left|\frac{\frac{1}{2} + u - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - u + \frac{1}{2}}\right| = ln|x| + ln|C|$ або

$ln\left|\frac{u}{1-u}\right| = ln|Cx| \Rightarrow \frac{u}{1-u} = Cx \Rightarrow \frac{y/x}{1 - y/x} = Cx \Rightarrow \frac{y}{x-y} = Cx -$ загальний інтеграл

даного рівняння.

7. Розв'язати задачу Коші : $y^2 + x^2 y' = x\, y\, y', \quad y(1) = 1.$

Розв'язання

Це рівняння є однорідним (перевірити самостійно), тому після підстановки $y = ux, \quad y' = u'x + u, \quad u = \frac{y}{x}$ отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(ux)^2 + x^2(u'x + u) = x\, ux(u'x + u),$$

$$u^2x^2 + x^2(u'x + u) = x^2u(u'x + u) \quad \text{або} \quad u^2 + u'x + u = u\, u'x + u^2,$$

$$u'x - u\, u'x = -u, \quad u'x(1 - u) = -u,$$

$$u'x(u - 1) = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}\cdot x(u - 1) = u.$$

Відокремимо змінні і проінтегруємо обидві частини рівняння:

$\int \frac{u-1}{u} du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\left(1 - \frac{1}{u}\right)du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad u - ln|u| = ln|x| + ln|C|$ або

$u = ln|Cux|, \quad \frac{y}{x} = ln\left|C\frac{y}{x}\cdot x\right|, y = x\, ln|Cy|$ – загальний інтеграл.

Використаємо початкові умови: $1 = 1\, ln|C| \Rightarrow ln\, C = 1 \Rightarrow C = e.$

Тоді $y = x\,ln\left|e \cdot y\right|$ або $y = x\left(ln\,e + ln\,y\right)$. Таким чином, $y = x + x\,ln\,y$ – розв'язок задачі Коші.

8. Розв'язати рівняння $y' - y\,ctg x = \dfrac{sin\,x}{x}$.

Розв'язання

Це рівняння є лінійним, і його розв'язок будемо шукати у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

Маємо: $u'v + uv' - uv\;ctgx = \dfrac{sin\,x}{x}$, $\quad u\left(v' - vctgx\right) + u'v = \dfrac{sin\,x}{x}$.

Будемо вважати, що вираз в дужках у лівій частині рівняння дорівнює нулю. Тоді для знаходження u та v отримаємо систему диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' - vctgx = 0, \\ u'v = \dfrac{sin\,x}{x}. \end{cases}$$

Знайдемо спочатку розв'язок першого рівняння. Для цього відокремимо змінні та проінтегруємо рівняння:

$$\frac{dv}{dx} = vctgx \Rightarrow \frac{dv}{v} = ctg\,x\,dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int ctg\,x\,dx \Rightarrow ln\left|v\right| = ln\left|sin\,x\right| \Rightarrow v = sin\,x\,.$$

Підставимо знайдене v в друге рівняння системи:

$$u' \cdot sin\,x = \frac{sin\,x}{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow u = ln\left|x\right| + C\,.$$

Тоді шуканий розв'язок лінійного рівняння матиме вигляд

$$y = \left(ln\,x + C\right) \cdot sin\,x\,.$$

9. Розв'язати рівняння $xy' - y = x^2 \cos x$.

Розв'язання

Розділимо рівняння на x та розв'яжемо його аналогічно попередньому: $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x$ - це лінійне рівняння. Зробимо в ньому заміну: $y = u \cdot v, \quad y' = u'v + uv$.

Будемо мати $u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x\cos x$, $u\left(v' - \frac{v}{x}\right) + u'v = x\cos x$, звідки

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = x\cos x. \end{cases}$$

Розглянемо перше рівняння системи $v' - \frac{v}{x} = 0$. Отримаємо

$$v' = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x|,$$

звідки $v = x$.

Підставляючи тепер знайдене v у друге рівняння системи, будемо мати

$$u' \cdot x = x\cos x \Rightarrow u' = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow \int du = \int \cos x dx,$$

звідки $u = \sin x + C$.

Отже, $y = (\sin x + C) \cdot x$ – загальний розв'язок.

10. Розв'язати задачу Коші: $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$, $y(1) = 0$.

Розв'язання

Маємо лінійне рівняння. Заміняючи $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, отримаємо

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}, \quad u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) + u'v = \frac{e^{-x^2}}{x},$$ звідки

$$\begin{cases} v' + \frac{2v}{x} = 0, \\ u'v = \frac{e^{-x^2}}{x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи кожне з рівнянь окремо ,будемо мати

1) $v' = -\frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{2v}{x}$, $\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x}$.

Інтегруючи отримаємо: $\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = -2\ln|x|$, звідки $v = x^{-2}$ або $v = \frac{1}{x^2}$.

2) $u'\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{e^{-x^2}}{x}$, $\quad u'=x\cdot e^{-x^2}$, а саме $\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}\Rightarrow du=x\cdot e^{-x^2}dx$, тоді $\int du=\int x\cdot e^{-x^2}dx$.

Візьмемо інтеграл у правій частині окремо

$$\int e^{-x^2}\cdot x\,dx=\begin{vmatrix}t=-x^2,\\ dt=-2x\,dx\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

Тоді будемо мати $u=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

Отже, $y=u\cdot v=\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C\right)\cdot\frac{1}{x^2}$ - загальний розв'язок .

Використовуючи начальну умову, знайдемо C: $0=\left(-\frac{1}{2}e^{-1}+C\right)\cdot 1$, звідки $C=\frac{1}{2e}$. Тоді частинний розв'язок матиме вигляд $y=\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{1}{2e}\right)\cdot\frac{1}{x^2}$.

11. Розв'язати рівняння $xy'+y=xy^2\ln x$.

Розв'язання

Маємо рівняння Бернуллі, класичний вигляд якого буде

$$y'+\frac{y}{x}=y^2\ln x.$$

Метод розв'язання – аналогічний до метода розв'язання лінійних рівнянь. Тобто, вважаючи, що $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, дістанемо

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=(uv)^2\ln x,\quad u\left(v'+\frac{v}{x}\right)+u'v=u^2v^2\ln x.$$

$$\begin{cases}v'+\frac{v}{x}=0,\\ u'=u^2v\ln x.\end{cases}$$

1) $v'=-\frac{v}{x}\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}\Rightarrow\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|v|=-\ln|x|$ або

$\ln|v|=\ln\left|x^{-1}\right|$, звідки $v=\frac{1}{x}$.

2) $u'=u^2\cdot\frac{1}{x}\ln x\Rightarrow\frac{du}{dx}=u^2\frac{\ln x}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{\ln x\,dx}{x}$.

Для останнього інтеграла використаємо заміну змінної $\left|\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{array}\right|$.

Дістанемо $\int u^{-2} du = \int t dt \Rightarrow \dfrac{u^{-1}}{-1} = \dfrac{t^2}{2} + C \Rightarrow -\dfrac{1}{u} = \dfrac{\ln^2 x}{2} + C \Rightarrow$

$\dfrac{1}{u} = -\dfrac{\ln^2 x + 2C}{2} \Rightarrow u = -\dfrac{2}{\ln^2 x + 2C}$.

Загальний розв’язок рівняння Бернуллі матиме вигляд

$y = -\dfrac{2}{\ln^2 x + 2C} \cdot \dfrac{1}{x}$ або $y = -\dfrac{2}{x \ln^2 x + 2Cx}$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальні розв’язки диференціальних рівнянь:

а) $y^2 dx + x dy = 0$;

б) $xy' - y \ln y = 0$;

в) $y' = \dfrac{x - y}{x - 2y}$;

г) $y' - y = e^x \left(3x^2 - 1\right)$;

д) $x y' \sin \dfrac{y}{x} + x = y \sin \dfrac{y}{x}$;

є) $y' - y tg x + y^2 \cos x = 0$.

2. Знайти частинні розв’язки диференціальних рівнянь:

а) $x(y+1)\,dy + y\left(2x^2 + 1\right)dx = 0,\quad y(1) = 1$;

б) $y' = 2^{x-y},\quad y(-3) = -5$;

в) $xy' - y = x tg(y/x),\quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;

г) $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^2 + 1,\quad y(0) = 3$;

д) $y' + y = e^{x/2} \sqrt{y},\quad y(0) = \dfrac{9}{4}$.

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, кутовий коефіцієнт дотичної до якої дорівнює $f(x, y)$:

а) $M_0(2;5),\quad f(x, y) = \dfrac{y}{x}$;

б) $M_0(1;1),\quad f(x, y) = x^2 \cdot y^2$

Тема 5. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ . ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Диференціальним рівнянням ***другого порядку*** називається рівняння вигляду $F(x, y, y', y'') = 0$.

Розв'язком такого рівняння називається будь-яка функція $y = \varphi(x)$, що має першу та другу похідні та перетворює дане рівняння на тотожність, тобто

$$F(x, \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x)) = 0.$$

Задача Коші для цього рівняння полягає у тому, щоб знайти розв'язок рівняння, який задовольняє ***початковим умовам***: $y = y_0$, $y' = y_0'$ при $x = x_0$, де x_0, y_0, y_0' задані числа.

Функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ називається ***загальним розв'язком*** диференціального рівняння другого порядку, якщо, при відповідному виборі довільних сталих C_1, C_2 ця функція є розв'язком будь-якої задачі Коші, що поставлена для цього рівняння.

Будь-який розв'язок, який отриманий із загального розв'язку при конкретних значеннях сталих C_1, C_2, називається ***частинним розв'язком*** диференціального рівняння другого порядку.

Диференціальне рівняння другого порядку називається ***лінійним***, якщо воно має вигляд

$$y'' + \alpha_1(x) y' + \alpha_2(x) y = f(x),$$

де $\alpha_1(x), \alpha_2(x), f(x)$ - задані і неперервні на $[a; b]$ функції.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається ***однорідним***, якщо $f(x) \neq 0$ - ***неоднорідним***. Розглянемо випадок, коли функції $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ є сталими числами: $\alpha_1(x) = p, \alpha_2(x) = q,\ f(x) = 0$, тоді рівняння

$$y'' + py' + qy = 0$$

називається ***лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.***

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно-незалежні частинні розв’язки рівняння, тобто $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$, а C_1, C_2 – довільні сталі.

Для знаходження y_1, y_2 треба розв’язати ***характеристичне рівняння***:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Можливі наступні випадки:

k_1, k_2 – корені характеристичного рівняння	y_1, y_2 – частинні розв’язки	$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – загальний розв’язок
k_1, k_2 – дійсні різні числа, $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2$ – дійсні однакові числа	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = x\, e^{k_1 x}$	$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно-спряжені числа, $i^2 = -1$ – уявна одиниця, α, β – дійсні числа.	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Зразки розв’язування задач

Розв’язати рівняння .

1. $y'' - 6y' + 8y = 0$.

Розв’язання

Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 6k + 8 = 0.$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4, \quad k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \text{ тобто}$$

$k_1 = 4, k_2 = 2$ - корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тому загальний розв’язок має вигляд $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$.

2. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання

Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 6k + 9 = 0$. Його корені $k_{1,2} = -3$ – дійсні, рівні. Тоді загальний розв'язок рівняння $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$.

3. $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання

Маємо характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 13 = 0$.

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36, \quad k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i, \qquad (\ \alpha = -2; \quad \beta = 3\ ).$$

Загальний розв'язок рівняння $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Розв'язати задачу Коші.

4. $y'' - 5y + 6y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 7$.

Розв'язання

Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 - 5k + 6 = 0$,звідки маємо корені $k_1 = 2, k_2 = 3$. Тоді загальний розв'язок $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Для того, щоб знайти частинний розв'язок треба визначити C_1 та C_2. Це можна зробити, використовуючи початкові умови, але спочатку треба знайти похідну y' від загального розв'язку: $y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y(0) = 3, \\ y'(0) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \\ 7 = 2C_1 e^0 + 3C_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ 2C_1 + 3C_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок рівняння $y = 2e^{2x} + e^{3x}$.

5. $y'' + y' = 0, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 3$.

Розв'язання

Отримаємо характеристичне рівняння $k^2 + k = 0$. Це неповне квадратне рівняння, тому розв'яжемо його наступним чином: $k \cdot (k+1) = 0$, звідки знайдемо $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Тоді загальний розв'язок рівняння $y = C_1 e^0 + C_2 e^{-x}$ або $y = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Знайдемо $y' = 0 + C_2 e^{-x} \cdot (-1) = -C_2 e^{-x}$.

Підставляючи початкові умови, будемо мати

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 e^0, \\ 3 = -C_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 - C_2, \\ C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5, \\ C_2 = -3. \end{cases}$$

Тоді частинний розв'язок рівняння $y = 5 - 3e^{-x}$.

6. $y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -2.$.

Розв'язання

Характеристичне рівняння $k^2 + 25 = 0$, звідки $k^2 = -25$, тому $k_{1,2} = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i \; (\alpha = 0, \beta = 5)$. Тоді загальний розв'язок запишеться у вигляді $y = e^0 (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ або $y = (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

Знайдемо $y' = -5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x$.

Для знаходження C_1, C_2 отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \\ -2 = -5C_1 \sin 0 + 5C_2 \cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ 5C_2 = -2 \Rightarrow C_2 = -\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Тоді $y = \cos 5x - \dfrac{2}{5} \sin 5x$ - частинний розв'язок.

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальні та частинні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

1. $y'' - y' - 12y = 0$;
2. $y'' + 2y' + 5y = 0$;
3. $4y'' - 4y' + y = 0, \; y(0) = 5, y'(0) = -1$;
4. $2y'' - 5y' = 0$;
5. $9y'' + y' = 0$;
6. $y'' - y' = 0$;
7. $y'' - 7y' + 12 = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = 13$;
8. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$.

Тема 6. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ІЗ СПЕЦІАЛЬНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Розглянемо ***лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x).$$

Якщо права частина $f(x)$ лінійного неоднорідного рівняння є функцією спеціального вигляду, то рівняння можна розв'язати ***методом невизначених коефіцієнтів***, і загальний розв'язок має вигляд

$$y = \bar{y} + y^*,$$

де $\bar{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, y^* – частинний розв'язок неоднорідного рівняння, який залежить від функції $f(x)$ та коренів характеристичного рівняння k_1, k_2.

Можливі такі випадки:

1. Нехай $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n, тобто $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, тоді:

а) якщо $k_1 \neq a,\ \ k_2 \neq a$, тоді частинний розв'язок обираємо у вигляді $y^* = e^{ax} Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ – многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами, причому, якщо

$n = 0$, $Q_n(x) = A$,

$n = 1$, $Q_n(x) = Ax + B$,

$n = 2$, $Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C$,

$n = 3$, $Q_n(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$;

б) якщо $k_1 \neq a,\ \ k_2 = a$, тоді $y^* = x e^{ax} Q_n(x)$;

в) якщо $k_1 = k_2 = a$, тоді $y^* = x^2 e^{ax} Q_n(x)$.

<u>Зауваження 1.</u> Для знаходження невідомих коефіцієнтів многочлена $Q_n(x)$ треба підставити функцію y^* та її похідні першого й другого порядку в вихідне рівняння та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях n з обох його сторін. Таким чином, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

2. Нехай $f(x)=e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx+Qm(x)\sin bx\right]$, де $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлени степенів n та m, тоді існують такі випадки:

а) якщо $k_{1,2}\neq a\pm bi$, тоді $y^*=e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx+L_S(x)\sin bx\right]$, де $Q_S(x)$, $L_S(x)$ – многочлени степеню $s=max\{n,m\}$ з невідомими коефіцієнтами;

б) якщо $k_{1,2}=a\pm bi$, тоді $y^*=xe^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx+L_S(x)\sin bx\right]$.

Зауваження 2. У цьому випадку для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів $Q_S(x)$ та $L_S(x)$ діємо так само, але прирівнюємо коефіцієнти при $\cos bx$, $\sin bx$, внаслідок чого знов дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

Зразки розв'язування задач

Записати структуру частинного розв'язку диференціального рівняння по вигляду функції $f(x)$.

1. $y''+6y'+10y=f(x)$:

а) $f(x)=e^{-3x}$; б) $f(x)=x$; в) $f(x)=e^{-3x}\sin x$.

Розв'язання

Знайдемо корені характеристичного рівняння $k^2+6k+10=0$.

$D=6^2-4\cdot1\cdot10=-4$, $k_{1,2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{-4}}{2\cdot1}=\dfrac{-6\pm2i}{2}=-3\pm i$.

а) якщо $f(x)=e^{-3x}\left(a=-3,\ P_n(x)=1,\ n=0\right)$.

$a=-3\neq k_{1,2}$, тому оберемо частинний розв'язок у вигляді $y^*=Ae^{-3x}$.

б) якщо $f(x)=x \quad \left(a=0,\ P_n(x)=x,\ n=1\right)$.

$a=0\neq k_{1,2}$, тому $y^*=(Ax+B)\cdot e^{-3x}$.

в) якщо $f(x)=e^{-3x}\cdot\sin x\ \left(a=-3, P_n(x)=0, n=0, Q_m(x)=1, m=0, n=0\right)$.

$a\pm bi=-3\pm i=k_{1,2}$, тому $y^*=x\cdot e^{-3x}\left(A\cos x+B\sin x\right)$.

2. $y'' + 2y' = f(x)$:

а) $f(x) = x\cos 2x$; б) $f(x) = x^2 e^{-2x}$; в) $f(x) = 3x$.

Розв'язання

Знайдемо корені характеристичного рівняння $k^2 + 2k = 0$:

$k(k+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0, k_2 = -2$.

а) якщо $f(x) = x \cdot cox2x \quad (a = 0, P_n(x) = x, n = 1, Q_m(x) = 0, m = 0, b = 2)$.

$a \pm bi = 0 \pm 2i = 2i \neq k_{1,2}$, тому $y^* = (Ax + B)\cos 2x(Cx + D) \cdot \sin 2x$.

б) якщо $f(x) = x^2 e^{-2x} \quad (a = -2, P_n(x) = x^2, n = 2)$.

$a = -2 = k_2$, але $a \neq k_1$, тому $y^* = x \cdot e^{-2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)$.

в) якщо $f(x) = 3x \quad (a = 0, P_n(x) = 3x, n = 1)$.

$a = 0 = k_1$, але $a \neq k_2$, тому $y^* = x \cdot (Ax + B)$.

Знайти загальні розв'язки рівнянь.

3. $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$.

Розв'язання.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $6y'' - y' - y = 0$, а y^* - частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

$\bar{y}$ *:* характеристичне рівняння має вигляд $6k^2 - k - 1 = 0$.

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25$, $k_{1,2} = \dfrac{1 \pm 5}{2 \cdot 6}$ або $k_1 = \dfrac{1}{2}$, $k_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Тоді $\bar{y} = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$.

y^* *:* $f(x) = 3e^{2x}$ ($a = 2$, $P_n(x) = 3$, тому степінь цього многочлена відносно x - $n = 0$).

Оскільки $k_1 \neq a$ та $k_2 \neq a$, обираємо y^* у вигляді $y^* = Ae^{2x}$.

Тепер потрібно визначити невідомий коефіцієнт A, а для цього знайдемо $y^{*'}$ та $y^{*''}$. Будемо мати $y^{*'} = 2Ae^{2x}$, $y^{*''} = 4Ae^{2x}$.

Після підстановки y^*, $y^{*'}$ та $y^{*''}$ у вихідне рівняння отримаємо

$$6\cdot 4Ae^{2x}-2Ae^{2x}-Ae^{2x}=3e^{2x}.$$

Розділимо рівняння на e^{2x}: $24A-2A-A=3$, звідки знайдемо, що $21A=3$, $A=\dfrac{1}{7}$. Тоді $y^*=Ae^{2x}=\dfrac{1}{7}e^{2x}$.

Отже, загальний розв'язок рівняння

$$y=\overline{y}+y^*=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-\frac{1}{3}x}+\frac{1}{7}e^{2x}.$$

4. $y''-y'=2x+4$.

Розв'язання

Загальний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $y=\overline{y}+y^*$.

$\overline{y}$ **:** характеристичне рівняння $k^2-k=0 \quad\Rightarrow\quad k\cdot(k-1)=0$, звідки $k_1=0$, $k_2=1$. Тоді $\overline{y}=C_1+C_2e^x$.

y^* **:** $f(x)=2x+4 \;\; (a=0,\, P_n(x)=2x+4 \quad\Rightarrow\quad n=1)$.

Оскільки $a=k_1$, але $a\neq k_2$, обираємо $y^*=x\cdot(Ax+B)$ або $y^*=Ax^2+Bx$.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A, B відшукаємо $y^{*'}=2Ax+B$, $y^{*''}=2A$.

Після підстановки $y^{*''}$ та $y^{*'}$ у вихідне рівняння отримаємо

$$2A-(2Ax+B)=2x+4,\quad 2A-2Ax-B=2x+4.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа в цьому рівнянні та отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих A, B.

Будемо мати $\begin{array}{l} при\;\; x^1: \\ при\;\; x^0: \end{array}\begin{cases}-2A=2,\\ 2A-B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1,\\ B=2A-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\ B=2\cdot(-1)-4=-6.\end{cases}$

Отже, $y^*=Ax^2+Bx=(-1)\cdot x^2+(-6)\cdot x=-x^2-6x$.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння

$$y=\overline{y}+y^*=C_1+C_2e^x-x^2-6x.$$

5. $y''+6y'+9y=e^{-3x}$.

Розв'язання

Аналогічно попередньому $y=\overline{y}+y^*$.

Характеристичне рівняння $k^2+6k+9=0$ має однакові корені $k_{1,2}=-3$. Отже, $\bar{y}=e^{-3x}(C_1+C_2x)$.

$y^*:\quad f(x)=e^{-3x}$, тобто, $a=-3;\quad n=0;\quad k_{1,2}=-3=a$. Частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння буде мати вигляд $y^*=Ax^2e^{-3x}$,

$y^{*\prime}=2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x}$,

$y^{*\prime\prime}=2Ae^{-3x}-6Axe^{-3x}-6Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}$ або

$y^{*\prime\prime}=2Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}$.

Після підстановки цих виразів в початкове рівняння дістанемо

$$2Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}+6\left(2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x}\right)+9Ax^2e^{-3x}=e^{-3x}.$$

Після деяких перетворень отримаємо, що $2A=1\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{2}$.

Частинний розв'язок знайдено: $y^*=\frac{1}{2}x^2e^{-3x}$.

Отже, загальний розв'язок нашого рівняння

$$y=\bar{y}+y^*=e^{-3x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{2}x^2e^{-3x}=e^{-3x}\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right).$$

6. $y''-5y'=4\cos 2x+8\sin 2x$.

Розв'язання

Маємо $k^2-5k=0\quad\Rightarrow\quad k(k-5)=0\quad\Rightarrow\quad k_1=0;\quad k_2=5$.

$\bar{y}=C_1e^0+C_2e^{5x}$.

$y^*:f(x)=4\cos 2x+8\sin 2x\quad\left(a=0,\ P_n(x)=4,\ n=0,\ Q_m(x)=8,\ m=0,\ b=2\right)$.

Враховуючи, що $a\pm bi=2i\neq k_{1,2}$, оберемо y^* у вигляді

$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$,

$y^{*\prime}=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$, $y^{*\prime\prime}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$.

Отримаємо

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-5(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)=4\cos 2x+8\sin 2x.$$

Порівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ в обох частинах останнього рівняння та дістанемо систему лінійних рівнянь відносно невідомих A та B:

$$\begin{matrix}\textit{при}\ \cos 2x: \\ \textit{при}\ \sin 2x:\end{matrix}\left\{\begin{aligned}-4A-10B&=4,\\-4B+10A&=8\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{aligned}2A+5B&=-2,\\5A-2B&=4.\end{aligned}\right.$$

Розв'яжемо систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 25 = -29;$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 20 = -16; \qquad \Delta_B = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 20 = 28.$$

Тоді $A = \dfrac{\Delta_A}{\Delta} = \dfrac{16}{29}$, $\quad B = -\dfrac{28}{29}$.

Отже, $y^* = \dfrac{16}{29}\cos 2x - \dfrac{28}{29}\sin 2x$.

Таким чином, $y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{5x} + \dfrac{16}{29}\cos 2x - \dfrac{28}{29}\sin 2x$ – загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

7. $y'' + 9y = 12\sin 3x$.

Розв'язання

Маємо $k^2 + 9 = 0$, $k^2 = -9$, $k_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$ $\quad (\alpha = 0, \beta = 3)$, тому $\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

y^* : $f(x) = 12\sin 3x$ $\quad (a = 0, P_n(x) = 0,\ n = 0,\ Q_m(x) = 12,\ m = 0,\ \beta = 3)$.

З'ясуємо, що $a \pm bi = 0 \pm 3i = 3i = k_{1,2}$, тому $y^* = x \cdot (A\cos 3x + B\sin 3x)$.

Залишається знайти A та B, а для цього знайдемо похідні

$$y^{*'} = A\cos 3x + B\sin 3x + x \cdot (-3A\sin 3x + 3B\cos 3x),$$

$$y^{*''} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x + x \cdot (-9A\cos 3x - 9B\sin 3x).$$

Підставляючи $y^{*''}$ та y^* у вихідне рівняння, отримаємо

$$-3A\sin 3x + 3B\cos 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x + x \cdot (-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) +$$
$$+ 9x \cdot (A\cos 3x + B\sin 3x) = 12\sin 3x.$$

Після деяких перетворень прийдемо до наступного рівняння:

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x = 12\sin 3x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 3x$ та $\cos 3x$ в обох частинах останнього рівняння, будемо мати

$$\begin{array}{l} \textit{при}\ \sin 3x: \\ \textit{при}\ \cos 3x: \end{array} \begin{cases} -6A = 12, \\ 6B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2, \\ B = 0. \end{cases}$$

Тоді $y^* = x\cdot(A\,cos\,3x + B\,sin\,3x) = x\cdot(-2\,cos\,3x + 0\cdot sin\,3x)$ або

$$y^* = -2x\,cos\,3x.$$

Отже, $y = \bar{y} + y^* = C_1\,cos\,3x + C_2\,sin\,3x - 2x\,cos\,3x$ - загальний розв'язок.

Розв'язати задачу Коші:

8. $y'' - y' - 2y = e^{4x}(10x+7),\quad y(0)=3;\quad y'(0)=0.$

Розв'язання

Аналогічно попередньому маємо:

$y'' - y' - 2y = 0,\ k^2 - k - 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad k_1 = 2;\quad k_2 = -1.$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння набуває виду

$$\bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.$$

$y^*:\ f(x) = e^{4x}(10x+7)\ (\ a = 4, n = 1, k_{1,2} \neq a\ ) \Rightarrow y^* = e^{4x}(Ax+B).$

Знайдемо $y^{*'} = 4e^{4x}(Ax+B) + e^{4x}\cdot A,$

$$y^{*''} = 16e^{4x}(Ax+B) + 4e^{4x}\cdot A + 4e^{4x}\cdot A = 16e^{4x}(Ax+B) + 8e^{4x}A.$$

Підставимо $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в початкове рівняння:

$$16e^{4x}(Ax+B) + 8e^{4x}A - \left(4e^{4x}(Ax+B) + e^{4x}A\right) - 2e^{4x}(Ax+B) = e^{4x}(10x+7),$$

$$16(Ax+B) + 8A - 4(Ax+B) - A - 2(Ax+B) = 10x+7.$$

$$\begin{matrix} при\ \ x^1: \\ при\ \ x^0: \end{matrix}\begin{cases} 16A - 4A - 2A = 10, \\ 16B + 8A - 4B - A - 2B = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ 7A + 10B = 7,\ B = 0. \end{cases}$$

Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд $y^* = xe^{4x}$, а загальний розв'язок - $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + xe^{4x}$.

Використаємо початкові умови, для цього знайдемо y':

$$y' = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x} + e^{4x} + 4xe^{4x}.$$

Маємо

$$\begin{cases} 3 = C_1e^0 + C_2e^0 + 0, \\ 0 = 2C_1 - C_2 + e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ 2C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3C_1 = 3, \\ C_1 - C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Отже, дістанемо розв'я;зок задачі Коші : $y = e^{2x} + 2e^{-x} + 4xe^{4x}$.

9. $y'' + 10y' + 25y = e^x \cos 2x$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = -1$.

Розв'язання

Характеристичне рівняння запишеться $k^2 + 10k + 25 = 0$.

$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$, $k_{1,2} = \dfrac{-10 \pm 0}{2 \cdot 1} = -5$ $(k_1 = k_2 = -5)$, тому

$\overline{y} = e^{-5x} \cdot (C_1 + C_2 x)$.

Оберемо $y^* : f(x) = e^x \cos 2x (a = 1, P_n(x) = 1, n = 0, Q_m(x) = 0, m = 0, \beta = 0)$.

Оскільки $a \pm bi = 1 \pm 2i \neq k_{1,2}$, то $y^* = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x)$.

Знайдемо $y^{*'} = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x) + e^x (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)$,

$$y^{*''} = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x) + e^x (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) +$$

$$+ e^x (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + e^x (-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) = -3Ae^x \cos 2x - 3Be^x \sin 2x$$

$$-4Ae^x \sin 2x + 4Be^x \cos 2x.$$

Підставляючи y^*, $y^{*'}$, $y^{*''}$ в наше рівняння та розділивши обидві його частини на e^x, будемо мати

$$-3A \cos 2x - 3B \sin 2x - 4A \sin 2x + 4B \cos 2x + 10 \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x -$$
$$-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + 25 \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x) = \cos 2x,$$

$$32A \cos 2x + 32B \sin 2x - 24A \sin 2x + 24B \cos 2x = \cos 2x.$$

$$\begin{matrix} \textit{при} \ \cos 2x: \\ \textit{при} \ \sin 2x: \end{matrix} \begin{cases} 32A + 24B = 1, \\ 32B - 24A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32A + 24B = 1, \\ 4B - 3A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 \cdot \dfrac{4}{3} B + 24B = 1, \\ A = \dfrac{4}{3} B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 128B + 72B = 3, \\ A = \dfrac{4}{3} B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200B = 3 \Rightarrow B = \dfrac{3}{200}, \\ A = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{200} = \dfrac{1}{50}. \end{cases}$$

Отже, $y^* = e^x \left(\dfrac{1}{50} \cos 2x + \dfrac{3}{200} \sin 2x \right)$.

Тоді $\quad y = \overline{y} + y^* = e^{-5x} (C_1 + C_2 x) + e^x \left(\dfrac{1}{50} \cos 2x + \dfrac{3}{200} \sin 2x \right)$ - загальний розв'язок.

Для знаходження C_1, C_2 обчислимо

$$y' = -5e^{-5x}\left(C_1 + C_2 x\right) + e^{-5x} \cdot C_2 + e^{x}\left(\frac{1}{50}\cos 2x + \frac{3}{200}\sin 2x\right) +$$

$$+ e^{x}\left(-\frac{2}{50}\sin 2x + \frac{3}{100}\cos 2x\right).$$

Підставляючи початкові умови в $y_{заг.}$ та $y'_{заг.}$, враховуючи, що $e^{0} = 1$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, отримаємо

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{1}{50} = 1, \\ -5C_1 + C_2 + \dfrac{1}{50} + \dfrac{3}{100} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{49}{50,} \\ -5C_1 + C_2 = -\dfrac{21}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{49}{50}, \\ C_2 = \dfrac{77}{20.} \end{cases}$$

Остаточно отримаємо частинний розв'язок рівняння:

$$y = e^{-5x}\left(\frac{49}{50} + \frac{77}{20}x\right) + e^{x}\left(\frac{1}{50}\cos 2x + \frac{3}{200}\sin 2x\right).$$

Завдання для самостійної роботи

Записати структуру частинного розв'язку диференціального рівняння по вигляду функції $f(x)$.

1. $y'' + 49y = f(x)$:

   а) $f(x) = -11\cos 6x + x\sin 6x$; б) $f(x) = 5e^{-7x}$; в) $f(x) = 14\cos 7x$.

2. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$:

   а) $f(x) = x^2 e^{-2x}$; б) $f(x) = 2\cos 2x$; в) $f(x) = e^{2x}$.

Знайти загальні та частинні розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

3. $y'' - 2y' + y = x - 4$;
4. $y'' - 3y' + 2y = 4e^{x}$;
5. $y'' - 3y' = x^2 - 1$;
6. $y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$;
7. $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x$;
8. $y'' - y = 3\cos x + 2\sin x$;
9. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$;
10. $y'' - 2y' + 37y = 36e^{x}\cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

Тема 7. ЧИСЛОВІ РЯДИ. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Якщо u_1 , u_2 ,... u_n ,...— нескінченна числова послідовність, то вираз $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***числовим рядом***, а величини u_1 , u_2 ,..., u_n, ... — членами цього ряду.

Побудуємо допоміжну послідовність частинних сум ряду $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2, ... S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, ...$. Якщо ця послідовність має скінчену границю S, то ряд називається ***збіжним***, а число S — ***сумою ряду***. У випадку, коли границя не існує або є нескінченною, ряд називається ***розбіжним***.

Якщо всі члени ряду є додатними, то ряд називається ***знакододатним***. Для дослідження на збіжність таких рядів використовуються наступні ознаки збіжності.

Необхідна умова збіжності числового ряду

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним, то послідовність його членів прямує до нуля, тобто $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

Наслідок. Якщо $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є розбіжним.

Достатні умови збіжності знакододатних рядів

Ознаки порівняння.

а) «У формі нерівності»: якщо для членів знакододатних рядів справджується нерівність $u_n \leq v_n$, та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також збігається;

якщо для членів знакододатних рядів справджується нерівність $u_n \geq v_n$, та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є розбіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також розбігається.

б) «Гранична ознака»: якщо для членів знакододатних рядів має місце умова $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=C\neq 0;\infty$, то ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Найчастіше для порівняння використовується ***узагальнений гармонічний ряд*** (або ***ряд Діріхле***) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Цей ряд збігається, якщо $p>1$ та розбігається у випадку, коли $p\leq 1$.

Ознака Даламбера.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, якщо параметр $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ менший за **1,** та розбігається, якщо це число більше за **1.** У випадку $D=1$ поведінку ряду за допомогою ознаки Даламбера визначити неможливо.

Радикальна ознака Коші.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, якщо параметр $K=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ менший за **1,** та розбігається, якщо це число більше за **1.** У випадку $K=1$ поведінку ряду за допомогою радикальної ознаки Коші визначити неможливо.

Інтегральна ознака Коші.

Нехай загальний член ряду задано рівністю $u_n=f(n)$, та функція $y=f(x)$ є додатною та спадною на проміжку $[1;+\infty)$. Тоді невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ та ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

При розв'язуванні задач доцільно обирати ознаку для дослідження, користуючись порадами, які наведені у вигляді таблиці.

Структура загального члена ряду	**Рекомендована ознака**
Неправильний алгебраїчний дріб	Необхідна умова збіжності

Правильний алгебраїчний дріб; функції $\sin$, tg, $arcsin$, $arctg$, аргументами яких є правильний алгебраїчний дріб	Ознаки порівняння
$f(ln\,n)\cdot n^k$, $k \neq -1$	Ознака порівняння за допомогою нерівності
Показникова функція; факторіал; факторіальний добуток.	Ознака Даламбера
Степенево-показникова функція; показникова функція	Радикальна ознака Коші
Будь-яка монотонно спадна функція, інтегрування якої не вимагає значних зусиль, наприклад: $\frac{f(ln\,n)}{n}$; $\frac{f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$; $\frac{f(arctg\,n)}{1+n^2}$	Інтегральна ознака Коші

Зауваження 1. Отже, умова $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ є тільки необхідною, а не достатньою умовою збіжності числового ряду. Ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Тому цією ознакою зручно користуватися для доведення розбіжності рядів.

Зауваження 2. Ознаку порівняння можна застосовувати і тоді, коли нерівність $u_n \leq v_n$ виконується не для всіх членів рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, а починаючи з деякого номера $n = N$.

Зразки розв'язування задач

Скласти формулу загального члена u_n та знайти u_{n+1} для заданого числового ряду.

1. $\frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{7}{75}+\ldots$

Члени ряду є дробами. Послідовність числівників $1,4,7,\ldots$ складає арифметичну прогресію з першим членом 1 та різницею 3 , отже, задається з урахуванням формули загального члену арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$ як $1+3\cdot(n-1) = 3n-2$. Послідовність знаменників $3,15,75,\ldots$

складає геометричну прогресію з першим членом 3 та знаменником 5 , отже, за формулою загального члену геометричної прогресії $b_n = b_1 q^{n-1}$ задається як $3 \cdot 5^{n-1}$. Таким чином, загальний член ряду задається рівністю $u_n = \dfrac{3n-2}{3 \cdot 5^{n-1}}$.

Умову, яка задає u_{n+1}, можна отримати з формули загального члена шляхом заміни змінної n на $n+1$, отже,

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1)-2}{3 \cdot 5^{(n+1)-1}} = \frac{3n+1}{3 \cdot 5^{n}}.$$

2. $\dfrac{1! \cdot 1}{2} + \dfrac{3! \cdot 4}{2 \cdot 5} + \dfrac{5! \cdot 9}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \ldots$

Члени ряду є дробами. Числівник дробу складається з двох множників, перший з яких є факторіалом члена арифметичної прогресії з першим членом 1 та різницею 2 , отже, задається як $(2n-1)!$. Послідовність других множників $1, 4, 9, \ldots$ відповідає формулі n^2. Знаменник кожного з дробів є добутком попереднього знаменника та нового множника, який складає з існуючими арифметичну прогресію з першим членом 2 та різницею 3 . Таким чином, послідовність нових множників відповідає формулі $3n-1$, а весь знаменник має вигляд $2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)$. Таку послідовність будемо надалі називати факторіальним добутком. Отже, формулою загального члена ряду є рівність

$$u_n = \frac{(2n-1)! \cdot n^2}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}.$$

Тоді $u_{n+1} = \dfrac{(2(n+1)-1)! \cdot (n+1)^2}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1) \cdot (3(n+1)-1)} = \dfrac{(2n+1)! \cdot (n+1)^2}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1) \cdot (3n+2)}$.

Зауваження. Для факторіального добутку доцільно при побудові формули для u_{n+1} підкреслити наявність всіх множників, які відповідають попередньому члену ряду.

З'ясувати за допомогою ознак збіжності, чи буде збіжним числовий ряд.

3. $\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{12} + \dfrac{7}{22} + \ldots$

Загальний член ряду задається формулою $u_n = \frac{2n+1}{10n-8}$. Це неправильна дробово-раціональна функція (степінь чисельника не менший за степінь знаменника), отже, доцільно скористатися необхідною умовою збіжності.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{10n-8} = \frac{1}{5} \neq 0$. За необхідною умовою збіжності ряд розбігається.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n+1}{\sqrt[3]{n^4+5}}$.

Степінь чисельника 2 більший за степінь знаменника $\frac{4}{3}$, отже, доцільно скористатися необхідною умовою збіжності:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+1}{\sqrt[3]{n^4+5}} = \infty \neq 0$. Ряд розбігається.

5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2+7}$.

Загальний член ряду є правильною дробово-раціональною функцією, більш того $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. Тому застосуємо граничну ознаку порівняння. Досліджуваний ряд порівняємо з рядом Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, який при $p = 2 > 1$ є збіжним.

Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2+7} : \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2+7} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{1}{2} \neq 0; \infty$, тому наш ряд також збігається.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{7n+1}}$.

Як бачимо, загальний член ряду $u_n \sim \frac{1}{n^{1/3}}$. Порівняємо вихідний ряд з рядом Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$, який при $p = \frac{1}{3} < 1$ є розбіжним.

Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{7n+1}}:\frac{1}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{7n+1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{n}}{1}=\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\neq 0;\infty$, тому наш ряд також є розбіжним.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{5n^2+7}$.

Загальний член ряду є правильною дробово-раціональною функцією (степінь числівника менший за степінь знаменника), числівник еквівалентний величині $3n$, знаменник – $5n^2$, отже, $u_n\sim\frac{3n}{5n^2}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{n}$.

Порівняємо досліджуваний ряд з розбіжним гармонійним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{5n^2+7}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{5n^2+7}\cdot\frac{n}{1}=\frac{3}{5}\neq 0;\infty.$$

Згідно з граничною ознакою порівняння досліджуваний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{5n^2+7}$ також є розбіжним.

8. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$.

Врахуємо, що $\sin\frac{\pi}{2^n}\sim\frac{\pi}{2^n}$ та порівняємо наш ряд із рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\pi}{2^n}$, який дослідимо на збіжність за ознакою Даламбера ($u_n=\frac{n^2\pi}{2^n}$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)^2\pi}{2^{n+1}}$):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\pi}{2^{n+1}}:\frac{n^2\pi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\pi}{2^n\cdot 2^1}\cdot\frac{2^n}{n^2\pi}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=$$

$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}<1$, цей ряд збігається.

Зауважимо, що $n^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}\leq n^2\cdot\frac{\pi}{2^n}$ та ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\pi}{2^n}$ є збіжним. Тоді, за ознакою порівняння, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$ також збігається.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3^n}$.

До загального члена ряду входить показникова функція, отже, можна використати признак Даламбера.

$$u_n=\frac{2n+5}{3^n}\ ,\quad u_{n+1}=\frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}=\frac{2n+7}{3^{n+1}}.$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{3^{n+1}}:\frac{2n+5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2n+5}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{2n+5}=\frac{1}{3}<1.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається.

10. $\frac{1!}{2}+\frac{3!}{2\cdot 5}+\frac{5!}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots$.

Побудуємо формулу загального члена ряду. Числівники дробів є факторіалами чисел $1,3,5,\ldots$, які складають арифметичну прогресію з першим членом 1 та різницею 2, тобто відповідають формулі $a_n=2n-1$. Знаменники дробів є факторіальними добутками, останні множники яких обчислюються як $3n-1$. Тоді загальний член ряду має вигляд $u_n=\frac{(2n-1)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$. У цьому випадку також доцільно скористатися ознакою Даламбера.

$$u_{n+1}=\frac{(2(n+1)-1)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3(n+1)-1)}=\frac{(2n+1)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}:\frac{(2n-1)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\cdot 2n\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}\cdot\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot(2n+1)}{3n+2}=\infty.$$

За ознакою Даламбера ряд розбігається.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{2n+5}\right)^n$.

Загальний член ряду є степенево-показниковою функцією, отже, застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{5n-3}{2n+5}\right)^n\right]^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+5}=\frac{5}{2}>1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд розбігається.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln^{n}(3n+1)}$.

Скористаємося радикальною ознакою Коші:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{ln^{n}(3n+1)}\right]^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{ln(3n+1)}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0<1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд збігається.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$.

Спроба використати радикальну ознаку Коші призведе до результату $K=1$. Скористаємося необхідною умовою збіжності:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)-1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right)^{\left(\frac{n+1}{-1}\right)\cdot\left(\frac{-1}{n+1}\right)\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=e^{-1}=\frac{1}{e}\neq 0,$$ ряд розбігається.

Зауважимо, що при обчисленні була застосована «друга важлива границя».

14. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{ln\,n}}$.

Загальний член ряду задається за допомогою функції $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{ln\,x}}$. Ця функція неперервного аргументу для $x\geq 2$ набуває додатних значень та є спадною. Обчислимо невласний інтеграл першого роду від цієї функції та скористаємося інтегральною ознакою Коші.

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_{2}^{\beta}\frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}=\left\{ln\,x=t,\ \frac{dx}{x}=dt,\ \left|\begin{array}{l}x=2,\,t=ln\,2\\ x=\beta,\,t=ln\,\beta\end{array}\right.\right\}=$$

$$=\lim_{\beta\to+\infty}2\sqrt{t}\,\Big|_{ln\,2}^{ln\,\beta}=2\lim_{\beta\to+\infty}\left(\sqrt{ln\,\beta}-\sqrt{ln\,2}\right)=\infty.$$

Інтеграл є розбіжним, отже, ряд також розбігається.

Завдання для самостійної роботи

З'ясувати за допомогою ознак збіжності, чи буде збіжним числовий ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{2n+3}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{\sqrt{2n-1}}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{3n^2+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{5n^2+3}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(2n+1)(3n-1)}$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(2n-1)!}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{3}{2n+1}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+5}{2n-1}\right)^n$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot tg\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

12. $\frac{1}{1}+\frac{5}{4}+\frac{9}{9}+\ldots$;

13. $\frac{2}{1}+\frac{5}{3}+\frac{10}{9}+\ldots$;

14. $\frac{1}{1}+\frac{3!}{1\cdot 4}+\frac{5!}{1\cdot 4\cdot 7}+\ldots$;

15. $\frac{1}{2\,ln^3 2}+\frac{1}{3\,ln^3 3}+\frac{1}{4\,ln^3 4}+\ldots$

Тема 8. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОПОЧЕРЕЖНИХ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Якщо серед членів ряду є як додатні, так і від'ємні, такий ряд називається ***знакозмінним***.

Знакозмінний ряд називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд, складений з абсолютних величин його членів.

Якщо ряд є збіжним, а ряд з абсолютних величин розбігається, то такий знакозмінний ряд називається ***умовно збіжним***.

Ряд, члени якого по черзі є додатними та від'ємними, називається ***рядом з чергуванням знаків*** (або ***рядом Лейбніца***).Такий ряд доцільно записувати у вигляді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left|u_n\right|$.

Достатня ознака збіжності таких рядів надається ***теоремою Лейбніца***.

Теорема. Якщо виконуються дві умови:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$;

2) послідовність $|u_1|$, $|u_2|$, … $|u_n|$ …є монотонно спадною,

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n|u_n|$ збігається.

Зразки розв'язування задач

З'ясувати, чи буде заданий ряд розбіжним, абсолютно або умовно збіжним.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}$.

Члени заданого ряду мають різні знаки. Дослідимо цей ряд на абсолютну збіжність.

$$|u_n| = \left|\frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}.$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається (оскільки показник степеня $p = 2 > 1$). Згідно з ознакою порівняння знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}\right|$ також збігається, отже знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}$ збігається абсолютно.

2. $\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{6}{13} - \ldots$.

Знаки членів ряду чергуються та відповідають залежності $(-1)^{n+1}$. Загальний член ряду задається формулою $u_n = (-1)^{n+1}\frac{2n}{4n+1}$.

Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніца:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{4n+1} = \frac{1}{2} \ne 0$, тому ряд розбігається.

3. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{11}}-\dots$

Загальний член ряду задається формулою $u_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}$.

Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніца:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}=0$;

2) $|u_1|=\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$, $|u_2|=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$, $|u_3|=\frac{1}{\sqrt[3]{11}}$, …

$$|u_1|>|u_2|>|u_3|>\dots,|u_n|=\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}>|u_{n+1}|=\frac{1}{\sqrt[3]{2n+7}}.$$

За теоремою Лейбніца ряд збігається.

Дослідимо ряд із модулів членів заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}$.

Маємо $\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{2n}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{n^{1/3}}$.

Узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$ розбігається (оскільки показник степеня $p=\frac{1}{3}<1$). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}:\frac{1}{n^{1/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\neq 0$.

Згідно з граничною ознакою порівняння знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}$ також розбігається, отже , ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{2n+5}}$ збігається умовно.

Зауваження. Умова спадності може виконуватися не з першого члена ряду.

4. $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\dots$

Загальний член ряду задається формулою $u_n=(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{2^n}$.

Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніца:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|u_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)'}{\left(2^n\right)'} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2^n \ln 2} = 0$;

2) $\left|u_1\right| = \frac{1}{2}$, $\left|u_2\right| = \frac{3}{4}$, $\left|u_3\right| = \frac{5}{8}$, $\left|u_4\right| = \frac{7}{16}\dots$

$\left|u_1\right| < \left|u_2\right|$, $\left|u_2\right| > \left|u_3\right| > \left|u_4\right| > \dots,$ $\left|u_n\right| > \left|u_{n+1}\right|$, оскільки функція $f(x) = \frac{2x-1}{2^x}$ є монотонно спадною для $x > 2$ ($f'(x) = \frac{2-(2x-1)\ln 2}{2^x} < 0$).

За теоремою Лейбніца ряд збігається.

Дослідимо ряд із модулів членів заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$. Скористаємося для цього ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}\ ,\quad u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}.$$

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}} : \frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n-1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ збігається, отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{2^n}$ збігається абсолютно.

<u>Зауваження.</u> У останньому прикладі можна обмежитися дослідженням ряду з модулів, оскільки при абсолютній збіжності автоматично забезпечується збіжність за Лейбніцем.

5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$.

Розглянемо ряд з модулів членів заданого ряду $\sum\limits_{n\to 1}^{+\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$. Застосуємо до нього радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n+1} = \left(\frac{3}{\infty}\right) = 0 < 1,$$ тому ряд збігається.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$ збігається абсолютно.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$.

Дослідимо ряд з модулів членів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$.

Скористаємося для цього ознакою Даламбера: $u_n=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$,

$$u_{n+1}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3(n+1)-2)}{(2(n+1)+1)!}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n+3)!}.$$

Обчислимо $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n+3)!}:\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)}{(2n+2)\cdot(2n+3)}=0<1.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$ збігається, отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$ збігається абсолютно.

Зауваження. Якщо при дослідженні ряду з модулів за радикальною ознакою Коші або за ознакою Даламбера з’ясовано, що цей ряд розбігається, то можна зробити висновок, що буде розбіжним і знакозмінний ряд, оскільки в таких випадках ($K>1$ або $D>1$) не виконується необхідна умова збіжності.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити, чи буде заданий ряд розбіжним, абсолютно або умовно збіжним:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n^3}}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n^2+3}{3n-1}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{4^{n+1}}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^n(2n+1)}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$;

8. $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\frac{9}{27}-\ldots$

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001.

2. Овчинников П.П. та інші. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К.: Техніка, 2004.

3. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998.

4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн.. – К: Либідь, 1994.

5. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник / За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004.

6. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2002.

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.