МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

РОБОЧА ПРОГРАМА,
методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів напряму 6.040106 - екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування

Затверджено
на засіданні Вченої ради
академії
Протокол № 1 від 29.01.2013

Дніпропетровськ НМетАУ 2013

УДК 517(07)
Робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни “Вища математика” для студентів напряму 6.040106 – екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування / Укл.: О.В. Білова, І.Б. Кочеткова. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2013. – 47 с.

Наведені рекомендації до вивчення дисципліни «Вища математика»; необхідний обсяг знань та умінь студентів у результаті її вивчення; література, що рекомендується; довідковий матеріал; методичні вказівки до вивчення кожної теми; варіанти індивідуальних завдань.

Призначена для студентів напряму 6.040106 – екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування заочної форми навчання.

Друкується за авторською редакцією.

Укладачі: О.В. Білова, канд. фіз.-мат. наук, доц.
І.Б. Кочеткова, ст. викладач

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.- мат. наук, проф.

Рецензент Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф. (НМетАУ)

Підписано до друку 28.03.2013. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 2,76. Умов. друк. арк. 2,72 . Тираж 50 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РОБОТІ НАД ДИСЦИПЛІНОЮ “ВИЩА МАТЕМАТИКА”

Основна форма навчання студента-заочника – самостійна робота над навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу по підручнику, розв’язання задач, виконання контрольних робіт. На допомогу студентам академія організовує лекції та практичні заняття. Крім того, студент може розраховувати на усну консультацію викладача. Вказівки студенту також робляться в процесі рецензування контрольних робіт. Але студент повинен пам’ятати, що тільки при систематичній самостійній роботі допомога академії буде носити ефективний характер. Завершальний етап вивчення окремих частин дисципліни “Вища математика” – це здача заліків та іспитів у відповідності до навчального плану.

Читання підручника повинно супроводжуватися розв’язанням задач, для чого рекомендується завести спеціальний зошит. Креслення можна виконувати від руки, але акуратно та відповідно даним умовам.

Якщо в процесі роботи з вивчення теоретичного матеріалу або при розв’язанні задач у студента виникають питання, відповіді на які він самостійно не може знайти (неясність термінів, формулювання теорем, розв’язок окремих задач), то він може звернутися до викладача за усною консультацією. В своїх запитаннях студент повинен точно вказати, в чому він зазнає утруднення. Якщо це теоретичне питання, то треба вказати підручник, де розглянуто це питання, та що його утруднює. Якщо склалося скрутне становище при розв’язанні задачі, то треба вказати характер цього утруднення, привести припущення відносно плану розв’язку.

В процесі вивчення дисципліни студент повинен виконати контрольні роботи, головна мета яких – надати студенту допомогу в його роботі. Рецензії на ці роботи дозволяють студенту судити про ступінь засвоєння відповідного розділу дисципліни.

З кожної контрольної роботи студент виконує ті завдання, які мають відношення до його варіанта. Номер варіанта збігається з останньою цифрою номера залікової книжки або студентського квитка. Наприклад, номер залікової книжки – 007239, отже треба виконати задачі варіанта № 9. Якщо остання цифра “0”, то виконується варіант №10.

Не треба починати виконувати контрольне завдання, не розв’язавши достатньої кількості задач по матеріалу, що відповідає цьому завданню.

Виконувати контрольні завдання студент повинен самостійно, інакше він не придбає необхідних знань і буде непідготовленим до заліків або іспитів.

Кожну контрольну роботу треба присилати (приносити) в академію у заочний деканат в окремому зошиті, на обкладинці якого обов’язково позначено номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, його шифр (номер залікової книжки), факультет та групу, де навчається даний студент, домашня адреса.

Усі контрольні роботи за даний семестр повинні подаватися на кафедру не пізніше як за 10 діб до початку екзаменаційної сесії.

Після перевірки контрольних робіт треба зробити усі виправлення і доповнення, на які вказав рецензент.

Без прорецензійованих та захищених контрольних робіт, де зроблені усі виправлення і доповнення, студент не допускається до заліків або іспитів.

Програма дисципліни “ВИЩА МАТЕМАТИКА”
(1 семестр)
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1. Матриці і визначники. Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.
2. Вектори та операції над ними. Застосування векторів.

   Вектори. Лінійні дії над векторами. Властивості лінійних операцій над векторами. Колінеарні вектори. Скалярний добуток векторів.

4. Пряма лінія на площині.

   Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між прямими. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки. Загальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.

5. Криві другого порядку.

   Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола.

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ (РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ТА НОРМАЛІ). ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

1. Функції та їх границі.

Поняття функції. Способи завдання функцій. Основні елементарні функції. Означення послідовності та її границі. Розкриття невизначеностей. Перша і друга «важливі» границі.

2. Похідна та диференціал функції, їх застосування.

Означення похідної, її геометричний та фізичний зміст. Правила диференціювання. Диференціал функції в точці. Екстремум функції. Правило Лопіталя. Обчислення похідної складеної функції, дотична і нормаль до плоскої кривої.

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

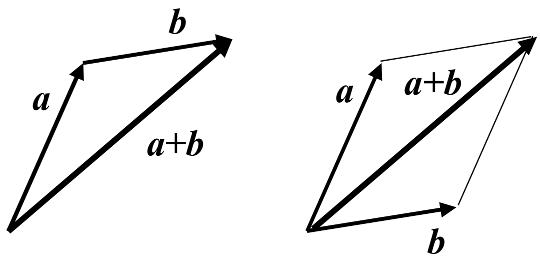
Поняття первісної функції та невизначеного інтегралу, його властивості. Таблиця інтегралів. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Інтегрування дробово-раціональних функцій. Інтегрування деяких тригонометричних функцій. Комплексні числа та дії над ними.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

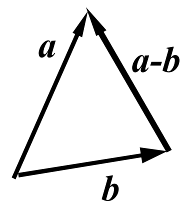
ВЕКТОРИ

Дії над векторами

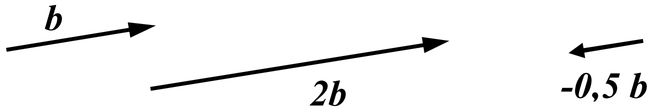
1. Додавання векторів



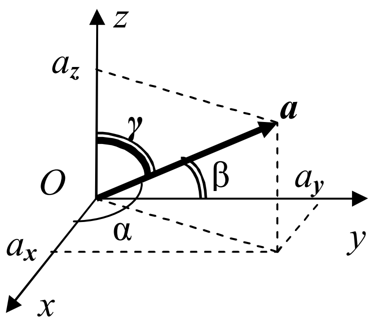
2. Віднімання векторів



3. Множення на число (приклади)



Вектори у декартовій системі координат



$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = \left(a_x ; a_y ; a_z\right) \quad ,$$

$$\overline{AB} = \left(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A\right) \; .$$

Довжина вектора $\quad |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\;.$

Напрямні косинуси $\quad \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}.$

Дії над векторами, заданими у координатній формі

$$\bar{a} + \bar{b} = \left(a_x + b_x ; a_y + b_y ; a_z + b_z\right),$$

$$\bar{a} - \bar{b} = \left(a_x - b_x ; a_y - b_y ; a_z - b_z\right),$$

$$\lambda \bar{a} = \left(\lambda a_x ; \lambda a_y ; \lambda a_z\right)\;.$$

Умова колінеарності векторів $\quad \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}\;.$

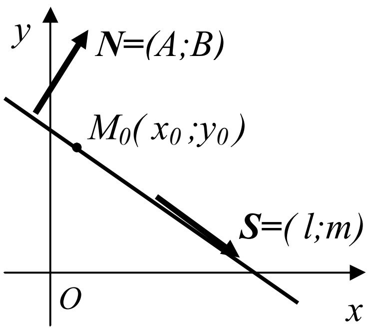
Скалярний та векторний добутки векторів

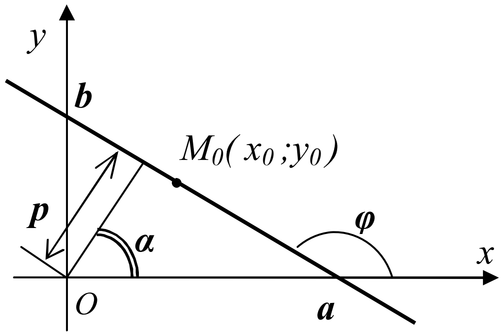
Добуток	Скалярний	Векторний
Позначення	$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a},\vec{b})$	$\vec{a}\times\vec{b}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$
Тип величини	Число	Вектор
Означення	$\vert\vec{a}\vert\,\vert\vec{b}\vert\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$	$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо: 1) $\vec{c}$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 2) трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ − права; 3) $\vert\vec{c}\vert=\vert\vec{a}\vert\,\vert\vec{b}\vert\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
Властивості	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vert\vec{a}\vert^2$	$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ $\vec{a}\times\vec{a}=0$
Добутки ортів	$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ $\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$	$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$ $\rightarrow+\quad \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\ \vec{i}\ \vec{j}\quad \leftarrow-$
Обчислення в ДСК	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$
Основні задачі	довжина вектора $\vert\vec{a}\vert=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ косинус кута між векторами $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vert\vec{a}\vert\,\vert\vec{b}\vert}$ проекція вектора на інший вектор $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vert\vec{b}\vert}$ умова перпендикулярності $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ $S=\vert\vec{a}\times\vec{b}\vert$ площа трикутника $S_\Delta=\dfrac{\vert\vec{a}\times\vec{b}\vert}{2}$ висота паралелограма $h_a=\dfrac{S}{\vert\vec{a}\vert}=\dfrac{\vert\vec{a}\times\vec{b}\vert}{\vert\vec{a}\vert}$ висота трикутника $h_a=\dfrac{2S_\Delta}{\vert\vec{a}\vert}=\dfrac{\vert\vec{a}\times\vec{b}\vert}{\vert\vec{a}\vert}$

Мішаний добуток векторів

Позначення	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ або $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$
Означення	$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$
Властивості	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$
Обчислення у ДСК	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
Основні задачі	умова компланарності трьох векторів $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ орієнтація трійки векторів: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$ − права трійка ; $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$ − ліва трійка об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ $V_{паралелепіпеда}=\left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|$ об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ $V_{піраміди}=\frac{1}{6}\left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|$ висота паралелепіпеда $h=\frac{V_{паралелепіпеда}}{S_{грані}}=\frac{\left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}$ висота піраміди $h=\frac{3V_{піраміди}}{S_{грані}}=\frac{\left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}$

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ





Найпростіше рівняння
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Рівняння з кутовим коефіцієнтом
$$y=kx+b, \qquad k=tg\varphi.$$

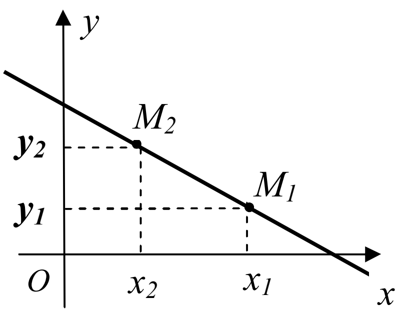
Загальне рівняння
$$Ax+By+C=0.$$

Рівняння прямої, що проходить у заданому напряму (рівняння в'язки)
$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Канонічне рівняння
$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Рівняння у відрізках на осях
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Нормальне рівняння
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0.$$



Рівняння прямої, що проходить через дві точки
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}; \; k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Умова паралельності прямих $\qquad k_2=k_1.$

Умова перпендикулярності прямих $\qquad k_2=-\dfrac{1}{k_1}.$

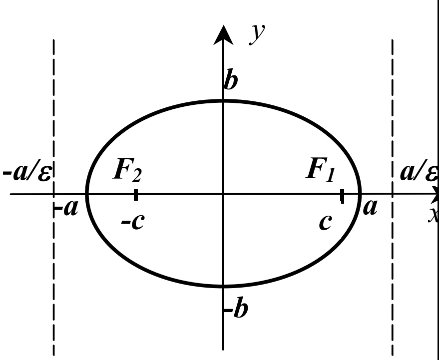
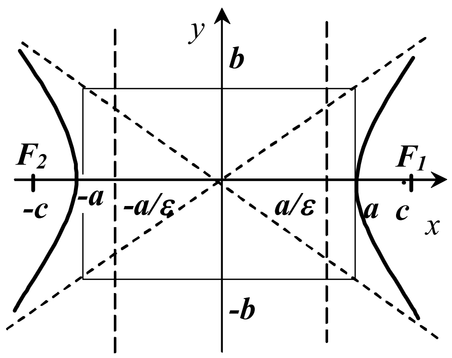
Кут θ між прямими (гострий) $\qquad tg\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$

Відстань від точки M до прямої $\qquad d(M)=|x_M\cos\alpha+y_M\sin\alpha-p|$,

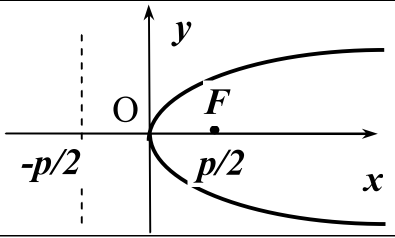
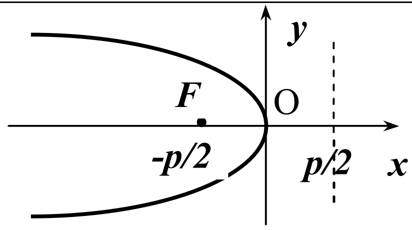
або $\qquad d(M)=\dfrac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

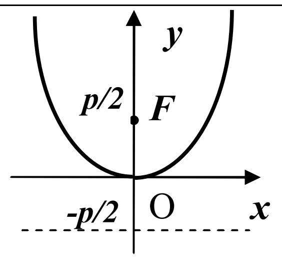
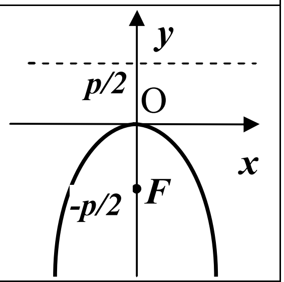
Еліпс та гіпербола

Крива	***Еліпс з фокусами на вісі Ox***	***Гіпербола з фокусами на вісі Ox***
Рівняння	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Піввісі (***2a, 2b – вісі)***	***a*** – велика ***b*** –мала	***a*** – дійсна ***b*** – уявна
Відстань від центра до фокусів	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
Координати фокусів	$F_1(c;\ 0);\ F_2(-c;\ 0)$	$F_1(c;\ 0);\ F_2(-c;\ 0)$
Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}\quad(\varepsilon<1)$	$\varepsilon=\frac{c}{a}\quad(\varepsilon>1)$
Рівняння директрис	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}\quad\left(x=\pm\frac{a^2}{c}\right)$	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}\quad\left(x=\pm\frac{a^2}{c}\right)$
Рівняння асимптот	—	$y=\pm\frac{b}{a}x$
Відстані від точки М до фокусів	$F_1M=r_1=a-\varepsilon\,x_M$ $F_2M=r_2=a+\varepsilon\,x_M$	$F_1M=r_1=\lvert a-\varepsilon\,x_M\rvert$ $F_2M=r_2=\lvert a+\varepsilon\,x_M\rvert$
Рисунок		

Параболи, симетричні відносно осі Ox

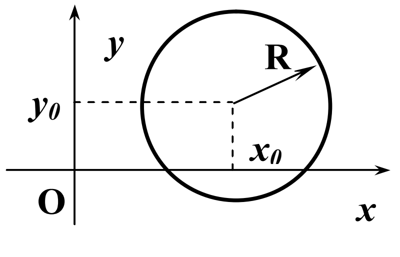
Рівняння	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$
Координати Фокуса	$F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$	$F\left(-\dfrac{p}{2};0\right)$
Рівняння Директриси	$x = -\dfrac{p}{2}$	$x = \dfrac{p}{2}$
Рисунок		

Параболи, симетричні відносно осі Oy

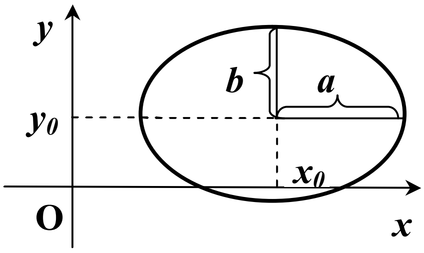
рівняння	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
координати фокуса	$F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$	$F\left(0;-\dfrac{p}{2}\right)$
рівняння директриси	$y = -\dfrac{p}{2}$	$y = \dfrac{p}{2}$
рисунок		

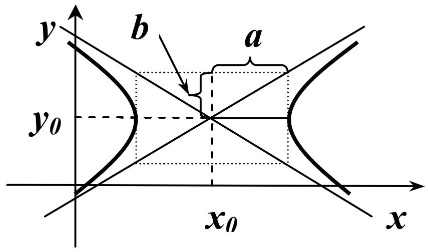
Зсунені криві

Коло $\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2$

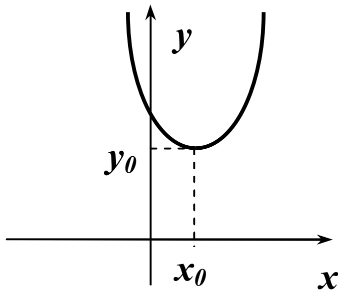


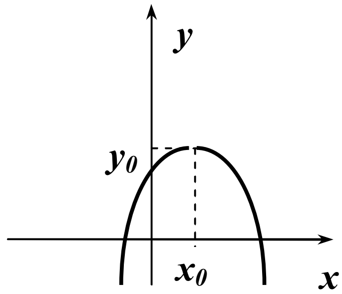
Еліпс $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Гіпербола $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$



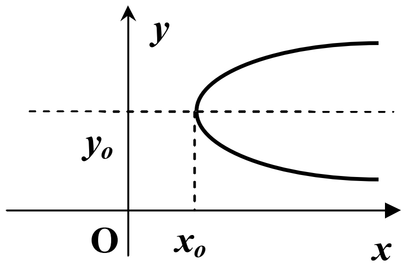


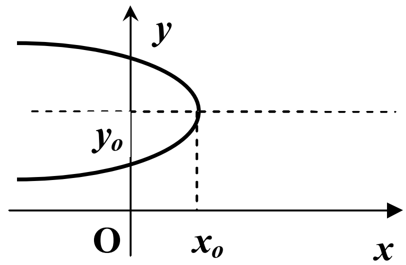
Параболи $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$ $(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$





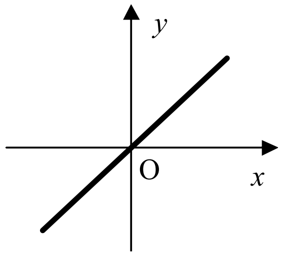
$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ $(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$



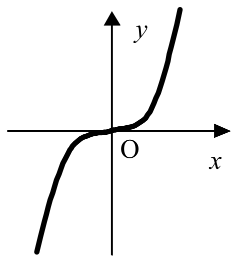


ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

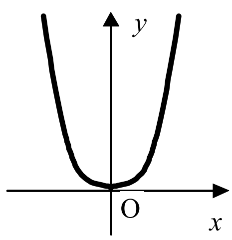
Алгебраїчні функції



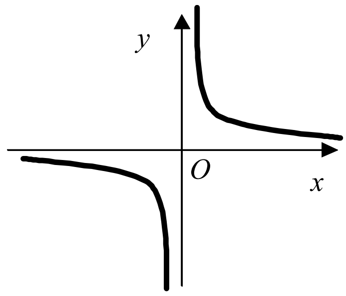
$y=x$

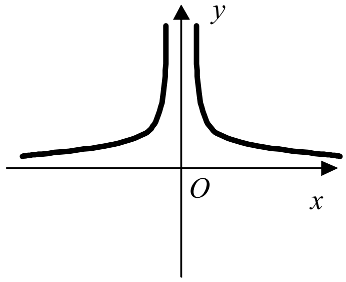


$y=x^3$, $y=x^{2n+1}$

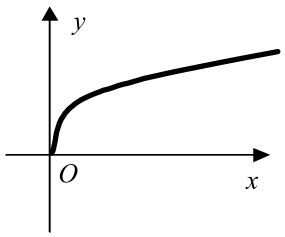


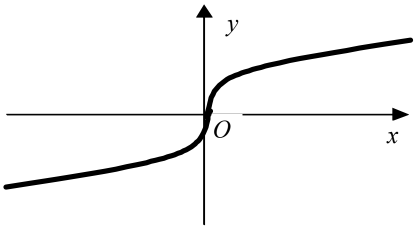
$y=x^2$, $y=x^{2n}$

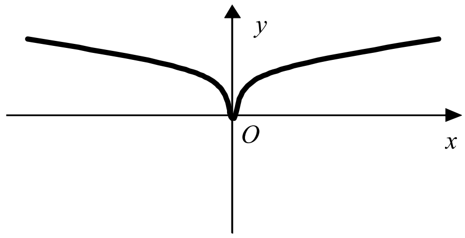




$y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$



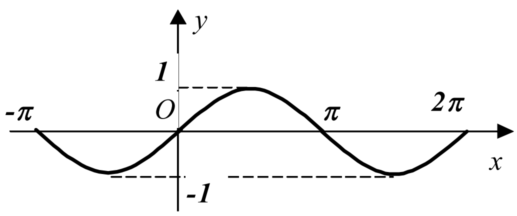




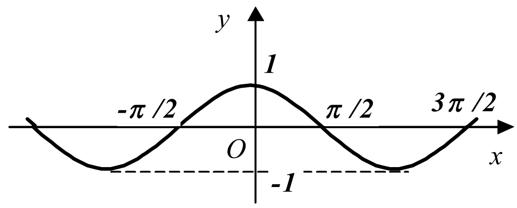
$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[2n]{x}$ $\qquad$ $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[2n+1]{x}$ $\qquad$ $y^3 = x^2$, $y^{2n+1} = x^{2m}$

$(2n + 1 > 2m)$

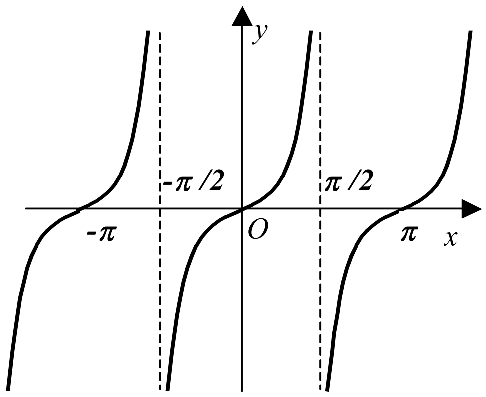
Трансцендентні функції



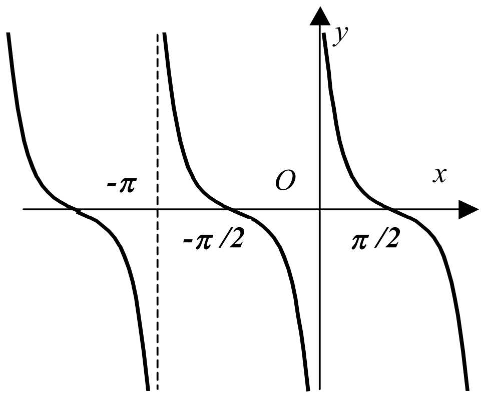
$y = \sin x$



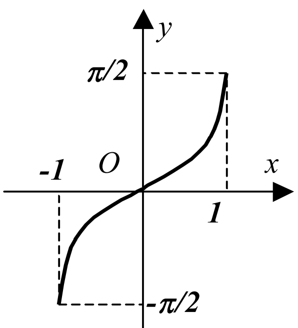
$y = \cos x$



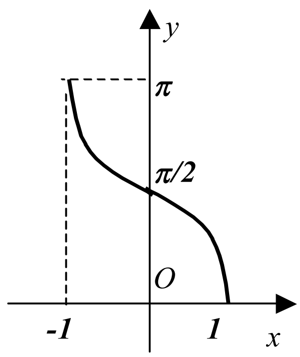
$y = tg\, x$



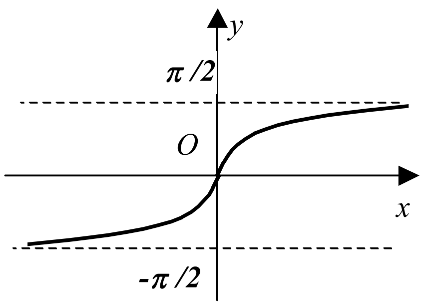
$y = ctg\, x$



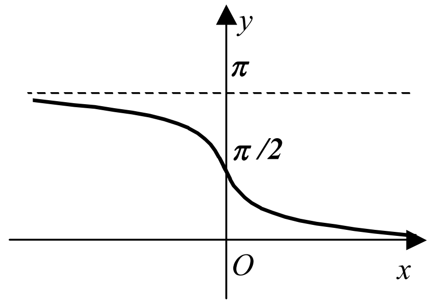
$y = \arcsin x$



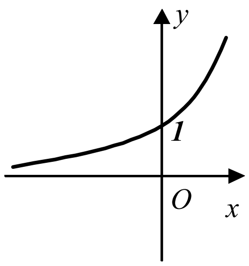
$y = \arccos x$



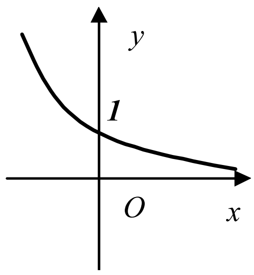
$y = arctg\, x$



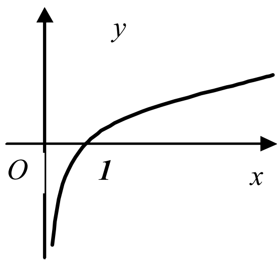
$y = arcctg\, x$



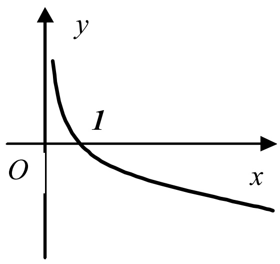
$y = a^{x}, a > 1$



$y = a^{x}, 0 < a < 1$



$y = \log_a x, a > 1$



$y = \log_a x, 0 < a < 1$

ГРАНИЦІ

Перша важлива границя $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Друга важлива границя $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$.

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e \quad .$$

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

У випадку невизначеності $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ треба поділити чисельник та знаменник на найвищий степінь змінної.

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 4x + 5}{x^2 + 3x - 8} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\dfrac{x^3 - 4x + 5}{x^3}}{\dfrac{x^2 + 3x - 8}{x^3}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{8}{x^3}} = \left(\dfrac{1}{0}\right) = \infty$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[4]{3x^4+x}}{\sqrt{x^2+7}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}+\dfrac{\sqrt[4]{3x^4+x}}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{x}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^3}}+\sqrt[4]{\dfrac{3x^4+x}{x^4}}}{\sqrt{\dfrac{x^2+7}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt[4]{3+\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}}=\sqrt[4]{3};$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+1)+n!}{(n+1)(n+2)n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+2)}{n!(n+1)(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=$

$$=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

У разі невизначеності $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ треба чисельник та знаменник розкладати на множники.

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-6x+8}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x+4}{x-4}=\dfrac{12}{-2}=-6.$

Якщо границя містить ірраціональність, позбутися її за допомогою формул скороченого множення; якщо невизначеність не зникне, а трансформується у (∞/∞), поділити на старший степінь змінної (з урахуванням добування коренів).

4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(\sqrt{2x+3}-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=$

$$=\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{(x^2-9)\left(\sqrt{2x-3}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{2x-3}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{2}{(x+3)\left(\sqrt{2x-3}+3\right)}=\frac{1}{18}.$$

Якщо вираз має тригонометричні функції, перетворити суми тригонометричних функцій на добутки; множники, границя котрих не дорівнює 0 або ∞, замінити цими границями; для кожного множника, який прямує до 0, побудувати 1-у важливу границю.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 5x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\dfrac{2}{5}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cdot\sin x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}3x\cdot\dfrac{\sin x}{x}x}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot x}{x^2}=6$$

У випадку степенево-показникової функції (невизначеність $\left(1^{\infty}\right)$) основу записати як суму 1 та нескінченно малої функції, побудувати другу важливу границю та перейти до границі у показнику.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-4}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+1}{3x-4}-1\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{3x-4}\right)^{x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{3x-4}\right)^{\frac{3x-4}{5}}\right]^{\frac{5}{3x-4}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{3x-4}}=e^{\frac{5}{3}};$$

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 2}\left(1+(3x-5)-1\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+(3x-6)\right)^{\frac{1}{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\left(1+(3x-6)\right)^{\frac{1}{3x-6}}\right]^{\frac{3x-6}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-6}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-2}}=e^{3}.$$

ПОХІДНІ

Похідні основних елементарних функцій

1. $\left(x^{n}\right)'=n\,x^{n-1}$
2. $\left(x\right)'=1$
3. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}}$

Похідні складених елементарних функцій

1а. $\left(u^{n}\right)'=n\,u^{n-1}\cdot u'$

3а. $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$

4а. $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{1}{u^{2}}\cdot u'$

5. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$

5a. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a \cdot u'$

6. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

6a. $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$

7. $\left(\log_{a} x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

7a. $\left(\log_{a} u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a} \cdot u'$

8. $\left(\lg x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 10}$

8a. $\left(\lg u\right)' = \dfrac{1}{u\ln 10} \cdot u'$

9. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

9a. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

10. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

10a. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$

11. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

11a. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$

12. $\left(tg\, x\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$

12a. $\left(tg\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} u} \cdot u'$

13. $\left(ctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} x}$

13a. $\left(ctg\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} u} \cdot u'$

14. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

14a. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$

15. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

15a. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$

16. $\left(arctg\, x\right)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$

16a. $\left(arctg\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^{2}} \cdot u'$

17. $\left(arcctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$

17a. $\left(arcctg\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^{2}} \cdot u'$

ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1. $C' = 0$

2. $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$

$\left(u \pm C\right)' = u'$

3. $\left(uv\right)' = u'v + v'u$

$\left(C \cdot u\right)' = C \cdot u'$

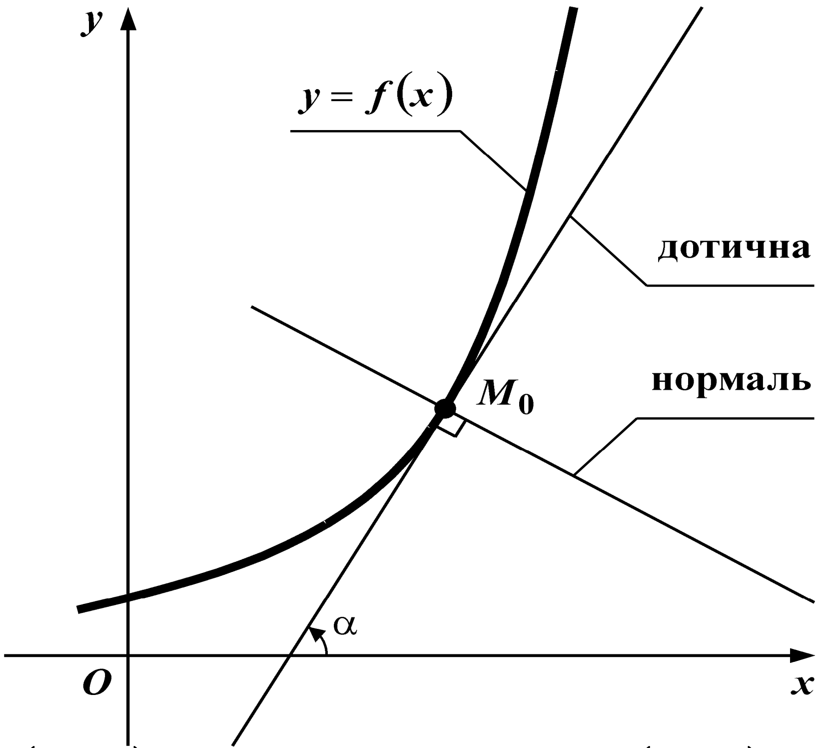
$\left(C \cdot x\right)' = C$

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^{2}}$

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$$

$$\left(\frac{x}{C}\right)' = \frac{1}{C}$$

ДОТИЧНА І НОРМАЛЬ



$y - y_0 = k(x - x_0)$ - рівняння прямої через т. $M_0(x_0\,;y_0)$;

$k = tg\alpha = y'(M_0)$ - геометричний зміст похідної;

$y - y_0 = y'(M_0)(x - x_0)$ - рівняння дотичної;

$k_1 \cdot k_2 = -1$ - умова перпендикулярності прямих;

$y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(M_0)}(x - x_0)$ - рівняння нормалі.

Дотична і нормаль до даної лінії в заданій точці – це є прямі, що проходить через точку дотику $M_0(x_0\,;y_0)$.

Геометричний зміст похідної в даній точці $M_0(x_0\,;y_0)$: значення похідної в даній точці $y'(M_0)$ є тангенс кута α, під яким дотичне до кривої в точці M_0

перетинає вісь OX . Нормаль перпендикулярна до дотичної в точці дотику M_0. Тому слід використати умову перпендикулярності двох прямих: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ

Для дослідження функції і побудови її графіка студент повинен добре знати, що при зростанні функції - $y' > 0$, при спаданні - $y' < 0$ і розуміти різницю між необхідною та достатньою умовами існування екстремуму функції, а також необхідною і достатньою умовами існування точок перегину.

$y'(x_0) = 0$ або не існує – необхідна умова існування екстремуму;

$y''(x_0) = 0$ або не існує – необхідна умова існування точок перегину.

Із цих умов знаходяться критичні точки.

Достатня умова для існування екстремуму в т. M_0 або точки перегину – зміна знака відповідно до першої і другої похідної при переході через критичну точку.

$y' > 0$ – функція зростає ↗ ; $y' < 0$ – функція спадає ↘ ;

$y'' > 0$ – функція вгнута $\overset{+}{\cup}$; $y'' < 0$ – функція опукла $\underset{-}{\cap}$.

ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. а) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

   б) $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

   в) $\int df(x) = f(x) + C$.

2. а) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad A = const$.

   б) $\int [\, f_1(x) + f_2(x)\,]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

   в) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Заміна змінної

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \left\{ \begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{matrix} \right\} = \int f(t)dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C$$

$x\,dx \quad \to \quad x^2 = t$

$x^n\,dx \quad \to \quad x^{n+1} = t$

$\sin x\,dx \quad \to \quad \cos x = t$

$\cos x\,dx \quad \to \quad \sin x = t$

$e^{kx}\,dx \quad \to \quad e^{kx} = t$

$a^x\,dx \quad \to \quad a^x = t$

$\dfrac{dx}{x} \quad \to \quad \log_a x = t,\ \ln x = t$

$\dfrac{dx}{x^n} \quad \to \quad \dfrac{1}{x^{n-1}} = t$

$\dfrac{dx}{\sqrt{x}} \quad \to \quad \sqrt{x} = t$

$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \to \quad \arcsin x = t,$ $\arccos x = t$

$\dfrac{dx}{1+x^2} \quad \to \quad arctg\,x = t,\ arcctg\,x = t$

$\dfrac{dx}{\cos^2 x} \quad \to \quad tg\,x = t$

$\dfrac{dx}{\sin^2 x} \quad \to \quad ctg\,x = t$

Інтегрування частинами

$$\underline{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

1) $\displaystyle\int \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x^n \\ P_n(x) \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{\begin{bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx}, a^x \end{bmatrix} dx}_{dv}$; $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 kx}\,dx$; $u = x$ $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 kx}\,dx$. $u = x$

2) $\displaystyle\int x^s \underbrace{\log_a^n}_{u} x\,dx,\quad s \neq -1$; $\displaystyle\int x^n \underbrace{\arcsin kx}_{u}\,dx$; $\displaystyle\int x^n \underbrace{arctg\,kx}_{u}\,dx$.

3) Циклічні інтеграли

$\displaystyle\int \underbrace{\begin{bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{kx} \\ a^x \end{bmatrix} dx}_{dv}$; $\displaystyle\int \underbrace{\sin \ln x}_{u}\,dx$; $\displaystyle\int \underbrace{\cos \ln x}_{u}\,dx$; $\displaystyle\int \underbrace{\sqrt{ax^2+b}}_{u}\,dx$.

Таблиця інтегралів

1. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ ,\ n \neq -1$ $\qquad \displaystyle\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

$\displaystyle\int dx = x + C$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

3. $\int \frac{dx}{x^2+p} = \frac{1}{\sqrt{p}} arctg \frac{x}{\sqrt{p}} + C$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg\, x + C$$

4. $\int \frac{dx}{x^2-p} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{p}}{x+\sqrt{p}}\right| + C$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm p}\right| + C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{p-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{p}} + C$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

10. $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

11. $\int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg \frac{x}{2}\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$

16. $\int \frac{x\, dx}{ax^2+b} = \frac{1}{2a} \ln\left|ax^2+b\right| + C$

$$\int \frac{x\, dx}{x^2+b} = \frac{1}{2} \ln\left|x^2+b\right| + C$$

17. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+b} + C$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b} + C$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{b-x^2}} = -\sqrt{b-x^2} + C$$

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Вираз вигляду $z=\alpha+\beta\cdot i$, де α і β - дійсні числа, $i^2=-1$, називається *комплексним числом (в алгебраїчній формі).*

Комплексне число $\bar{z}=\alpha-\beta\cdot i$ називається *комплексно-спряженим числом* до комплексного числа $z=\alpha+\beta\cdot i$.

Дії над комплексними числами. Нехай дано два комплексні числа:
$z_1=\alpha_1+\beta_1\cdot i$ та $z_2=\alpha_2+\beta_2\cdot i$. Тоді

1) $z_1+z_2=(\alpha_1+\beta_1\cdot i)+(\alpha_2+\beta_2\cdot i)=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\cdot i$;

2) $z_1\cdot z_2=(\alpha_1+\beta_1\cdot i)\cdot(\alpha_2+\beta_2\cdot i)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)i$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\alpha_1+\beta_1 i}{\alpha_2+\beta_2 i}=\dfrac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\dfrac{\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}i$.

Для будь-якого комплексного числа $z=\alpha+\beta i$ маємо:
$z\cdot\bar{z}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$.

Величина $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ називається *модулем комплексного числа.* Кут φ, що визначений наступними рівностями

$\begin{cases}\alpha=\rho\cdot\cos\varphi\\ \beta=\rho\cdot\sin\varphi\end{cases}$, $\varphi\in[0,2\pi)$, називається *аргументом комплексного числа.*

Будь-яке комплексне число можна записати в тригонометричній формі:

$$z=\alpha+\beta i=\rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi),$$

де $\alpha=\rho\cdot\cos\varphi,\ \beta=\rho\cdot\sin\varphi$.

Приклад. Дано комплексне число $z_0=\dfrac{2}{1+i}$. Треба:

записати дане число в алгебраїчній та в тригонометричній формах.

Розв'язання Приведемо комплексне число z_0 до алгебраїчної форми: $z_0=\alpha_0+\beta_0 i$.

Для цього помножимо чисельник та знаменник дроби z_0 на число $1-i$, комплексно-спряжене до знаменника. Отримаємо:

$$z_0=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2(1-i)}{1+1}=1-i.$$

Це й є алгебраїчна форма комплексного числа z_0, де $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -1$.

Приведемо комплексне число $z_0 = 1 - i$ до тригонометричного виду: $z_0 = \rho_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, де ρ_0 - модуль комплексного числа z_0, φ_0 - аргумент цього числа.

Знайдемо $\rho_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} = \sqrt{2}$. Для знаходження φ_0 маємо систему:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \rho_0 cos\varphi_0 \\ \beta_0 = \rho_0 \sin\varphi_0 \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\varphi_0 \\ -1 = \sqrt{2}\sin\varphi_0 \end{cases},$$

і тоді $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$. Звідси, тригонометрична форма комплексного числа z_0. має вигляд:

$$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1

Тема **Матриці. Визначники. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Елементи векторної алгебри. Аналітична геометрія на площині. Аналітична геометрія у просторі. Функції. Обчислення границь. Диференційованість функцій. Невизначений інтеграл. Комплексні числа.**

Завдання до контрольної роботи № 1

1. Завдання. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера.

1. $\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = 5 \\ 5x - y + 2z = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ 3x + 2y - 5z = 4 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ x + y + 3z = 6 \\ x - 2y - 7z = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 5y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x - 3y - 5z = 8 \\ 3x + 7y - 3z = 10 \\ x + 2y + 5z = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 10 \\ x + y + 4z = 6 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + y + 2z = 6 \\ 2x - y + 7z = 7 \\ x + y - 3z = -2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x + 7y + 4z = 3 \\ 3x - 5y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7x + y - z = 2 \\ 5x + 2y + z = 10 \\ 2x + 3y - 5z = 2 \end{cases}$

2. **Задача.** Задано координати вершини піраміди. Знайти її об'єм.

1. $A_1(4;3;6),\quad A_2(1;2;1),\quad A_3(-1;0;1),\quad A_4(-4;6;0).$
2. $A_1(-1;2;3),\quad A_2(1;-3;0),\quad A_3(-6;5;8),\quad A_4(-5;2;-4).$
3. $A_1(2;2;4),\quad A_2(4;-1;-2),\quad A_3(3;3;1),\quad A_4(-4;2;1).$
4. $A_1(2,3,4),\quad A_2(-2,5,-2),\quad A_3(-7,5,2),\quad A_4(-7,-3,6).$
5. $A_1(-1,6,2),\quad A_2(2,0,-3),\quad A_3(3,6,-3),\quad A_4(9,6,7).$
6. $A_1(0,-1,-1),\quad A_2(-2,3,5),\quad A_3(1,-5,-9),\quad A_4(-1,-6,3).$
7. $A_1(5,2,0),\quad A_2(2,5,0),\quad A_3(1,2,4),\quad A_4(-1,7,1).$
8. $A_1(2,-1,-2),\quad A_2(1,2,1),\quad A_3(5,0,-6),\quad A_4(-10,9,-7).$
9. $A_1(-3,0,-4),\quad A_2(-2,7,1),\quad A_3(3,-8,-4),\quad A_4(1,-4,6).$
10. $A_1(5,4,5),\quad A_2(-5,-3,6),\quad A_3(-1,-6,-3),\quad A_4(-2,2,-1).$

3. **Задача.** Задано координати вершин трикутника АВС.

Знайти:

1. Рівняння медіани ВК.
2. Довжину медіани ВК.
3. Рівняння прямої, що проходить через вершину А паралельно стороні ВС.
4. Рівняння висоти АР.
5. Довжину висоти АР.
6. Точку перетину медіани ВК та висоти АР.
7. Кут КВС.
8. Площу трикутника АВС.

Варіант	$A(x_1; y_1)$	$B(x_2; y_2)$	$C(x_3; y_3)$
1	**(-4; 2)**	**(1; 5)**	**(-1; 5)**
2	**(4; 1)**	**(2; 3)**	**(1; -2)**
3	**(-6; 1)**	**(3; 7)**	**(-2; 5)**
4	**(-1; 6)**	**(3; 3)**	**(8; 0)**
5	**(1; -1)**	**(2; 5)**	**(4; -1)**
6	**(4; -3)**	**(-1; 5)**	**(5; -1)**
7	**(3; 0)**	**(1; 6)**	**(7; -2)**
8	**(0; 2)**	**(-1; 6)**	**(-4; -2)**
9	**(2; 1)**	**(3; -1)**	**(9; -1)**
10	**(-1; 2)**	**(1; 8)**	**(4; 4)**

4. Задача. Побудувати лінію. Знайти довжини осей, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис (для еліпса), рівняння асимптот (для гіперболи).

Варіант	**Рівняння лінії**	Варіант	**Рівняння лінії**
1	$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$	**6**	$x^2 + 36y^2 - 36 = 0$
2	$9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$	**7**	$4x^2 + 16y^2 - 64 = 0$
3	$16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$	**8**	$16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$
4	$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$	**9**	$25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$
5	$4y^2 - 9x^2 - 36 = 0$	**10**	$x^2 - 9y^2 - 9 = 0$

5. Задача. Знайти координати центра і радіус кола. Побудувати коло.

Варіант	Рівняння кола	Варіант	Рівняння кола
1	$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$	**6**	$x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$
2	$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$	**7**	$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$
3	$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$	**8**	$x^2 + y^2 - 2y + 8x + 1 = 0$
4	$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$	**9**	$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$
5	$x^2 + y^2 + 4y = 0$	**10**	$x^2 + y^2 - 2y + 12x + 1 = 0$

6. Завдання. Знайти границі функцій, не користуючись правилами Лопіталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-2}{x^2+2x+15}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{7x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4x^3}{2+x+x^2+8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$;

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-3x^3+12}{2x^5+149}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{2}{3x}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x^2+x}{x^2-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 10x}{\cos 2x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{1-x}\right)^{3x-1}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^3}{1+3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x+5}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x+\sin 11x}{5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{5}{3x}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{16x^2-13x-3}{2x^2+3x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+5x+1}{3x^3-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-6x+5}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5}{7x^3+x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x+6}{x^2-2x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx+tg2x}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2}{x^3-1}\right)^{2x-x^3}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2+5}{2x^3-3x+21}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}$;

в) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}{\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{3+x}\right)^{x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x}$.

7. **Завдання**. Знайти похідні y' даних функцій.

1. $a)\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9x+4}}+\dfrac{12}{\sqrt[4]{x^3+10}}$; 6. $a)\ y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

$b)\ y=x\arcsin\dfrac{1}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2-1})$; $b)\ y=tg(2\arccos\sqrt{1-2x^2})$;

2. a) $y = e^{1+\ln^2 x}$;
b) $y = \sqrt{1+2x} - \ln(x + \sqrt{2x+1})$;

3. a) $x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;
b) $y = \sin 3x \ln\cos x$;

4. a) $y = x + \dfrac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$;
b) $y = \dfrac{\ln x}{1+x^2} + \ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$;

5. a) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$;
b) $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\dfrac{x}{2}$;

7. a) $y = arctg\dfrac{1}{x}$;
b) $y = x^2 arctg\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}$;

8. a) $y = e^{\arcsin 2x}$;
b) $y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$;

9. a) $y = tg(\ln\sqrt{x})$;
b) $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x})$;

10. a) $y = \ln ctg\sqrt[3]{x}$;
b) $y = 2x + \ln(\sin x + 2\cos x)$.

8. Завдання. Записати рівняння дотичної та нормалі до лінії, що задана рівнянням y = f(x) в точці x_0.

1. $y = \dfrac{3x-4}{3-x}$, $x_0 = 1$;
2. $y = \dfrac{2x+1}{2-x}$, $x_0 = 1$;
3. $y = \dfrac{x-4}{1+x}$, $x_0 = 1$;
4. $y = \dfrac{x-4}{3-x}$, $x_0 = -1$;
5. $y = \dfrac{x+2}{x-5}$, $x_0 = 1$;
6. $y = \dfrac{3x-2}{3-x}$, $x_0 = 1$;
7. $y = \dfrac{3x-4}{3-x}$, $x_0 = 0$;
8. $y = \dfrac{3x+1}{2-x}$, $x_0 = 0$;
9. $y = \dfrac{2x-4}{1-x}$, $x_0 = 0$;
10. $y = \dfrac{3x-4}{3-x}$, $x_0 = -1$.

9. Завдання. Знайти екстремуми функції:

1. $y = 5 + 3x - x^3$;
2. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$;
6. $y = 4x^2 - x^4$;
7. $y = \dfrac{x^4}{4} - 8x$;

3. $y = x(x+3)^2$;

4. $y = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$;

5. $y = 3x^2 - x^3 - 4$;

8. $y = 2x^4 - 4x^2$;

9. $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$;

10. $y = 3x^5 - 5x^4$.

10. Завдання. Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \dfrac{x\ dx}{\sqrt{5-x^2}}$;

б) $\int arctg 2x\, dx$;

в) $\int \dfrac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$;

2. а) $\int \dfrac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$;

б) $\int \dfrac{x\, dx}{\cos^2 x}$;

в) $\int \dfrac{x^3+4x^2-2x-8}{x^2+4x}dx$;

3. а) $\int \dfrac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$;

б) $\int x arctg x\, dx$;

в) $\int \dfrac{dx}{x^3-x^2}$;

4. а) $\int \dfrac{x\, dx}{\sqrt{x^4+1}}$;

б) $\int \arcsin x\, dx$;

в) $\int \dfrac{x\, dx}{x^2+4x+5}$;

5. а) $\int \dfrac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$;

б) $\int arcctg x\, dx$;

6. а) $\int \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$;

б) $\int x\, ln(x-1)\, dx$;

в) $\int \dfrac{dx}{x^4+3x^2}$;

7. а) $\int \dfrac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+2\sin^2 x}}$;

б) $\int \dfrac{ln\, x\, dx}{x^3}$;

в) $\int \dfrac{(x^2-3)dx}{x^4+10x^2}$;

8. а) $\int \dfrac{e^{2x}dx}{e^x-1}$;

б) $\int x^2 e^{3x}dx$;

в) $\int \dfrac{dx}{x^3+x}$;

9. а) $\int \dfrac{\sin x\, dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$;

б) $\int x^2 e^x dx$;

в) $\int \dfrac{(x^2+1)dx}{x^3-3x^2+3x-1}$;

10. а) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ln\, x+1}}$;

б) $\int (x^2+1)e^{-2x}dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$;

в) $\int \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1}$;

11. Завдання. Представити комплексне число в алгебраїчній та тригонометричній формі:

1. $z_0 = \frac{4}{1 - i\sqrt{3}}$;
2. $z_0 = \frac{1}{1 - i}$;
3. $z_0 = \frac{2}{1 + i}$;
4. $z_0 = \frac{1}{1 + i\sqrt{3}}$;
5. $z_0 = \frac{1}{\sqrt{3} + i}$;
6. $z_0 = \frac{1}{\sqrt{3} - i}$;
7. $z_0 = \frac{2\sqrt{2}}{1 + i}$;
8. $z_0 = \frac{1}{1 + i}$;
9. $z_0 = \frac{1}{\sqrt{3} - i}$;
10. $z_0 = \frac{4}{\sqrt{3} + i}$.

Програма дисципліни “ВИЩА МАТЕМАТИКА”
(2 семестр)

ВИЗНАЧЕНИЙ ТА НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛИ

1. Означення визначеного інтеграла, його геометричний і фізичний зміст, умови існування. Обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона – Лейбніця. Заміна змінної і інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Обчислення площі плоскої фігури.
2. Невласні інтеграли першого роду (з нескінченними межами інтегрування) та невласні інтеграли другого роду (від функцій, необмежених на скінченому проміжку).

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Задачі, що приводять до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Основні поняття і означення.
2. Диференціальні рівняння першого порядку: з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні.
3. Диференціальні рівняння другого порядку: лінійні однорідні та лінійні неоднорідні (зі спеціальною правою частиною) зі сталими коефіцієнтами.

ЧИСЛОВІ РЯДИ

1. Числові ряди: основні поняття і означення. Необхідна умова збіжності. Основні властивості збіжних рядів. Дослідження збіжності числових рядів з додатними членами.
2. Достатні умови (ознаки) збіжності додатних числових рядів:ознака порівняння, ознака Даламбера, радикальна ознака Коші.
3. Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніця.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Елементи комбінаторики та **п**оняття ймовірності події, обчислення:
формули комбінаторики-розміщення, перестановки, сполучення; класична формула теорії ймовірностей; обчислення ймовірностей випадкових подій.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Формула Ньютона - Лейбніца для обчислення визначених інтегралів

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Спосіб підстановки у визначених інтегралах

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \left| \begin{matrix} \varphi(t) = x; & \text{при } t = \beta & x = \varphi(\beta) = b \\ \varphi'(t)dt = dx; & \text{при } t = \alpha & x = \varphi(\alpha) = a \end{matrix} \right| = \int_a^b f(x)dx.$$

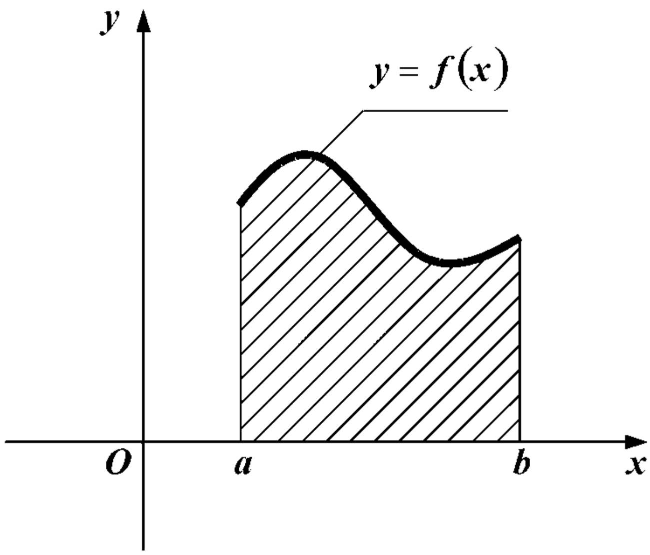
Спосіб інтегрування за частинами у визначених інтегралах

$$\int_a^b udv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

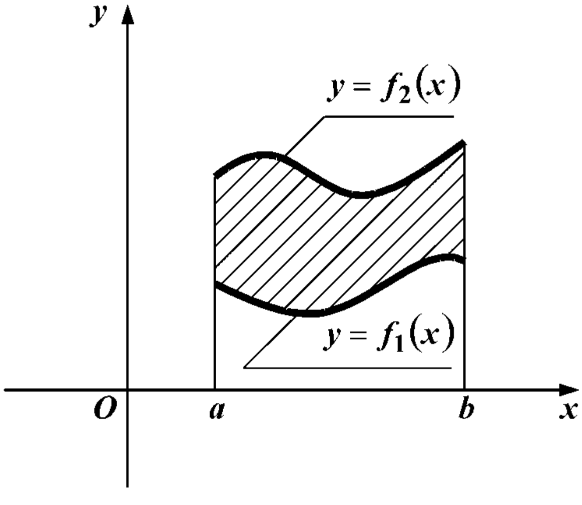
Обчислення площі плоскої фігури.

а) криволінійна трапеція:

$$S = \int_a^b f(x)dx; \quad f(x) > 0,$$

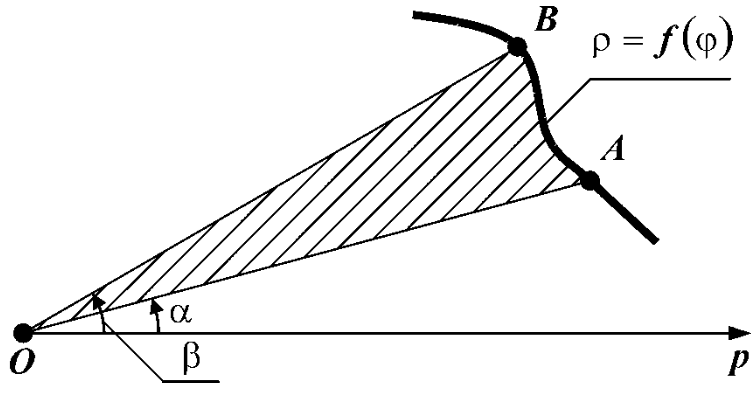


$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx; \quad f_2(x) > f_1$$



б) криволінійний сектор:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha} \rho^2(\varphi)d\varphi,$$



Невласні інтеграли з нескінченними границями.

а) невласні інтеграли з нескінченними границями

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} xdx + \int_{c}^{\infty} f(x),$ де c–довільне значення, $f(x)$ – всюди неперервна функція.

Якщо границя такого інтегралу є кінцевою, то такий інтеграл називається збіжним; у разі, коли інтеграл прямує до ∞, його називають розбіжним.

б) невласні інтеграли від розривних функцій

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx,$$

де $x = c$ – точка розриву функції, де

$$\int_{a}^{c} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

.

Диференцальним рівнянням (надалі, Д.Р.) називається рівняння, що містить похідні або диференціали невідомої функції. Найбільший порядок похідних називається *порядком* диференціального рівняння.

Д.Р. вигляду $N_1(y)M_1(x)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$ називаються *Д.Р. з відокремленими змінними.*

Д.Р. називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді: $y' = f(\frac{y}{x})$.

Воно за допомогою заміни змінної $y/x = u \Rightarrow y = ux$ зводиться до Д.Р. з відокремлюваними змінними.

Д.Р. виду $y'+P(x)y=Q(x)$ називається *лінійним* Д.Р. Його розв'язок розшукується у вигляді $y = uv$.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші (знайти загальний розв'язок диференційного рівняння і частинний розв'язок при заданих початкових умовах):

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad y(1) = 2.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у диференціалах:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Дане рівняння є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними (тобто може бути зведене до вигляду, коли з одного боку знака рівності присутня тільки залежна змінна y, а з іншого – тільки незалежна змінна x, таку рівність можна про інтегрувати і отримати загальний інтеграл рівняння).

Виконаємо відокремлення змінних, для чого домножимо рівняння на dx/y, в результаті отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо отримане рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x},$$

і отримаємо

$$\ln|y| = -\ln|x| + C .$$

Це – загальний інтеграл рівняння у неявному вигляді. Звідси:

$$y = \frac{C}{x}.$$

Частинний розв’язок знаходимо за допомогою початкової умови , підставляючи її о загального розв’язку:

$$y(1) = \frac{C}{1} = 2 ;\ C=2.$$

Тоді частинним розв’язком диференційного рівняння є

$$y = \frac{2}{x}.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв’язок диференційного рівняння при заданих початкових умовах

$$xy' - y = x^3, \quad y(1) = 5/2 .$$

Розв’язання. Дане рівняння є лінійним диференційним рівнянням першого порядку.

$$y = u \cdot v ; \qquad y' = u' \cdot v + u \cdot v' ;$$

$$x(u' \cdot v + u \cdot v') - uv = x^3,$$

$$x \cdot u' \cdot v + u(x \cdot v' - v) = x^3 .$$

Накладемо на функцію v умову, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$x \cdot v' - v = 0,$$

і знайдемо функцію v з отриманого диференційного рівняння.

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \qquad \ln|v| = \ln|x|, \qquad v = x.$$

Тепер функцію u знаходимо з рівняння

$$x^2 \cdot u' = x^3,$$

що утворюється в результаті підстановки $v = x$ до початкового рівняння:

$$du = x \cdot dx,$$

$$u = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Оскільки $y = uv$, то загальним розв'язком рівняння є

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) \cdot x = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

Константу інтегрування C знаходимо з початкової умови:

$$\frac{5}{2} = \frac{1^3}{2} + C \cdot 1.$$

Отже, $$y = \frac{x^3}{2} + 2x.$$

Приклад 3. Розв'яжіть задачу: знайти криву, яка проходить через точку ***M(0;1),*** якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої k дорівнює $2xy$.

<u>Розв'язання</u>.

Як відомо, $y' = k$. Тому потрібно розв'язати задачу Коші:

$y' = 2xy$, $y(0) = 1$.

$\frac{dy}{y} = 2xdx$, $\ln y = x^2 + C.$ $y(0) = 1 \Rightarrow C = 0$.

Отже, шукана крива $y = e^{x^2}$.

Рівняння вигляду $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ називаються *лінійними однорідними Д.Р.* Його загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де $y_{1,2}$ − лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння. Розшукуємо їх у вигляді $y = e^{kx}$, де k - корені характеристичного рівняння $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.

Розв'язок:

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

а) ***D>0***

$\bar{y} = C_1 e^{k_1 X} + C_2 e^{k_2 X}$;

б) ***D=0***, $k_{1,2} =$ ***= –b/2***

$\bar{y} = e^{kx}(C_1 + C_2 X)$;

в) ***D<0***, $k_{1,2}$ – комплексні числа. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Рівняння вигляду $y'' + py' + qy = f(x)$ називається *лінійним неоднорідним* ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Для того, щоб знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР, необхідно скористатися таким твердженням: загальний розв'язок такого ДР дорівнює сумі розв'язку відповідного однорідного ДР та якого-небудь частинного розв'язку неоднорідного ДР: $y = \overline{y} + y^*$, де $\overline{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного ДР, y^* – частинний розв'язок неоднорідного ДР. Правила побудови y^* наведені у таблиці 1.

<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th colspan="2">$y^* \qquad (\lambda = \alpha + i\beta)$</th></tr>
<tr><td>степенева частина відсутня</td><td>A</td><td rowspan="7">• x при $\lambda = k_1 \neq k_2$
або $\lambda = k_2 \neq k_1$

• x^2 при $\lambda = k_1 = k_2$</td></tr>
<tr><td>x^1</td><td>$Ax + B$</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + N$</td></tr>
<tr><td>$e^{\alpha x}$</td><td>$e^{\alpha x}$</td></tr>
<tr><td>показникова функція відсутня ($\alpha = 0$)</td><td>показникова функція відсутня</td></tr>
<tr><td>лише $\sin \beta x$
лише $\cos \beta x$
і $\sin \beta x$, і $\cos \beta x$</td><td>і $\sin \beta x$, і $\cos \beta x$</td></tr>
<tr><td>тригонометричні функції відсутні ($\beta = 0$)</td><td>тригонометричні функції відсутні</td></tr>
</table>

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним однорідним ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Дискримінант $D = 16 - 16 = 0$. Отже, рівняння має один дійсний корінь $k = 2$ подвійної кратності. Тому загальний розв'язок ДР має вигляд

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Для знаходження частинного розв'язку скористаємося початковими умовами. Для цього знайдемо y':

$$y' = 2c_1 e^{2x} + c_2\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right).$$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 + C_2 0 = C_1$. Отже, $C_1 = 1.$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = 2c_1 + c_2(1 + 0).$$

Отже, $C_2 = -2$. Остаточно отримаємо

$$y = e^{2x} - 2xe^{2x}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - y = 2e^{x}.$$

<u>*Розв'язання.*</u> $y = \overline{y} + y^{*}$. Відповідне лінійне однорідне $y'' - y = 0$, характеристичне рівняння $k^{2} - 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm 1$. Тоді загальний розв'язок лінійного однорідного ДР буде $\overline{y} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$.

$f(x) = 2e^{x}$, $\lambda = 1 + i \cdot 0 = 1; \quad \lambda = k_1 \neq k_2$. Так як $k = 1$ – корінь кратності 1, то $\quad y^{*} = Axe^{x}, \quad (\alpha = k_1)$,

$$y^{*'} = Ae^{x} + Axe^{x}, \qquad y^{*''} = 2Ae^{x} + Axe^{x}.$$

$2Ae^{x} + Axe^{x} - Axe^{x} = 2e^{x}$. Звідси $A = 1$.

Тоді $\quad y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + xe^{x}$ – загальний розв'язок шуканого рівняння.

Приклад 3. Вказати вигляд (без обчислень коефіцієнтів)частинний розв'язок ЛНДР $\quad y'' + y' - 2y = e^{x}(\cos x - \sin x)$. .

<u>*Розв'язання.*</u> $y = \overline{y} + y^{*}$. $\; y'' + y' - 2y = 0$, $k^{2} + k - 2 = 0$, $k_1 = 1,\; k_2 = -2$, $\lambda = 1 + i \cdot 1 \neq k_{1,2} \Rightarrow y^{*} = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$.

ЧИСЛОВІ РЯДИ

Нехай $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots$ – нескінченна послідовність чисел. Вираз $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *числовим рядом*.

Ряд називається *збіжним,* якщо послідовність його часткових сум $\{S_n\}$, де $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, має кінцеву границю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S називається *сумою ряду.*

Ознаки збіжності додатних числових рядів

Необхідна умова збіжності

Якщо ряд збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто $\quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Ознака збіжності Даламбера

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то
при $l<1$ ряд збігається,
при $l>1$ ряд розбігається,
при $l=1$ ознака відповіді не дає.

Гранична ознака порівняння

Нехай є два ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Якщо $\lim\limits_{n=1} \dfrac{u_n}{v_n} = k$, де $k \neq 0$, $k \neq \infty$, то ці два ряди або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Такі ряди називають еквівалентними та позначають це так:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Знакопочережні ряди

Числовий ряд називається *знакопочережним*, якщо його члени, що стоять поруч, мають різні знаки.

Такі ряди мають вигляд:

$$-a + a_2 - a_3 + a_4 - ... + (-1)^n a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \qquad (1)$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \qquad (2)$$

де $a_n -$ абсолютна величина члена ряду.

Ознака Лейбніца

Якщо в закопочережному ряді (2) члени такі, що

1) $a_1 > a_2 > a_3 > ...$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд збігається, а його сума за абсолютним значенням не перевершує перший член ряду.

Знакопочережний ряд називається *умовно збіжним,* якщо він збігається, а ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбігається.

Знакопочережний ряд називається *абсолютно збіжним,* якщо збігається ряд з абсолютних величин його членів.

Елементи комбінаторики. Початки теорії ймовірностей.

Перестановками із *n елементів* називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення. Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою: $\boldsymbol{P_n = n!}$

Розміщенням із *n елементів по m*
($0 \le m \le n$) називаються такі впорядковані множини, кожна із яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом: $\boldsymbol{A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}}$.

*Комбінаціями (сполученнями)*з n елементів по m
($0 \le m \le n$) називаються такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом: $\boldsymbol{C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}}$.

Випробування — реальний або мислений експеримент (виконуваний за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

Подія — результат випробування. Якщо в результаті випробування деяка подія неодмінно відбудеться, то вона називається *достовірною.* Подія, яка в даному випробуванні не може відбутись, називається *неможливою.* Якщо в результаті випробування деяка подія може відбутись, а може не відбутись, то вона називається *випадковою*. Випадкові події позначаються літерами *A, B, C, D*, …

Класичною ймовірністю випадкової події A називається відношення кількості елементарних подій *m*, які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості *n* рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω:

$$\boldsymbol{P(A) = m / n}.$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2

Тема: Визначений та невласний інтеграли. Диференціальні рівняння. Числові ряди. Теорія ймовірностей.

Завдання до контрольної роботи № 2

1. Завдання. Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_1^9 \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x^3}dx$;
2. $\int\limits_{1/2}^{32} \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$;
3. $\int\limits_0^{15} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[4]{x+1}}$;
4. $\int\limits_0^{63} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$;
5. $\int\limits_1^{e2} x\ln x dx$;
6. $\int\limits_0^1 x\, arctgx\, dx$;
7. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}}$;
8. $\int\limits_0^{63} \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$;
9. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}dx$;
10. $\int\limits_0^{\sqrt{8}} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$.

2. Завдання. Обчислити площі областей, обмежених заданими лініями:

1. $y=-3x,\ \ y=0,\ \ x=2;$
2. $y=-x^3,\ \ y=0,\ \ x=-1,\ \ x=1;$
3. $y=2x,\ \ y=0,\ \ x=-3;$
4. $y=2\cos x,\ \ y=0,\ \ x=-\pi/2,\ \ x=\pi/2$
5. $y=(x+1)^2,\ \ y=4-x;$
6. $y=-x^2-2x+8,\ \ y=x^2+2x+2;$
7. $y=-x^2+3,\ \ y=0,\ \ x=1{,}5;$
8. $y=-x^2+10x-16,\ \ y=x+2;$
9. $y=x^3,\ \ y=0,\ \ x=-2,\ \ x=2;$
10. $y=2-x^2,\ \ y=x.$

3. Завдання. Обчислити невласні інтеграли, або довести їх розбіжність:

1. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$;
2. $\int\limits_9^\infty \frac{1}{4-x^2}dx$;
3. $\int\limits_0^1 \frac{3x^2\,dx}{x^3-1}$;
4. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{4+x^2}$;
5. $\int\limits_0^\infty x\,e^{x^2}dx$;
6. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln x}$;
7. $\int\limits_0^\infty 2^{-x}dx$;
8. $\int\limits_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^2}}$;
9. $\int\limits_0^\infty \frac{arctgx}{x^2+1}dx$;
10. $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$.

4. Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)\,!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3+1}{n^3+n}$;
2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{4n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{\sqrt{n}}$;
3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)\,!}{5+n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{2n+1}\right)^n$;
4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-7}{n^4+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$;
5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{(n+3)(n^2+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2n+1}$;
6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+7}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\,!}{4^n}$;
7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n-1)\,!}$;
8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\,!}{6^n}$;

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2+6n+7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n)!}$;

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^3+5}$.

5. Завдання. З'ясувати чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним, або розбіжним.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\,!}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{3n+1}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+5}1$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot(2n+1)\,!}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 6^n}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-6}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{5^n}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3n-4}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{3n+1}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{4n+1}}$.

6. Завдання. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

1. а) $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy+ydx=0$; б) $xy'-3y=x^4e^X$;
2. а) $y'=y^2-7$; б) $y'\cos x+y\sin x=1$;
3. а) $y'+x^2y=x^2$; б) $xy'+2y=\frac{1}{x}$;
4. а) $\left(\cos^2 x\right)y'=2y^3$; б) $2xydx+\left(y^2-3x^2\right)dy=0$;
5. а) $y'x=(1+x)\sqrt{y}$; б) $xy'=y+xe^{y/x}$;
6. а) $2xydx+\left(1-3x^2\right)dy=0$; б) $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$;
7. а) $\left(x^2y^2\right)y'=2yx$; б) $y'+\frac{y}{x}=\frac{e^{-2x}}{x}$;
8. а) $y'=\sqrt{x}\sin^2 y$; б) $xy'-y=x2^{-\frac{y}{x}}$;

9. а) $y' - y\cos x = -\cos x$; б) $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$;

10. а) $y'\cos x = (y+1)\sin x$; б) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{3x^2+1}{x}$.

7. Завдання. Розв'яжіть задачу: знайти криву, що проходить через точку ***M(a;в),*** якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює k, **коли** $k = f(x;y)$.

1. $M(0;1)$, $k = -2y$;
2. $M(1;1)$, $k = -2\, y/x$;
3. $M(\pi/2;1)$, $k = yctg\, x$;
4. $M(0;1)$, $k = -ytg\, x$;
5. $M(0;9)$, $k = -2x$;
6. $M(0;1)$, $k = -2xy$;
7. $M(1;1)$, $k = y/(3x)$;
8. $M(0;1)$, $k = 2xy$;
9. $M(2;1)$, $k = -\, y/x$;
10. $M(0;1)$, $k = -\, y$.

8. Завдання. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку:

1. $3y'' + 7y' - 10y = 0,\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2;$
2. $3y'' - 27y = 0,\ y(0) = 1;\ y'(1) = 2;$
3. $4y'' + 64y = 0,\ y(0) = 1;\ y'(\pi/2) = 2;$
4. $y'' + 8y' + 16y = 0,\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2;$
5. $y'' + y' = 0,\ y(0) = 1;\ y'(1) = 1;$
6. $5y'' - 3y' - 2y = 0,\ y(0) = 1;\ y'(0) = 3;$
7. $y'' - y' = 0,\ y(0) = 1;\ y'(0) = 1;$
8. $6y'' - 216y = 0,\ y(0) = 1;\ y'(1) = 0;$
9. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 1;\ y'(0) = 1;$
10. $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 1;\ y'(\pi/4) = 2$.

9. Завдання. Розв'яжіть лінійне неоднорідне рівняння зі спеціальною правою частиною:

1. $3y'' + 7y' - 10y = x + 1;$
2. $3y'' - 27y = e^{2x};$
3. $4y'' + 64y = 2x;$
4. $y'' + 8y' + 16y = e^{x};$
5. $y'' + y' = \sin 2x;$
6. $5y'' - 3y' - 2y = e^{x};$
7. $y'' - y' = x + 1;$
8. $6y'' - 216y = x^{2};$
9. $y'' - 4y' + 4y = x - 1;$
10. $y'' + 4y = \cos 3x;.$

10. Завдання. Розв'яжіть задачу:

1. Студент знає 20 питань з 25 питань програми. Екзаменатор задає йому три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає всі три питання.

2. Серед 100 електроламп 5 зіпсованих. Яка ймовірність того, що взяті навмання 3 лампи будуть справними?

3. Правління підприємства складається з дев`яти осіб. Скільки можна скласти варіантів обрання з їх числа трьох керівників: президента, директора та комерційного директора.

4. У малому підприємстві працюють чотири жінки та п`ять чоловіків. Випадковим способом дві особи запізнились. Знайти ймовірність того, що одна з цих осіб жінка, а друга - чоловік.

5. До профкому обрано семеро осіб, з яких потрібно обрати голову профкому та його заступника. Скількома способами це можливо зробити.

6. Студент забув останні три цифри потрібного телефону, але він пам`ятає, що всі три цифри є різні, тому вибирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані цифри вірні.

7. В урні п`ятнадцять червоних, дев`ять синіх та шість зелених куль однакового розміру. Навмання беруть шість куль. Яка ймовірність того, що будуть взяті одна зелена, дві сині та три червоні кулі.

8. Із колоди карт (32 карти) навмання взято одну. Яка ймовірність того, що це дама, якщо відомо, що взято карту червоної масті?

9. В урні 10 білих, 15 чорних, 20 блакитних та 25 червоних куль однакового розміру. Навмання взято одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде біла або чорна.

10. У ящику перебувають 15 м'ячів, з яких 9 нових. Для тренування спортсмен навмання бере три м'ячі. Яка ймовірність того, що вони всі нові?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Наука, 2000, ч. 1,2.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ, "А.С.К.", 2005. – 648 с.
5. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Физматгиз, 1978.
7. Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 1,2: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ, НМетАУ. – 2004.
8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. Приклади і задачі.– Київ: Видавничий центр "Академік", 2002.– 621 с.
9. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. – К.: Либідь, 1994.
10. Маркович Е.С. Курс вищої математики з елементами теорії ймовірностей і математичної статистики: Навч. посібник для вузів. - 2-е вид., перераб. і доп.: Вища. шк., 1972. – 480 с.
11. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1985, т. 1, 2.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Підручник в 2-х томах, т. І. – М.: Інтеграл – Прес, 2002. – 416 с.
14. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – Львів, 1999.
15. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: "Либідь", 2001 р.
16. Шипачьов В.С. Основи вищої математики. – М.: Вища школа, 1989.

ЗМІСТ