

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**



**О.П. МОРОЗЕНКО, Г.В. МАЛИШКО**

**КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ  
НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ  
ТА ІНЖЕНЕРНОЇ ГРАФІКИ**

**ЧАСТИНА 1**

**Дніпро НМетАУ 2017**

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**О.П. МОРОЗЕНКО, Г.В. МАЛИШКО**

**КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ  
НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ  
ТА ІНЖЕНЕРНОЇ ГРАФІКИ**

**ЧАСТИНА 1**

**Друкується за Планом видань навчальної та методичної літератури,  
затвердженим Вченою радою НМетАУ  
Протокол №1 від 27.01.2017**

**Дніпро НМетАУ 2017**

УДК 515(07)

Морозенко О.П., Малишко Г.В. Комп'ютерні методи нарисної геометрії та інженерної графіки. Частина 1: Конспект лекцій. – Дніпро: НМетАУ, 2017. – 50 с.

Викладено теоретичний матеріал основних розділів нарисної геометрії.

Розглянуті способи відображення просторових форм на площині, їх взаємне розташування, взаємозалежність геометричних образів, як елементів технічного виробу. Висвітлені методи проєкційного креслення, способи перетворення креслень.

Розглянуті сучасні програмні засоби виконання та редагування креслень, основні поняття і алгоритми комп'ютерної графіки.

Призначений для студентів спеціальності комп'ютерні науки та інформаційні технології (бакалаврський рівень). Може використовуватись для студентів усіх напрямів підготовки.

Іл. 50. Бібліогр.: 6 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальна за випуск О.П. Морозенко, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: Головний інженер ПАТ

«Агрегатний завод»

А.В. Яцуба

© Національна металургійна академія  
України, 2017

© Морозенко О.П., Малишко Г.В., 2017

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
МОДУЛЬ 1 ЕЛЕМЕНТИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.....	5
Тема 1 Проекції геометричних образів. Проекції точки, прямої, площини..	5
1.1 Основні завдання дисципліни «Комп'ютерні методи нарисної геометрії та інженерної графіки».....	5
1.2 Метод проєкцій. Способи проєкціювання.....	5
1.3 Метод Гаспара Монжа.....	7
1.4 Прямокутні проєкції точки, прямої, площини.....	8
1.5 Положення прямої та площини відносно площин проєкцій... ..	12
1.6 Сучасні програмні засоби виконання креслень.....	17
Тема 2 Взаємне положення геометричних образів. Взаємоналежність геометричних образів. Особливі лінії площини.....	20
2.1 Взаємне положення прямих у просторі.....	20
2.2 Взаємоналежність геометричних образів.....	21
2.2.1 Точка і пряма.....	21
2.2.2 Точка і площина.....	22
2.2.3 Пряма і площина.....	22
2.2.4 Дві площини.....	25
2.3 Фронталі та горизонталі в площині.....	27
Тема 3 Поверхні. Переріз поверхонь проєкціуючою площиною.....	28
3.1 Поверхні. Способи утворення поверхонь.....	28
3.2 Належність точки і лінії поверхні.....	29
3.3 Перетин багатогранної поверхні площиною.....	30
3.4 Циліндричні перерізи.....	30
3.5 Конічні перерізи.....	31
3.6 Перетин сферичної поверхні площиною.....	32
Тема 4 Способи перетворення креслень. Натуральна величина похилого перерізу. Розгортки поверхонь.....	32
4.1 Сутність методів перетворення.....	32
4.2 Метод заміни площин проєкцій.....	33
4.3 Типові задачі методу заміни площин проєкцій.....	34
4.3.1 Перетворення прямої загального положення в пряму рівня.....	34
4.3.2 Перетворення прямої рівня в проєкціуючу.....	36
4.3.3 Перетворення площини загального положення в проєкціуючу.....	37
4.3.4 Перетворення проєкціуючої площини у площину рівня.....	38
4.4 Метод плоско-паралельного переміщення.....	38
4.5 Натуральна величина похилого перерізу.....	39
4.6 Розгортки поверхонь.....	43
Література.....	47

## ВСТУП

Візуалізація інформації про об'єкти, процеси та явища в різних сферах людських знань здійснюється засобами графічної мови.

Автори даного конспекту лекцій ставлять задачу надати допомогу студентам усіх форм навчання у вивченні дисципліни «Комп'ютерні методи нарисної геометрії та інженерної графіки».

В даному навчальному посібнику викладено теоретичний матеріал розділів дисципліни «Комп'ютерні методи нарисної геометрії та інженерної графіки», яка вивчає основні правила побудови зображень геометричних фігур, розвиває просторове уявлення для порозуміння форм і конструкцій зображених виробів.

Застосування сучасних інформаційних технологій проектування креслень відкриває принципово нові шляхи підготовки конструкторської документації та навчання графічної грамотності.

Дисципліна «Комп'ютерні методи нарисної геометрії та інженерної графіки» входить до циклу дисциплін професійної і практичної підготовки.

# МОДУЛЬ 1

## ЕЛЕМЕНТИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

### Тема 1 Проекції геометричних образів. Проекції точки, прямої, площини

#### 1.1 Основні завдання дисципліни «Комп'ютерні методи нарисної геометрії та інженерної графіки»

Дисципліна «Комп'ютерні методи нарисної геометрії та інженерної графіки» вивчає основні правила побудови зображень геометричних фігур, а розвиває просторове уявлення для розуміння за зображенням конструкції і принципу дії технічного виробу, відкриває нові шляхи підготовки конструкторської документації за допомогою сучасних інформаційних технологій проектування креслень.

Завдання дисципліни:

- навчити студентів геометричному моделюванню об'єктів в прямокутних проекціях та аксонометрії, що виконуються вручну, і за допомогою комп'ютерної техніки;
- надати студентам вмінь, знань та навичок, потрібних для рішення інженерних задач;
- ознайомити студентів з основними правилами оформлення технологічної і конструкторської документації згідно діючих стандартів;
- навчити студентів грамотно використовувати сучасні програмні засоби виконання та редагування креслень і підготовки конструкторсько-технологічної документації.

#### 1.2 Метод проекцій. Способи проєкціювання

Будь-яка множина точок як скінченна, так і нескінченна називається геометричною фігурою. В просторі геометричних фігур дуже багато, але основними є точки, прямі, площини і поверхні.

Для побудови зображень геометричних фігур на площині користуються методом проекцій. Слово «проекція» – латинське, від *proicere*, що в перекладі

означає «кинути наперед». Отже проекція – це зображення предмета, «відкинута» на площину за допомогою променів. Спроекціювати предмет – це означає зобразити його на площині.

Проекції поділяються на центральні і паралельні.

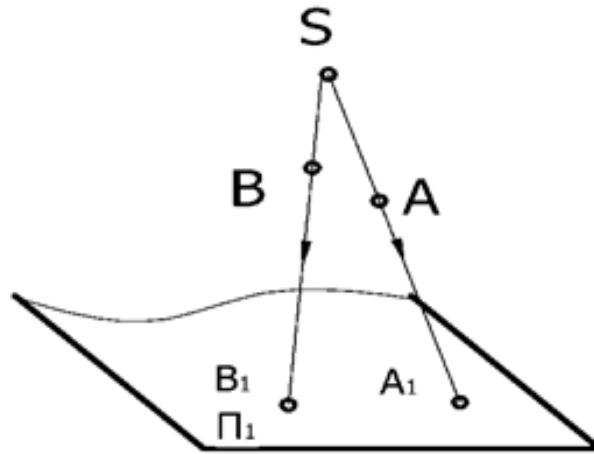


Рисунок 1.1 – Центральне проєкціювання

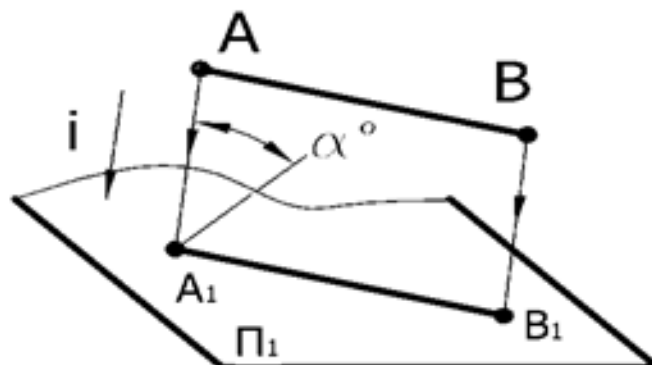


Рисунок 1.2 – Паралельне проєкціювання

- де  $S$  – центр проєкціювання;
- $A, B, \dots$  – точки в просторі;
- $A_1, B_1, \dots$  – проєкції точок;
- $\Pi_1$  – площина проєкцій;
- $AA_1, BB_1$  – проєкціуючі промені;
- $I$  – напрямок проєкціювання;
- $\alpha$  – кут нахилу променя до площини проєкцій.

На рис. 1.1 зображено центральне проєкціювання – проєкціювання з довільної точки простору (S). На рис. 1.2 показано як відбувається паралельне проєкціювання – якщо центр проєкціювання (S) віддалити у нескінченність, то проєкціуючі промені будуть паралельними.

Також проєкціювання може бути:

1) Косокутним  $\alpha \neq 90^\circ$  – проєкціуючі промені складають з площиною проєкцій гострі кути.

2) Прямокутним (ортогональним)  $\alpha = 90^\circ$  – проєкціуючі промені складають з площиною проєкцій прямі кути.

Паралельні і центральні проєкції мають такі властивості:

- проєкцією точки є точка на площині проєкцій;
- проєкцією прямої лінії є, як правило, також пряма (рис. 1.2);
- якщо пряма перпендикулярна площині проєкцій, то проєкцією прямої є точка;
- якщо пряма або геометрична фігура паралельні площині проєкцій, то вони проєкціуються на цю площину в натуральну величину;
- якщо точка поділяє відрізок прямої у заданому відношенні, то проєкції точки розділяють проєкції прямої у тому ж відношенні.

### 1.3 Метод Гаспара Монжа

Суть методу Г. Монжа полягає в тому, що, використовуючи паралельне ортогональне проєкціювання, будуються проєкції на дві, три або більш взаємно-перпендикулярних площин з наступним їхнім суміщенням в одну. При цьому предмет зображується з різних сторін (спереду, зверху, зліва, справа, ...).

Проєкції геометричних фігур будуються за допомогою:

- наочного зображення (косокутна фронтальна диметрія) (рис. 1.3); коефіцієнти спотворення за осями  $K_x = 1$ ,  $K_y = 0.5$ ,  $K_z = 1$ , коефіцієнт спотворення – це відношення аксонометричної проєкції відрізка координатної осі до довжини самого відрізка цієї осі в натурі;
- комплексного креслення (епюра) (рис. 1.4). Коефіцієнти спотворення за осями  $K_x = 1$ ,  $K_y = 1$ ,  $K_z = 1$ .



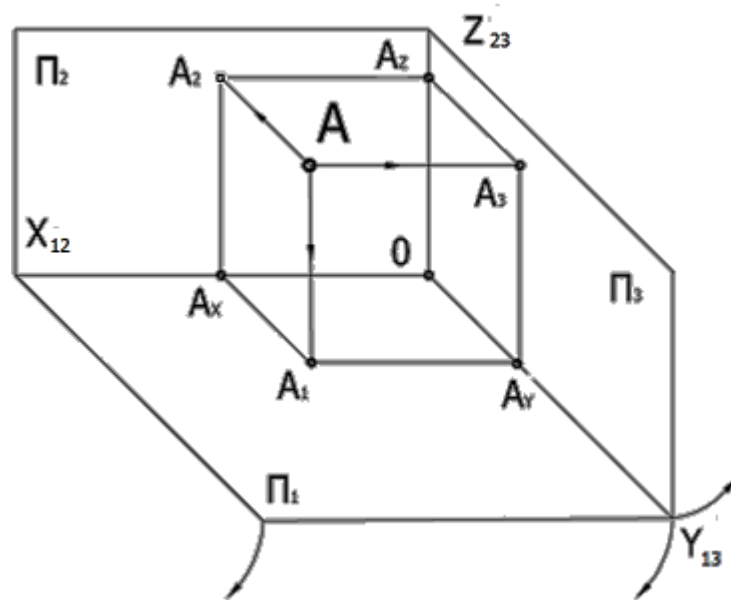


Рисунок 1.3 – Наочне зображення точки А

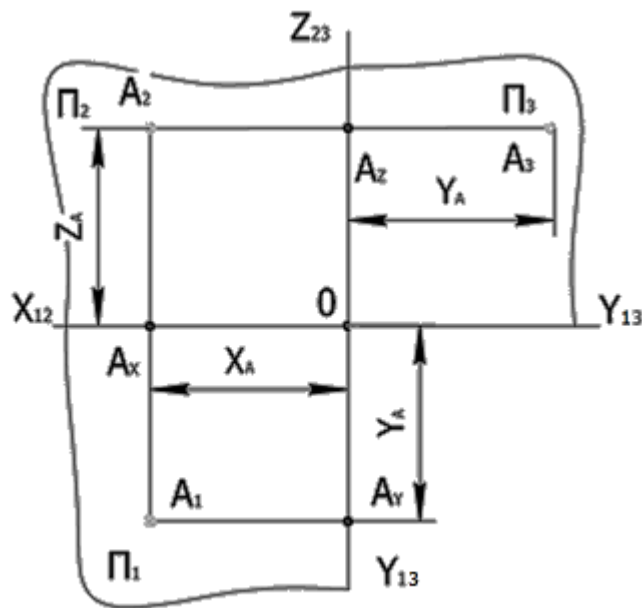


Рисунок 1.4 – Комплексне креслення точки А

#### 1.4 Прямокутні проєкції точки, прямої, площини

##### *Проекції точки*

Скористаємося трьома взаємно-перпендикулярними площинами, що утворюють прямий тригранний кут (рис.1.3). Тут  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  – площини проєкцій (горизонтальна, фронтальна та профільна); лінії  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$

взаємного перетину площин проєкцій – осі проєкцій, т.О – початок осей проєкцій.

Розмістимо в просторі тригранного кута точку А і побудуємо її проєкції на площинах  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ . Для цього з точки А проведемо проєкціюючі промені  $AA_1, AA_2, AA_3$  перпендикулярно площинам проєкцій до перетину з ними. Внаслідок дістанемо  $A_1, A_2, A_3$  – горизонтальну, фронтальну, профільну проєкції точки.

Горизонтальна проєкція точки  $A_1$  визначається координатами  $X_A$  та  $Y_A$ , фронтальна проєкція  $A_2$  – координатами  $X_A$  та  $Z_A$ , профільна  $A_3$  –  $Y_A$  та  $Z_A$ . При переході від наочного зображення до комплексного креслення площини проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$  потрібно сумістити з площиною  $\Pi_2$ . Для цього площину  $\Pi_1$  обернемо на  $90^\circ$  вниз навколо вісі  $X$  до суміщення з площиною  $\Pi_2$ , а площину  $\Pi_3$  на  $90^\circ$  вправо навколо вісі  $Z$  до суміщення з площиною  $\Pi_2$  (рис. 1.3). Після суміщення ламані лінії, що з'єднують дві проєкції точок ( $A_2A_1$  та  $A_2A_3$ ), перетворюються в прямі, які перпендикулярні до осей  $X_{12}, Z_{23}$ , їх називають лініями проєкційного зв'язку.

$A_2A_1 \perp OX_{12}$  – вертикальна лінія зв'язку;

$A_2A_3 \perp OZ_{23}$  – горизонтальна лінія зв'язку.

ПРИКЛАД: Побудувати проєкції т.  $A(50, 15, 25)$  за її координатами

Алгоритм:

$$OA_x = X_A = 50$$

$$A_2A_1 \cap X_{12} = A_x$$

$$A_2A_1 \perp X_{12}$$

$$A_xA_1 = Y_A = 15$$

$$A_xA_2 = Z_A = 25$$

$$A_2A_3 \cap Z_{23} = A_z$$

$$A_2A_3 \perp Z_{23}$$

$$A_zA_3 = Y_A$$

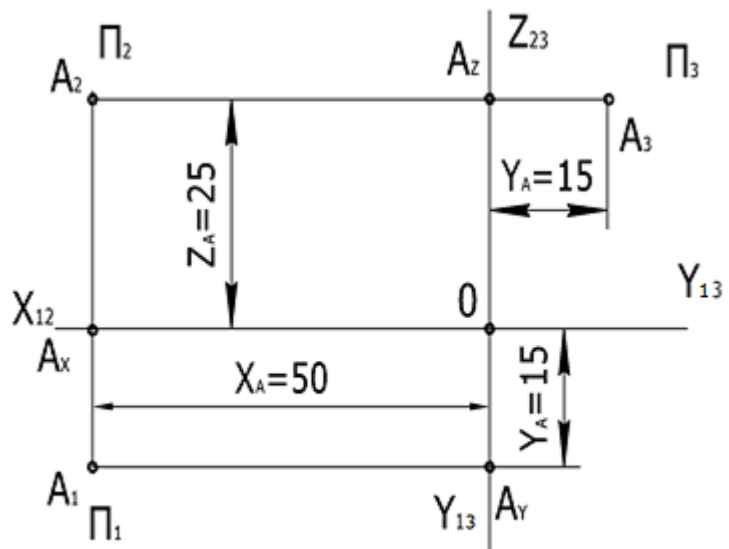


Рисунок 1.5 – Епюр точки А

### Проекції прямої

Дві точки повністю визначають положення прямої в просторі. Якщо провести через точки  $A$  і  $B$  (рис. 1.6) перпендикуляри до площини  $\Pi_1$ , на перетині цих перпендикулярів із площиною проєкцій знайдемо горизонтальні проєкції точок  $A_1$  і  $B_1$ . Відрізок  $A_1B_1$  – горизонтальна проєкція прямої  $AB$ . Відрізок  $A_2B_2$  – фронтальна проєкція прямої  $AB$ .

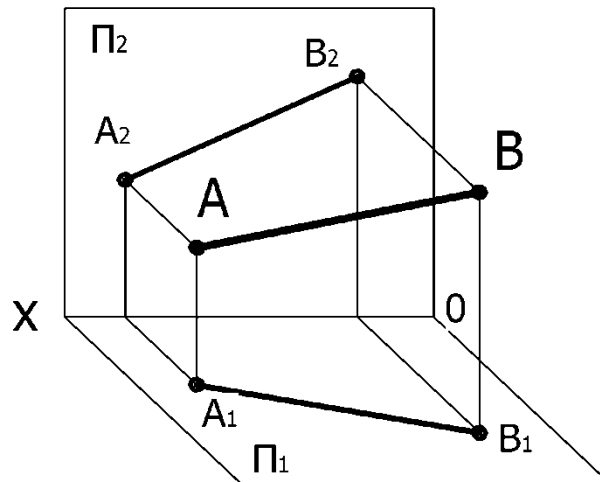


Рисунок 1.6 – Проекції прямої

### Проекції площини

Площина – найпростіша поверхня, з будь-яким напрямком якої суміщується пряма лінія. На кресленні площина може бути задана визначником, відсіком або обрисом.

Визначник – це сукупність мінімального числа ліній і точок, а також додаткових умов, за допомогою яких зображують площину.

Відсік – деяка частина площини, обмежена довільним контуром.

Обрис – контур видимої частини геометричної фігури.

На комплексному кресленні площина може бути задана:

- проєкціями трьох точок, що не лежать на одній прямій (рис. 1.7 а);
- проєкціями прямої і точки, яка не належить даній прямій (рис. 1.7 б);
- проєкціями прямих, що перетинаються або проєкціями двох паралельних прямих (рис. 1.7 в, г);
- проєкціями плоскої фігури (рис. 1.8);
- слідами площини (рис. 1.9).

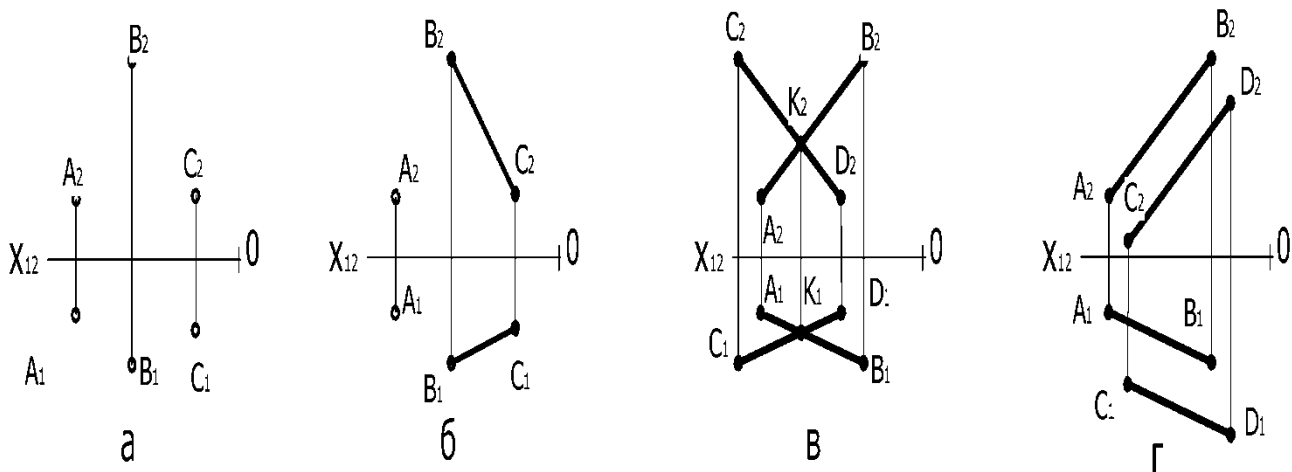


Рисунок 1.7 – Способи завдання площин

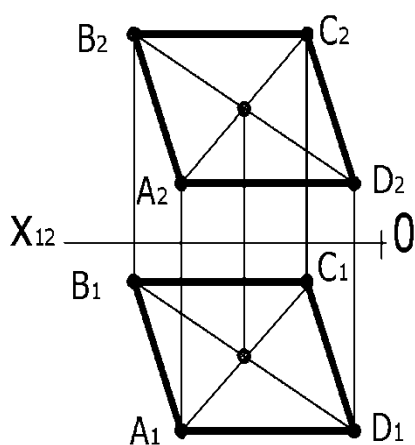


Рисунок 1.8 – Завдання площини плоскою фігурою

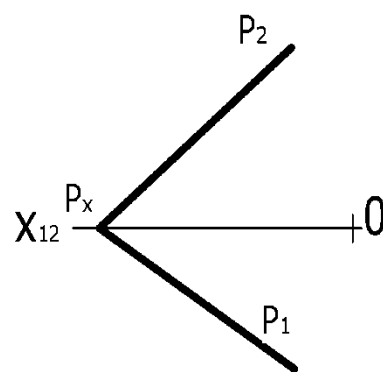


Рисунок 1.9 – Завдання площини слідами

Слідами площини називаються лінії перетину площини з площинами проєкцій (рис. 1.10).

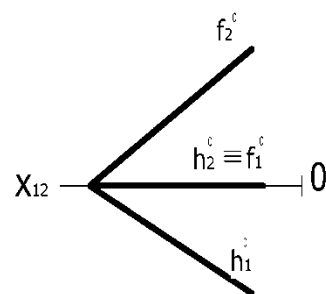
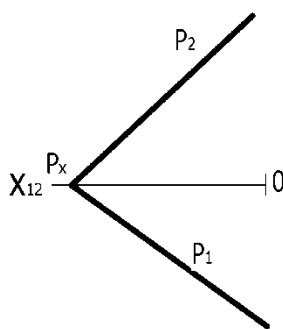
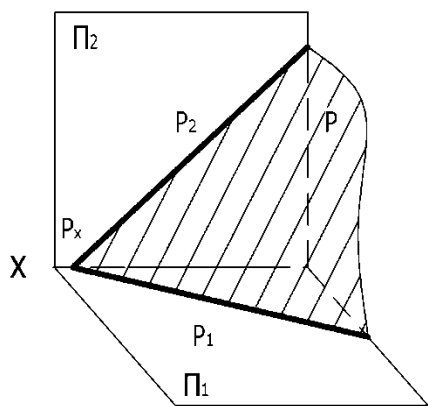


Рисунок 1.10 – Сліди площини

$P \cap \Pi_1 = P_1$  – горизонтальний слід;

$P \cap \Pi_2 = P_2$  – фронтальний слід;

$P_1 \cap P_2 = P_x$  – точка збігу слідів.

Горизонтальний слід  $P_1$  збігається із своєю горизонтальною проекцією, а фронтальна проекція горизонтального сліду – з віссю  $OX_{12}$ . Аналогічно, фронтальний слід  $P_2$  збігається зі своєю фронтальною проекцією, а його горизонтальна проекція – з віссю  $OX_{12}$ .

### 1.5 Положення прямої та площини відносно площин проекцій

Характерне розташування прямих і площин відносно площин проекцій – це їх класифікація. У просторі прямі та площини можуть займати загальне і окреме положення.

Залежно від положення прямої відносно площин проекцій прямі поділяються на:

**Прямі загального положення** – це прямі, які розташовані похило до всіх площин проекцій (рис. 1.6). Жодна з проекцій цієї прямої не може бути паралельною осям проекцій або перпендикулярною до них і не зображується на ешорі в натуральну величину.

Без додаткової побудови по кресленням цієї прямої не можна визначити кути нахилу прямої до площин проекцій.

**Прямі рівня** – прямі, паралельні одній з площин проекцій.

Пряма АВ (рис. 1.11 а), паралельна горизонтальній площині проекцій  $\Pi_1$ , називається горизонтальною прямою, або, скорочено, горизонталлю.

Пряма CD (рис. 1.11 б), паралельна фронтальній площині проекцій  $\Pi_2$ , називається фронтальною прямою, або, скорочено, фронталлю.

Пряма MN (рис.1.11 в), паралельна профільній площині проекцій  $\Pi_3$ , називається профільною прямою.

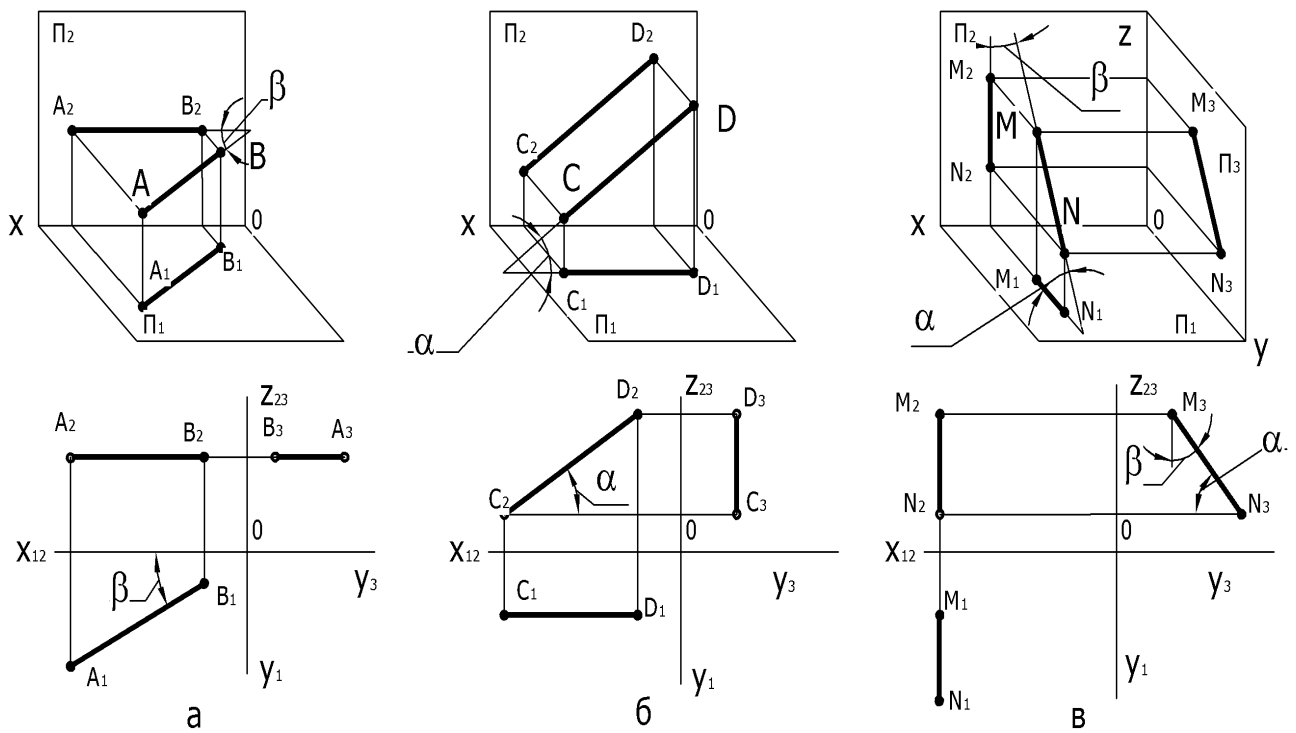


Рисунок 1.11 – Прямі рівня

### Властивості прямих рівня

$A_1B_1$  – горизонтальна проекція горизонталі (ГПГ)

$C_1D_1$  – горизонтальна проекція фронталі (ГПФ)  
ГПФ  $\parallel X_{12}$

$M_2N_2 \perp X_{12}$

$A_2B_2$  – фронтальна проекція горизонталі (ФПГ)  
ФПГ  $\parallel X_{12}$

$C_2D_2$  – фронтальна проекція фронталі (ФПФ)

$M_1N_1 \perp X_{12}$

$$A_1B_1 = |AB|$$

$$C_2D_2 = |CD|$$

$$M_3N_3 = |MN|$$

Кут нахилу АВ до  $\pi_2$  –  $\beta$

Кут нахилу АВ до  $\pi_1$  –  $\alpha$

Кут нахилу MN до  $\pi_3$  –  $\beta$

**Проекціюючі прямі** – це прямі, які перпендикулярні одній із площин проєкцій, тобто паралельні двом іншим площинам.

Пряма АВ (рис. 1.12 а), перпендикулярна до площини проєкцій  $\Pi_1$ , називається горизонтально-проекціюючою прямою.

Пряма CD (рис. 1.12 б), перпендикулярна до площини проєкцій  $\Pi_2$ , називається фронтально-проєкціуючою прямою.

Пряма MN (рис. 1.12 в), перпендикулярна до площини проєкцій  $\Pi_3$ , називається профільно-проєкціуючою прямою.

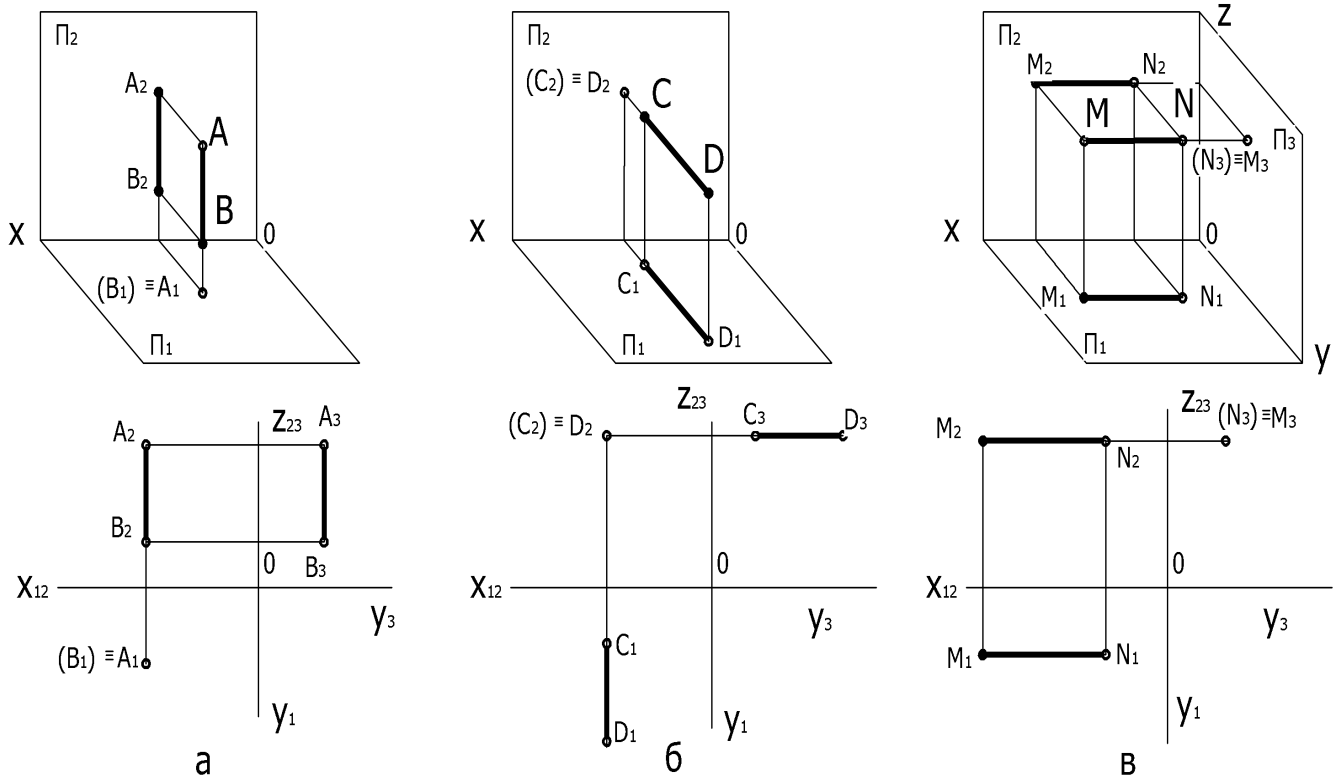


Рисунок 1. 12 – Проєкціуючі прямі

### Властивості проєкціуючих прямих

$$A_2B_2=A_3B_3 = |AB|$$

$$C_1D_1=C_3D_3= |CD|$$

$$M_2N_2=M_1N_1= |MN|$$

$$A_2B_2 \perp X_{12}$$

$$C_1D_1 \perp X_{12}$$

$$M_2N_2 \parallel X_{12};$$

$$M_1N_1 \parallel X_{12}$$

Якщо пряма лежить у площині проєкцій, то одна її проєкція (одноіменна) співпадає з самою прямою, а дві інші – з осями. Наприклад, пряма AB (рис. 1.13) лежить у площині  $\Pi_1$ . Таку пряму називають нульовою горизонталлю, бо висота її точок дорівнює нулю. CD (рис. 1.13) – нульова фронталь.

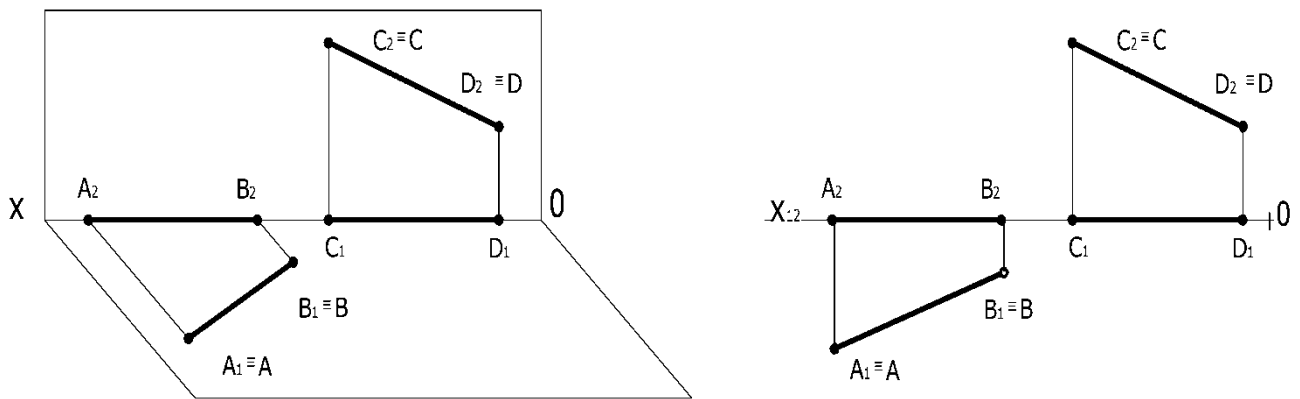


Рис. 1.13 – Нульові горизонталь і фронталь

Залежно від положення площини відносно площин проекцій площини поділяються на:

**Площини загального положення** – не паралельні і не перпендикулярні жодній площині проекцій (рис. 1.10).

**Проекціюючі площини** – площини, перпендикулярні до однієї площини проекцій (рис. 1.14, 1.15, 1.16);



Рисунок 1.14 – Горизонтально-проекціююча площина

Властивості *горизонтально-проекціюючої* площини  $P(\Delta ABC)$  (рис. 1.14):

$$P \perp \Pi_1;$$

$$P_2 \perp X_{12};$$

$\beta$  – кут нахилу площини  $P$  до  $\Pi_2$ .

Горизонтальні проекції точок, прямих, геометричних фігур, які належать горизонтально-проекціюючій площині, лежать на горизонтальному сліді цієї площини. Ця властивість називається збиральною ( $A_1B_1C_1 \subset P_1$ ).



Властивості фронтально-проекціуючої площини  $R(\Delta ABC)$  (рис. 1.15):

$R \perp \Pi_2$ ;

$R_1 \perp X_{12}$ ;

$\alpha$  – кут нахилу площини  $R$  до  $\Pi_1$ .

Фронтальний слід володіє збиральною властивістю ( $A_2B_2C_2 \subset R_2$ ).

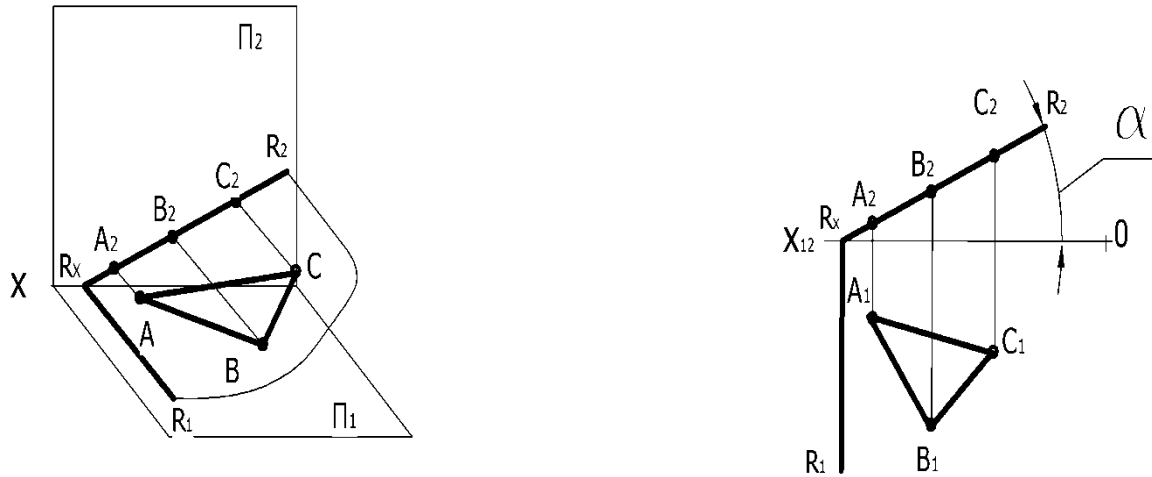


Рисунок 1.15 – Фронтально-проекціуюча площина

Властивості профільно-проекціуючої площини  $Q(\Delta ABC)$  (рис. 1.16):

$Q \perp \Pi_3$ ;

$Q_1, Q_2 \parallel X_{12}$ .

Профільний слід володіє збиральною властивістю ( $A_3B_3C_3 \subset Q_3$ ).

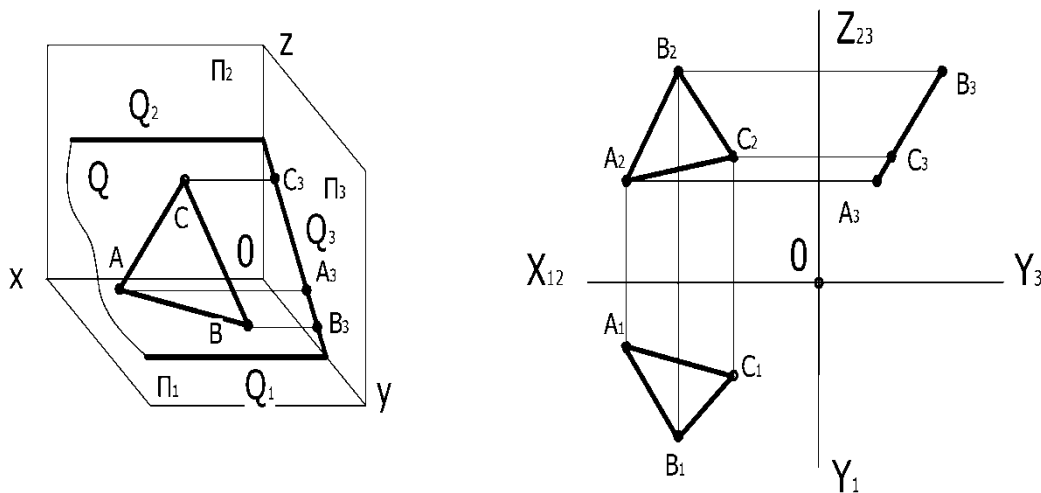


Рисунок 1.16 – Профільно-проекціуюча площина

**Площини рівня** – площини, які перпендикулярні до двох площин проекцій і, як наслідок, паралельні третій площині проекцій (рис. 1.17).

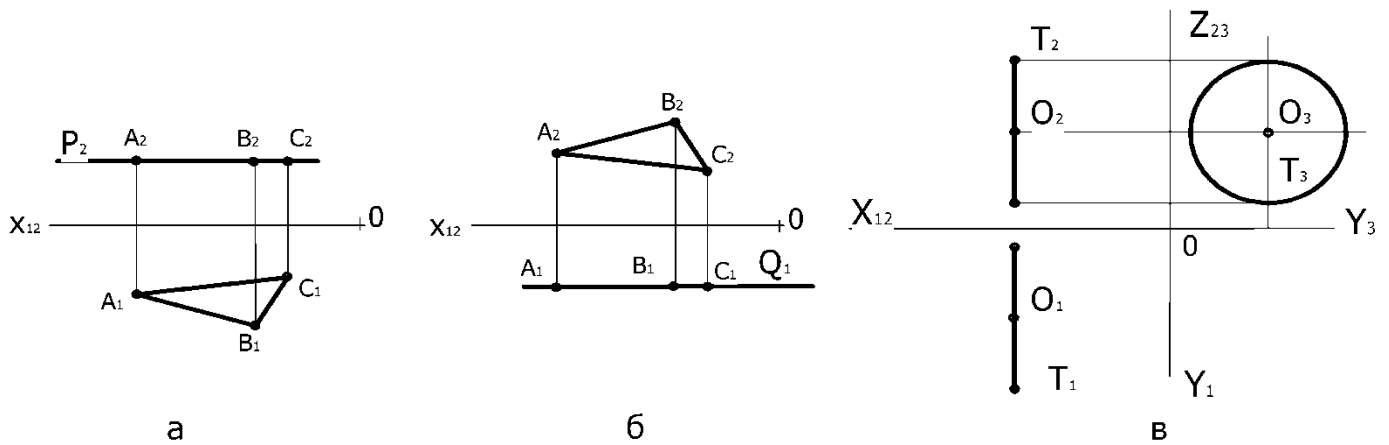


Рисунок 1.17 – Площини рівня

Властивості площин рівня:

$P(\Delta ABC) \parallel \Pi_1$  – горизонтальна площина (рис. 1.17 а):

$A_2B_2C_2 \subset P_2$ ;

$P_2 \parallel X_{12}$ ;

$\Delta A_1B_1C_1 = |\Delta ABC|$ .

$Q \parallel \Pi_2$  – фронтальна площина (рис. 1.17 б):

$A_1B_1C_1 \subset Q_1$ ;

$Q_1 \parallel X_{12}$ ;

$\Delta A_2B_2C_2 = |\Delta ABC|$ .

$T \parallel \Pi_3$  – профільна площина (рис. 1.17 в):

$T_1, T_2 \perp X_{12}$ .

Будь-яка фігура, що належить площині рівня, має дві проекції, що збігаються зі слідами площини (збиральна властивість).

## 1.6 Сучасні програмні засоби виконання креслень

Оскільки предметом нарисної геометрії є вивчення методів побудови різних просторових форм на площині, її можливості значно розширилися з розвитком обчислювальної техніки і систем програмування. Широке використання персональних комп'ютерів в інженерній практиці призвело до перевероту в області виконання креслень і народженню нової дисципліни – комп'ютерної графіки, яка займається створенням, зберіганням і обробкою різних зображень за допомогою електронно-обчислювальних пристроїв.

На цей час комп'ютерна графіка розділяється на дві сфери. Першу сферу можна умовно назвати комп'ютерним дизайном і версткою. Вона направлена на створення двовимірних і трьохвимірних анімаційних зображень, які використовуються в поліграфії, Web-дизайні, рекламі. Для цього використовуються відомі програми Corel Draw, Photoshop, Page Maker та інші.

Другу сферу складають системи автоматизованого проектування (САПР) або CAD-системи (англ. Computer-Aided Design – проектування за допомогою комп'ютера). Це програмні пакети, які призначені для створення креслень, трьохвимірних моделей, конструкторської, технологічної та інших видів документації.

Ці системи можна використовувати для створення схем, рисунків, креслень та в інших галузях інженерної освіти і творчості – при вивченні і дослідженні опору матеріалів, рішенні фундаментальних прикладних задач механіки, оптимізації технологічних процесів і багато іншого.

Дисципліна «Комп'ютерні методи нарисної геометрії та інженерної графіки» дозволяє розкрити основні поняття нарисної геометрії методами САПР. Засоби САПР використовуються для побудови зображень на площині різноманітних просторових форм, які вивчаються в курсі нарисної геометрії та розв'язання геометричних задач різної складності.

Всі графічні формати сучасних систем проектування можна розділити на дві категорії – растрові та векторні.

Елементами растрової графіки є невеликі точки, які називаються пікселями. В пам'ять комп'ютера вводять дані про колір і яскравість кожного пікселя.

Зображення растрової графіки зберігаються з фіксованим розрішенням, тому при збільшенні зображення з'являється «ступінчастість».

Принцип растрової графіки був винайдений за багато століть до появи комп'ютерів, наприклад, її можна виявити в мозаїчній кладці або у вишиванні «хрестиком».

Векторна графіка зберігається у вигляді команд, що описують розміри та форму кожного графічного об'єкта (лінії, кола, багатокутника і т. ін.), який є елементом зображення. Наприклад, параметрами, необхідними для повного опису кола, будуть:

- радіус або діаметр кола;

- координати центра кола;
- колір та товщина контура;
- колір заповнення.

Розрішення векторного зображення не фіксовано. Зображення можна збільшувати або зменшувати, не погіршуючи його якості, тому векторною графікою користуються в тому випадку, коли необхідно створити контурні зображення.

Растрова графіка потребує значно більше простору на носіях інформації, тому що для неї необхідна інформація про кожен піксель, який відображується на екрані. З іншої сторони, не кожен об'єкт може бути легко зображеним у векторному вигляді.

Перетворення растрового об'єкта у векторний називається трасуванням. Цей процес складний, виконується в спеціальних додатках і зазвичай не забезпечує високої якості рисунка.

Перетворення векторної графіки в растрову достатньо простий. Він називається растерізацією і легко виконується в будь-якому векторному редакторі за допомогою відповідної команди.

Зображення, які створюються САПР, мають, як правило, векторний формат.

Створення двовимірних креслень багато чим нагадує процес ручного креслення, коли замість олівця і лінійки конструктор використовує комп'ютерну мишу і клавіатуру.

Проте двовимірне проектування менш ефективне, ніж трьохвимірне моделювання. Широке використання трьохвимірного моделювання в інженерній практиці призвело до перевороту в області проектування.

Для отримання моделі необхідно створити двовимірне креслення, яке називається ескізом, а потім виконати формоутворюючу операцію, яка в більшості випадків являє собою слід руху ескізу у просторі.

В теперішній час на ринку САПР є велика кількість програмно-апаратних засобів автоматизації проектних, конструкторсько-технологічних і виробничих робіт. По рівню цін і можливостей всі САПР умовно поділяються на три категорії:

1) САПР нижчого рівня – це системи автоматизації на основі двовимірних креслень. До них належать AutoCAD LT, T-Flex, CAD2D, КОМПАС-Графік та інші.

2) САПР середнього рівня дозволяють будувати трьохвимірні параметричні моделі деталей і складальних одиниць. Представники: Autodesk Inventor, Autodesk Mechanical Desktop, Solid Works, КОМПАС та інші. Зараз системи середнього рівня дуже популярні, тому швидко розвиваються, наближаючись по своїм можливостям до САПР вищого рівня.

3) САПР вищого рівня закривають собою практично всі області проектування, від розробки виробів і оснащення до проведення інженерних розрахунків і виготовлення. Вони забезпечують повний цикл виготовлення виробів – від концептуальної ідеї до її реалізації; дозволяють створювати проектно-інформаційне середовище для одночасної роботи всіх учасників процесу. До САПР вищого рівня відносять системи Pro/Engineer та Unigraphics.

## **Тема 2. Взаємне положення геометричних образів.**

### **Взаємоналежність геометричних образів.**

#### **Особливі лінії площини.**

### 2.1 Взаємне положення прямих у просторі

Дві прямі в просторі одна відносно другої можуть бути паралельними, перетинатися і бути мимобіжними.

- Якщо прямі в просторі паралельні, то їх однойменні проекції на будь-яку площину також паралельні (рис. 1.18 а).
- Якщо прямі в просторі перетинаються, то на комплексному кресленні точки перетину однойменних проекцій розташовані на одній лінії проекційного зв'язку (рис. 1.18 б).
- Якщо дві прямі в просторі не паралельні між собою і не перетинаються, то такі прямі називаються мимобіжними. Точки перетину однойменних проекцій у мимобіжних прямих лежать на різних перпендикулярах до осі ОХ (рис.1.18 в). Точки, проекції яких співпадають на одній площині проекцій, називаються конкуруючими (рис. 1.18 в) – точка 1 і точка 2, точка 3 і точка 4.

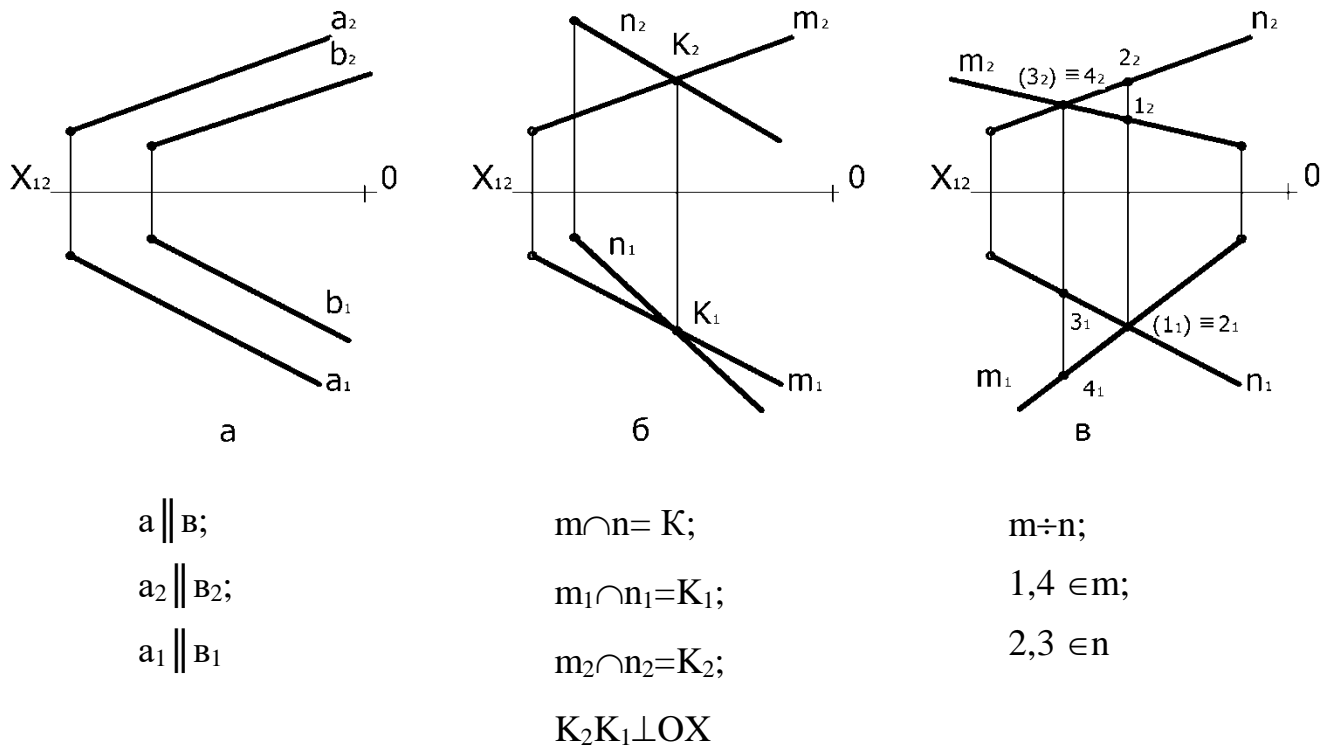


Рисунок 1.18 – Взаємне положення прямих у просторі

## 2.2 Взаємоналежність геометричних образів

### 2.2.1 Точка і пряма

Точка може належати прямій (рис. 1.19 точка А) або не належати їй (рис. 1.19 точка В). Точка належить прямій, якщо її проєкції належать відповідним проєкціям прямої і лежать на одній вертикальній лінії зв'язку.

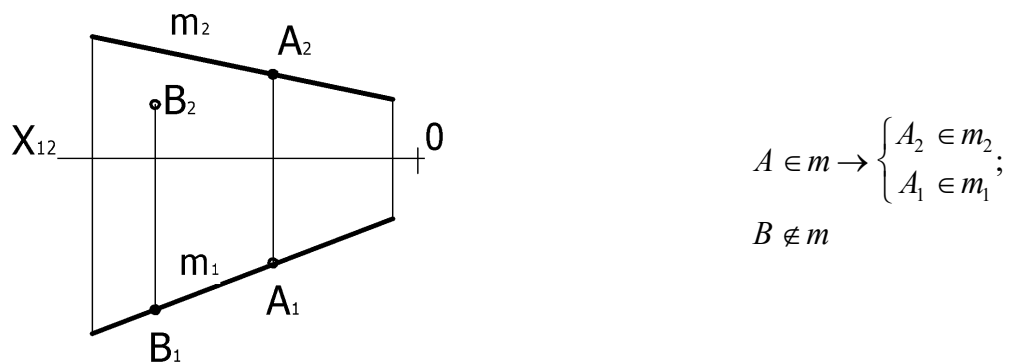


Рисунок 1.19 – Належність точки прямій

### 2.2.2 Точка і площина

Точка може належати площині (рис. 1.20 точка А) або не належати їй (рис. 1.20 точка В). Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій, яка належить даній площині.

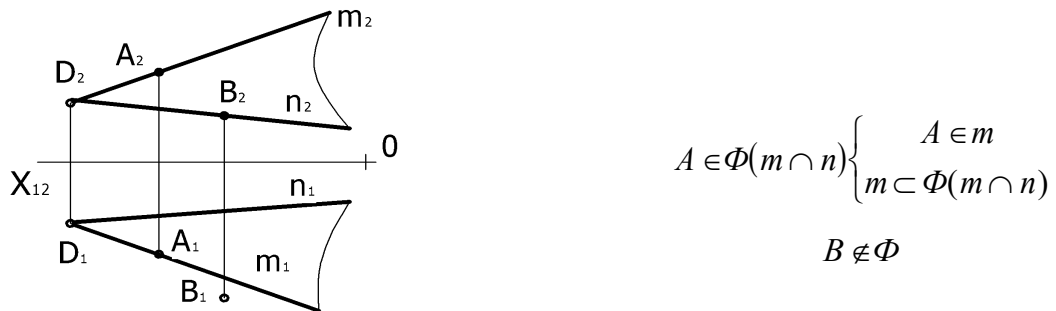


Рисунок 1.20 – Належність точки площині

### 2.2.3 Пряма і площина.

Пряма може:

- належати площині;
- бути паралельна площині;
- перетинати площину.

Пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, що належать цій площині (рис. 1.21 а, б).

Пряма належить площині, якщо вона проходить через точку, що лежить у площині і паралельна іншій прямій цієї площини (рис. 1.21 в).

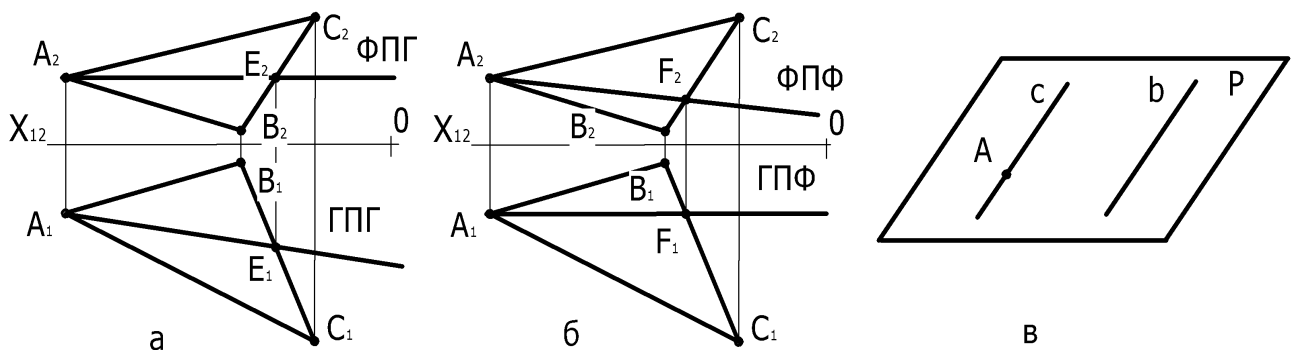


Рисунок 1.21 – Належність прямої площині

Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій, що лежить у цій площині (рис. 1.22).

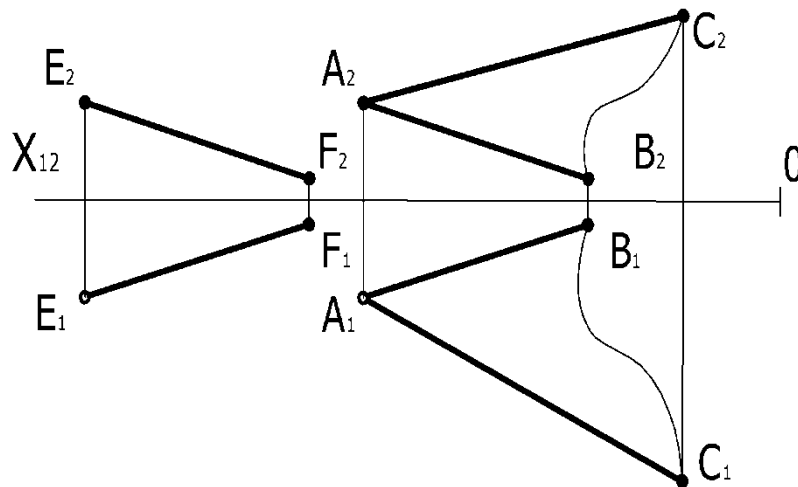


Рисунок 1.22 – Паралельність прямої і площини

При розв'язанні задачі на *перетин прямої з площиною* розглядають три випадки розміщення фігур:

1. Пряма і площина – обидві проєкціюючі відносно різних площин проєкцій (рис.1.23).

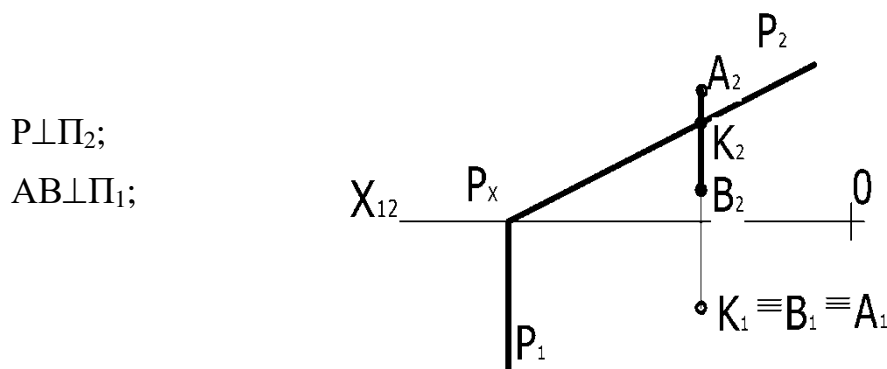


Рисунок 1.23 – Перетин проєкціюючих фігур

Точка перетину прямої з площиною визначається на підставі інцидентності (належності).



2. Одна з фігур, що перетинається, є проєкціуючою, а друга – загального положення (рис. 1.24).

$P \perp P_2$ ;

AB – загального положення;

$K_2$  - визначається на підставі інцидентності;

$K_1$  – за вертикальною відповідністю;

$K_1 \in A_1B_1$ .

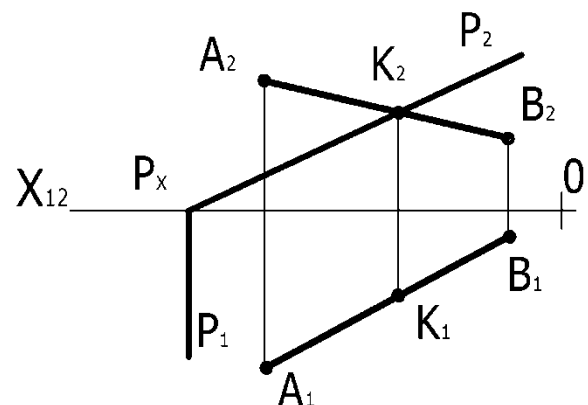


Рисунок 1.24 – Перетин проєкціуючої фігури з фігурою загального положення

3. Обидві фігури займають загальне положення (рис. 1.25).

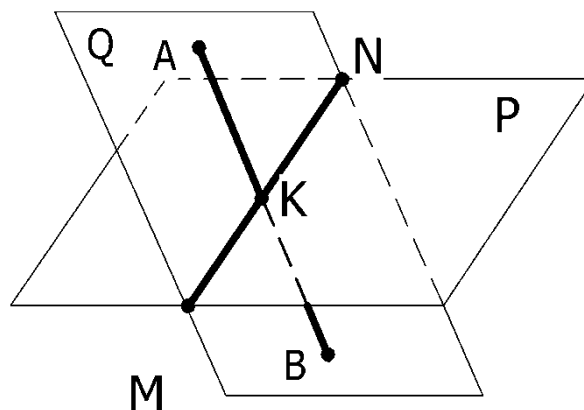


Рисунок 1.25 – Перетин фігур загального положення

Для побудови точки перетину:

- Пряму поміщують у допоміжну площину (Q).
- Знаходять лінію перетину заданої площини з допоміжною.
- Визначають точку перетину двох прямих (заданої та лінії перетину):
  - а)  $AB \subset Q$ ; б)  $MN = P \cap Q$ ; в)  $K = MN \cap AB$ .

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна двом прямим, які перетинаються в цій площині (рис. 1.26).

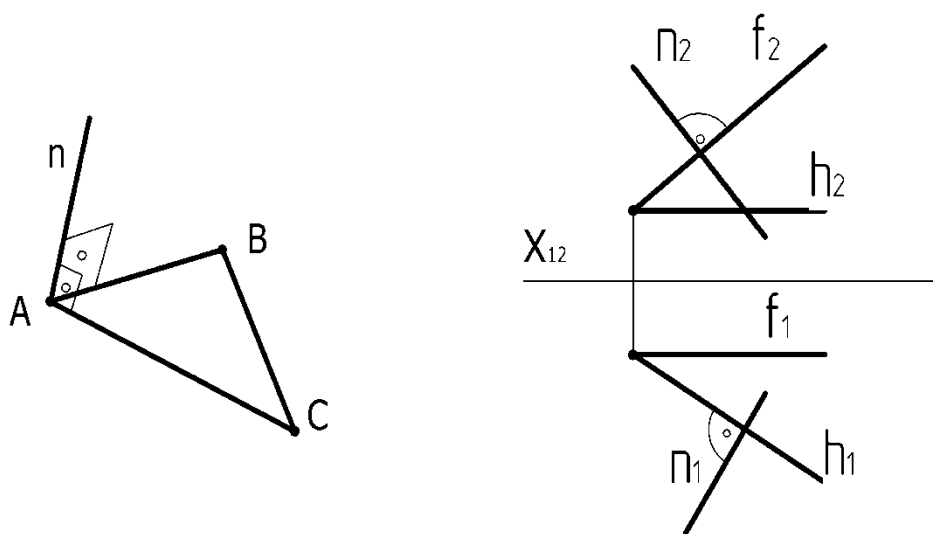


Рисунок 1.26 – Перпендикулярність прямої і площини

### 2.2.4 Дві площини

Дві площини в просторі одна відносно другої можуть бути паралельними або перетинатися.

Площини паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні двом прямим, що перетинаються іншої площини (рис. 1.27).

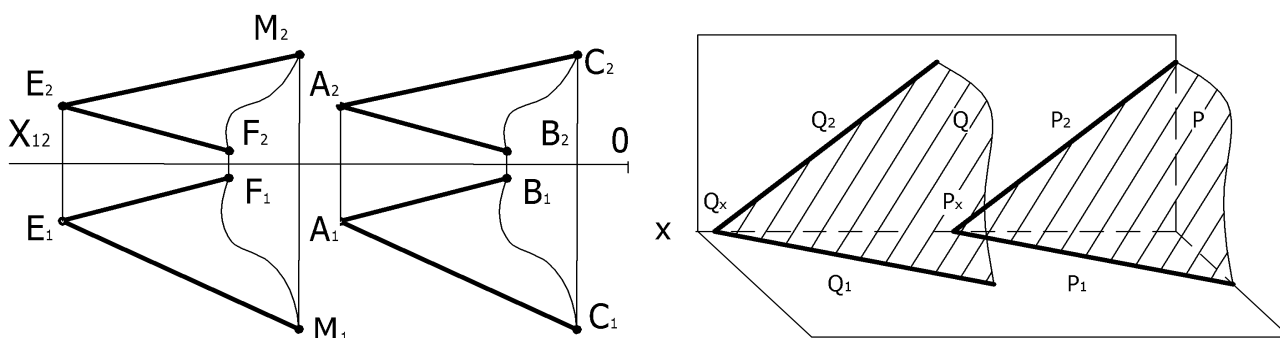


Рисунок 1.27 – Паралельність площин

Дві площини перетинаються, якщо лінія перетину площин визначається двома точками, які одночасно належать заданим площинам.

Тут можливі три випадки:

1) площини є проєкціюючими відносно однієї й тієї ж самої площини проєкцій;

2) одна з площин – проєкціююча або рівня, а друга – загального положення;

3) обидві площини є площинами загального положення.

У першому та другому випадках лінія перетину вже є на одній із проєкцій і за нею знаходять другу проєкцію лінії (рис. 1.28 а, б).

$\Delta ABC \cap (Q \perp \Pi_1) = DE$ ;  $Q_1$  – збиральна властивість  $D_1E_1 \subset Q_1$  (рис. 1.28 а)

$\Delta ABC \cap (\Phi \parallel \Pi_1) = MN$ ;  $M_2N_2 \subset \Phi_2$  – збиральна властивість (рис. 1.28 б)

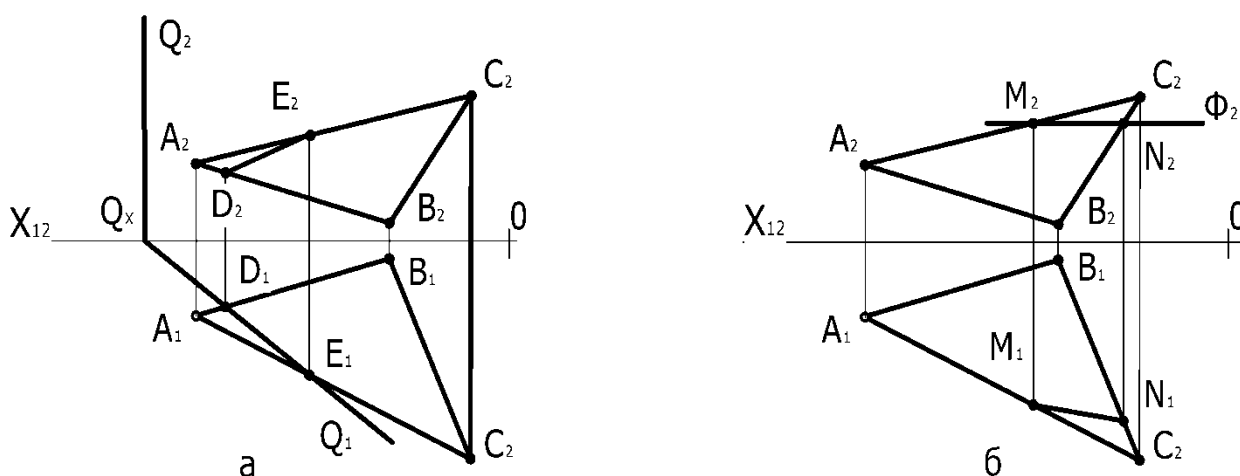


Рисунок 1.28 – Перетин площин

Дві площини перпендикулярні між собою, якщо одна з них проходить через пряму, яка перпендикулярна до другої площини (рис. 1.29).

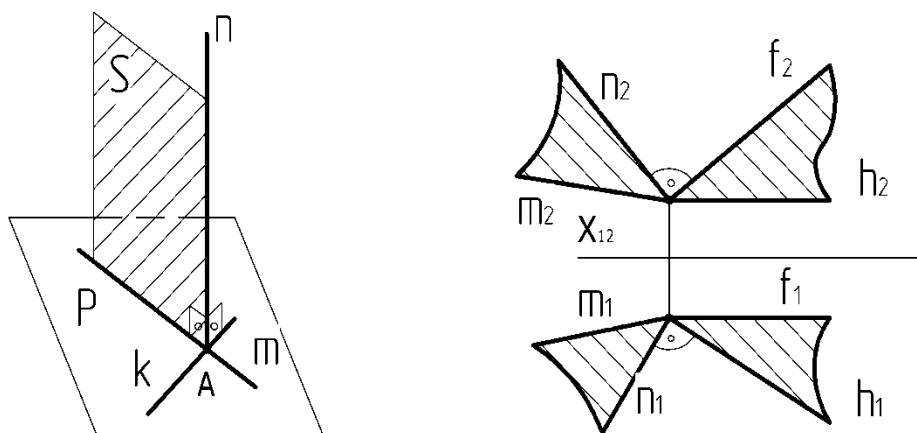


Рисунок 1.29 – Перпендикулярність площин

### 2.3 Фронталі та горизонталі в площині

У будь-якій площині, яка не паралельна і не перпендикулярна до площин проекцій, існують особливі лінії, іноді їх називають головними або особливими лініями.

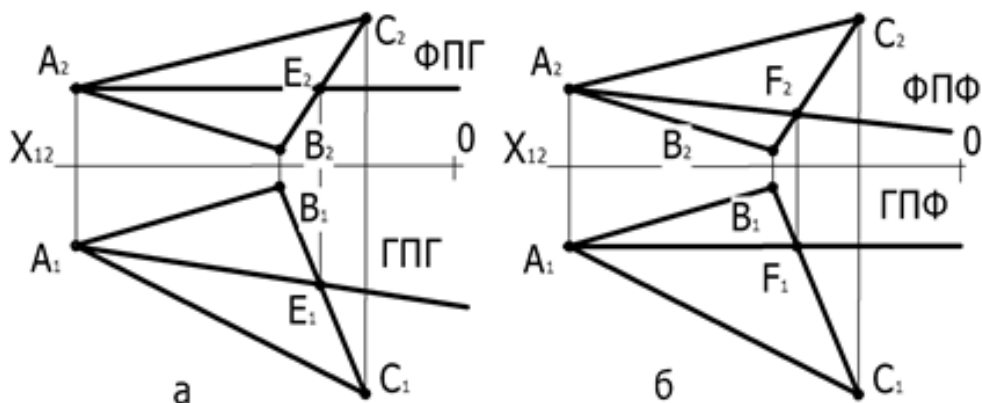
До головних ліній площини відносяться прямі рівня, що належать площині і паралельні площинам проекцій – горизонталі і фронталі (рис. 1.30 а, б).

*Горизонталь площини* – це лінія, що належить площині і паралельна горизонтальній площині проекцій  $\Pi_1$ .

*Фронталь площини* – це лінія, що належить площині та паралельна фронтальній площині проекцій  $\Pi_2$ .

$AE \parallel \Pi_1$  – горизонталь;

$AF \parallel \Pi_2$  – фронталь.



$$AE \subset ABC \rightarrow \begin{cases} A \in ABC \\ E \in ABC \end{cases}$$

$$AF \subset ABC \rightarrow \begin{cases} A \in ABC \\ F \in ABC \end{cases}$$

Рисунок 1.30 – Головні лінії площини

### Тема 3. Поверхні. Переріз поверхонь проекціуючою площиною

#### 3.1 Поверхні. Способи утворення поверхонь

Поверхню зручно розглядати як сукупність послідовних положень певної лінії (твірної), що переміщується в просторі за визначеним законом. Закон переміщення твірної доцільно задавати у вигляді сімейства ліній (напрямні), по яких переміщуються твірні (рис. 1.31). Описаний спосіб утворення поверхні називається кінематичним.

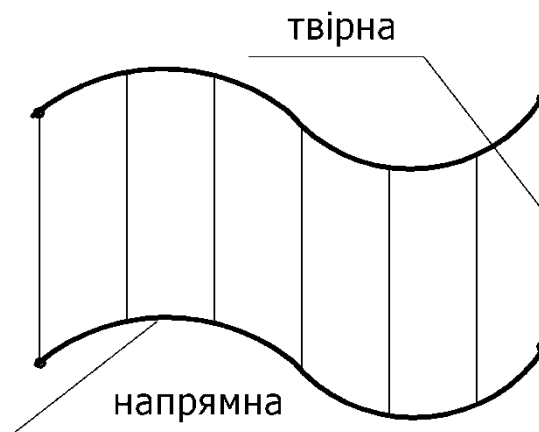
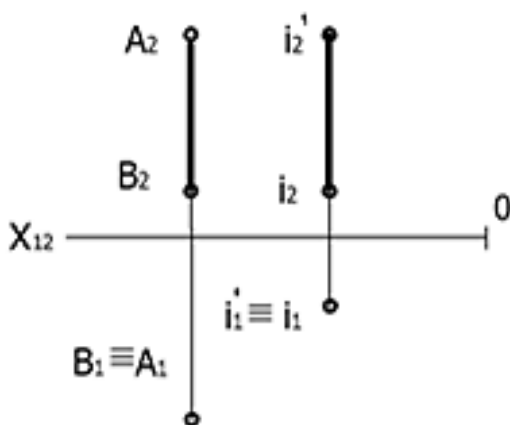


Рисунок 1.31 – Утворення поверхні

При кінематичному способі утворення поверхонь їх зручно задавати визначником.



Визначником поверхні називають сукупність умов, необхідних і достатніх для завдання поверхні. Визначник складається з двох частин: геометричної та алгоритмічної.

Наприклад, для завдання циліндра обертання потрібні геометрична частина – вісь циліндра  $i$  та одна твірна  $AB$  (рис. 1.32) і алгоритмічна частина – вказівка на те, що твірна обертається навколо осі.

Рисунок 1.32 – Завдання поверхні визначником

Крім того, поверхня може бути задана на кресленні обрисом (рис. 1.33). Геометричні фігури на рис. 1.33 мають лише геометричну частину. Поверхню вважають заданою в тривимірному просторі, якщо відносно будь-якої точки цього простору можна сказати, належить вона цій поверхні чи ні.

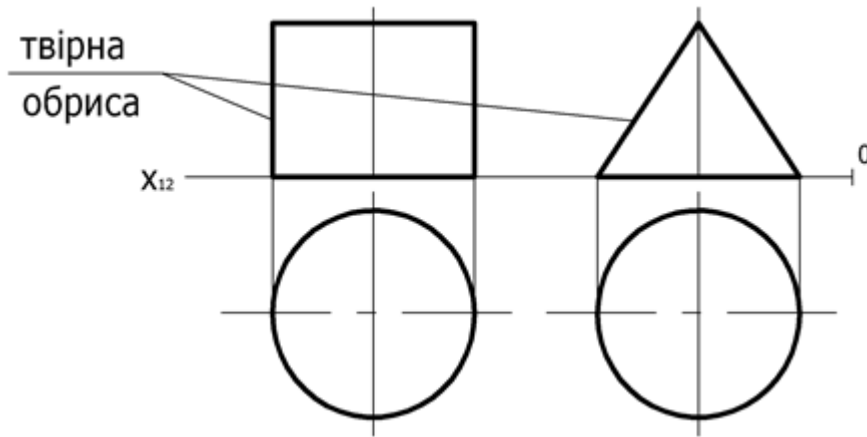


Рисунок 1.33 – Завдання поверхні обрисом

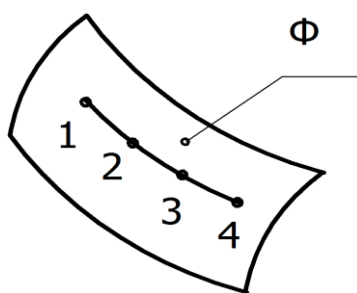
За формою твірної поверхні поділяються на лінійчаті (твірна пряма лінія) та нелінійчаті (твірна крива лінія).

*Лінійчаті* – призматичні, пірамідальні, циліндричні, конічні, торси, гвинтові та ін.

*Нелінійчаті* – поверхні обертання, поверхні паралельного перенесення та інші.

Найчастіше при утворенні технічних форм використовуються призматичні, пірамідальні, циліндричні, конічні, сферичні, торсові поверхні.

### 3.2 Належність точки і лінії поверхні



Лінія належить поверхні, якщо всі її точки належать поверхні. Лінії, які належать поверхні, можуть бути плоскими і просторовими. В практичних умовах лінію будують приблизно через достатню кількість точок, які належать поверхні (рис. 1.34).

Рисунок 1.34 – Лінія на поверхні

До головних ліній поверхні відносяться лінії рівня, що належать поверхні і паралельні будь-якій площині проєкцій (горизонталі і фронталі). Точка належить поверхні, якщо вона належить будь-якій лінії цієї поверхні. Для визначення належності точки поверхні на практиці використовують такі лінії як горизонталі, фронталі, лінії нарису, твірні. Проекції цих ліній або задані на кресленні, або легко визначаються.

### 3.3 Перетин багатогранної поверхні площиною

При перетинанні багатогранної поверхні проєкціуючою площиною у перерізі буде багатокутник, вершини якого знаходяться на ребрах, а сторони – лінії перетину його граней із січною площиною (рис. 1.35). Одна з проєкцій перетину буде збігатися зі слідом січної площини.

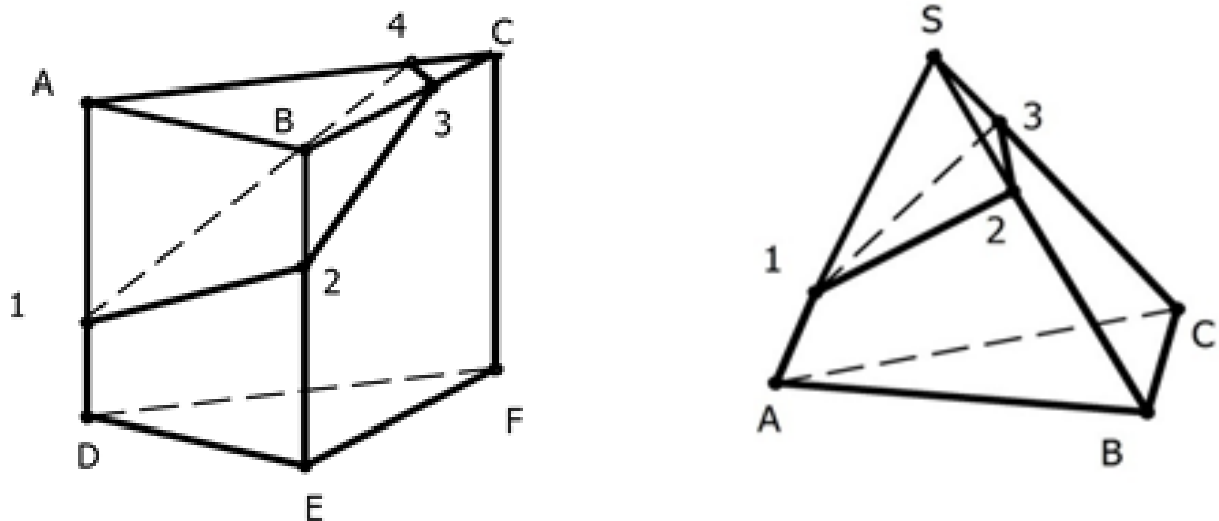


Рисунок 1.35 – Перетин багатогранної поверхні площиною

### 3.4 Циліндричні перерізи

При перетинанні прямого кругового циліндра площиною утворюються наступні лінії (рис. 1.36):

- Коло – січна площина перпендикулярна осі циліндра (Р);
- Прямокутник – січна площина перпендикулярна основі циліндра (Ф, Т);

- Еліпс – січна площина нахилена до осі циліндра (R). Неповний еліпс буде, якщо січна площина перетинає основу циліндра (N, Q).

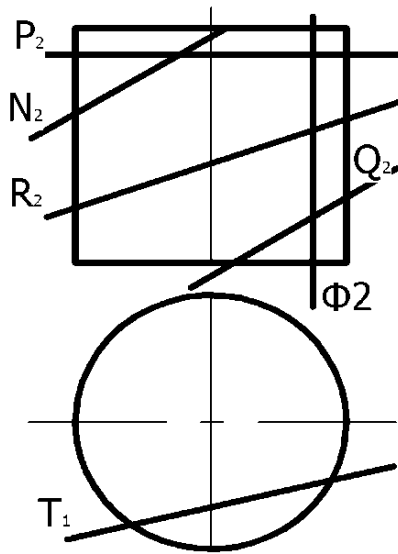


Рисунок 1.36 – Циліндричні перерізи

### 3.5 Конічні перерізи

Конічні перерізи обмежені або кривою лінією другого порядку (коло, еліпс, гіпербола, парабола), або прямими лініями. При перетинанні прямого кругового конуса проєкціуючими площинами утворюються наступні лінії (рис. 1.37):

- а) коло – січна площина, перпендикулярна до осі конуса (Q);
- б) трикутник – січна площина проходить через вершину конуса (P);
- в) еліпс – січна площина перетинає всі твірні конуса і нахилена до його осі (T);
- г) парабола – січна площина, паралельна одній з твірних конуса (R);
- д) гіпербола – січна площина, паралельна двом твірним (Φ).



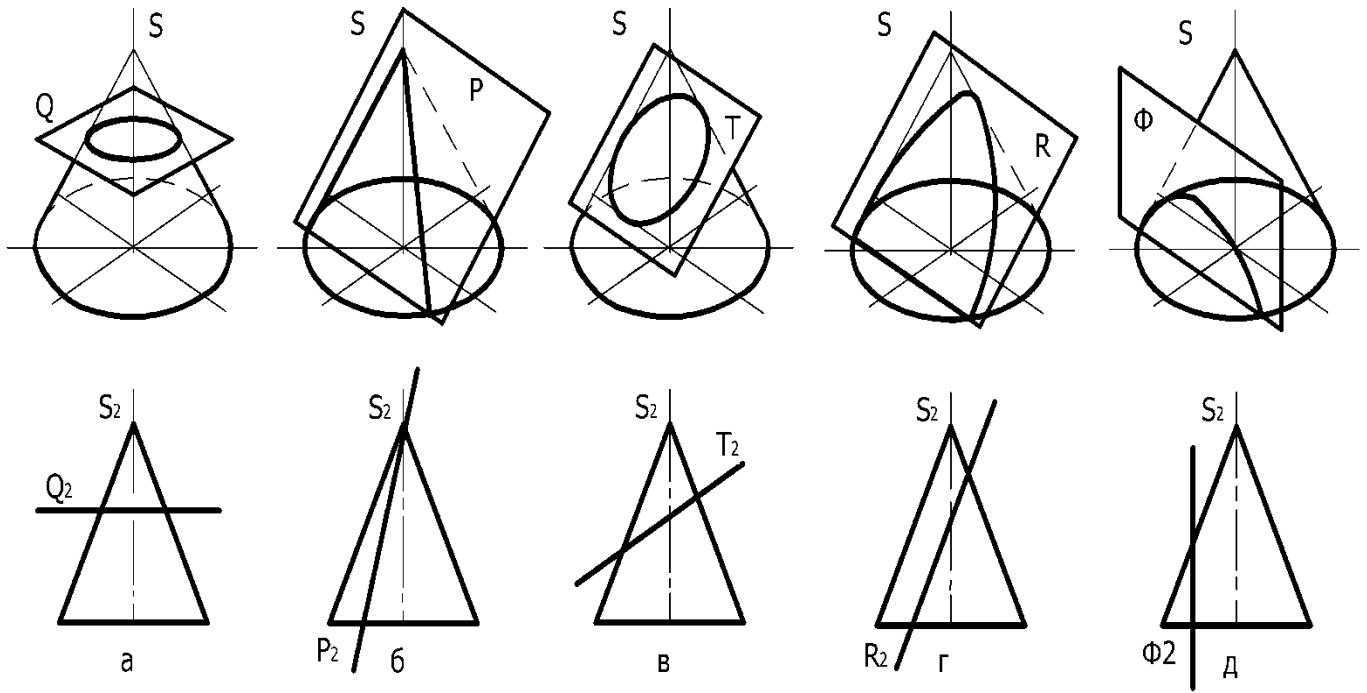


Рисунок 1.37 – Конічні перерізи

### 3.6 Перетин сферичної поверхні площиною

Сферичні перерізи обмежені завжди колом, що проєкціюється у вигляді:

- кола – якщо січна площина паралельна площині проєкцій;
- прямої – якщо січна площина перпендикулярна площині проєкцій;
- еліпса – якщо січна площина нахилена до площини проєкцій.

## Тема 4 Способи перетворення креслень. Натуральна величина похилого перерізу. Розгортки поверхонь.

### 4.1 Сутність методів перетворення

Відомо, що при розміщенні фігури, паралельно будь-якій площині проєкцій, вона проєкціюється на цю площину в дійсну величину. В усіх інших випадках елементи фігури (площини) проєкціюються із спотворенням, через що визначення їх справжніх величин ускладнюється.

Для простого і зручного розв'язування задач користуються способами перетворення проєкцій.

Сутність методів перетворення полягає в зміні взаємного положення геометричних образів і площин проєкцій для того, щоб геометричні образи займали окреме положення.

До основних методів відносяться:

1. Метод заміни площин проєкцій (об'єкт проєкціювання залишають незмінним, змінюють саму систему площин проєкцій).

2. Метод плоско-паралельного переміщення (система площин проєкцій лишається незмінною, а нові проєкції фігури утворюються внаслідок обертання її навколо вибраних осей).

#### 4.2 Метод заміни площин проєкцій

Сутність методу заміни площин проєкцій полягає в тому, що положення точок, ліній, плоских фігур у просторі залишається незмінним, а змінюються щодо них площини проєкцій. Замість однієї з існуючих площин проєкцій вводиться нова, при цьому перпендикулярність між площинами зберігається.

Розглянемо точку  $A$  в системі площин  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$  (рис. 1.38 а). Введемо нову вертикальну площину  $\Pi_4$ , слід якої на площині  $\Pi_1$  є  $X_{14}$ . Цим самим від системи

площин проєкцій  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  перейдемо до системи  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ . При цьому горизонтальна проєкція точки не зміниться, а фронтальною проєкцією стане точка  $A_4$ .

Як бачимо, відстань від проєкції  $A_2$ , що замінюється, до осі  $X_{12}$  дорівнює відстані від нової проєкції  $A_4$  до нової осі  $X_{14}$ . Цю саму операцію показано на комплексному кресленні (рис. 1.38 б).

$$A_2AX_{12} = AA_1 = A_4AX_{14} \text{ (рис. 1.38 а);}$$

$A_1AX_{14}A_4$  – лінія зв'язку;

$$X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow X_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1}$$

$$A_1A_4 \perp X_{14}$$

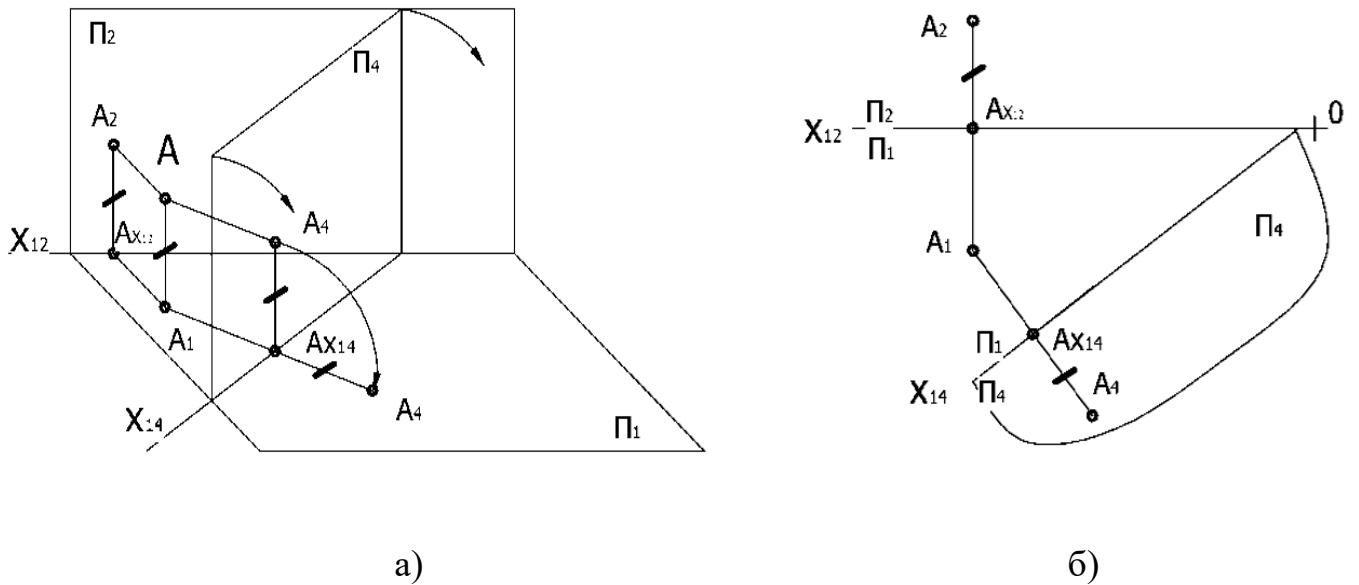


Рисунок 1.38 – Сутність методу заміни площин проєкцій

Висновки:

- 1) При заміні (фронтальної) площини проєкцій ( $\Pi_2$ ) на нову площину  $\Pi_4$  одна проєкція точки (горизонтальна  $A_1$ ) залишається незмінною.
- 2) Щоб визначити нову (фронтальну  $A_4$ ) проєкцію, треба з незмінної (горизонтальної  $A_1$ ) проєкції провести перпендикуляр до нової осі  $X_{14}$  і відкласти на ньому відрізок, що дорівнює відстані від заміненої проєкції до попередньої осі.
- 3) Заміну можна робити послідовно кілька разів до одержання бажаної проєкції.

#### 4.3 Типові задачі методу заміни площин проєкцій

##### 4.3.1 Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

Щоб знайти справжню величину відрізка прямої АВ, замінюють фронтальну площину проєкцій  $\Pi_2$  новою вертикальною площиною  $\Pi_4$  так, щоб вона була паралельна відрізку АВ і залишалась перпендикулярною до площини проєкцій  $\Pi_1$  (рис. 1.39).

На площину  $\Pi_4$  відрізок спроекціюється в натуральну величину. Проекцію  $A_4B_4$  на комплексному кресленні (рис. 1.39) будують в такій послідовності:

– на довільній відстані від  $A_1B_1$  проводять нову вісь  $X_{14}$ , паралельну горизонтальній проекції відрізка;

– з проєкцій  $A_1$  і  $B_1$  проводять лінії проєкційного зв'язку в системі площин  $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ , перпендикулярні осі  $X_{14}$ ;

– на продовженні цих ліній від нової осі ( $X_{14}$ ) відкладають відрізки, які дорівнюють координатам  $Z$  точок  $A$  і  $B$ , що виміряють на площині проєкцій  $\Pi_2$ ;

– відрізок  $A_4B_4$  є натуральною величиною відрізка  $AB$ , оскільки він паралельний новій площині проєкцій  $\Pi_4$ .

$$X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow X_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1}; \quad \Pi_4 \parallel AB; \quad X_{14} \parallel A_1B_1$$

У системі  $X_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1}$   $AB$  – фронталь;  $B_2V_{X_{12}} = V_{X_{14}}B_4$ ;

$$A_2A_{X_{12}} = A_{X_{14}}A_4; \quad A_4B_4 = |AB|$$

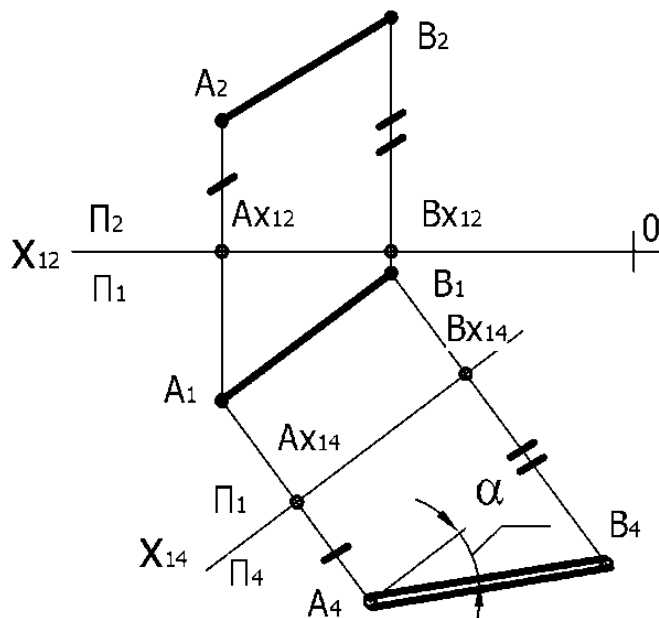


Рисунок 1.39 - Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

Вище викладеними побудовами визначаються:

- натуральна величина відрізка;
- кути нахилу прямої до площин проекцій.

#### 4.3.2 Перетворення прямої рівня в проекціюючу

Щоб пряма зайняла проекціююче положення, достатньо перпендикулярно до прямої рівня провести нову площину  $\Pi_4$ , її слідом буде  $X_{24}$  (рис. 1.40). Проекція прямої у вигляді точки розміститься від осі  $X_{24}$  на відстані, що дорівнює відстані від проекції  $A_1B_1$  до осі  $X_{12}$ .

$$X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow X_{24} \frac{\pi_2}{\pi_4};$$

$$\Pi_4 \perp AB; \quad X_{24} \perp A_2B_2$$

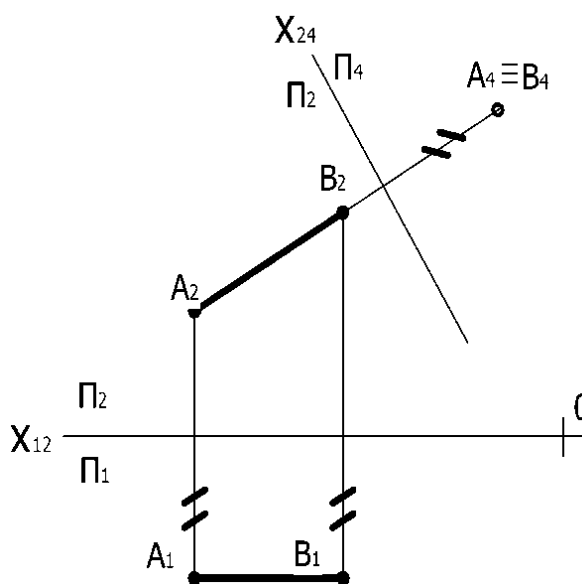


Рисунок 1.40 – Перетворення прямої рівня в проекціюючу

При перетворенні прямої загального положення в проекціюючу послідовно здійснюються дві заміни площин проекцій.

Типові задачі, розв'язувані перетворенням прямої в проекціюючу:

- визначення відстані від точки до прямої;
- визначення відстані між двома паралельними прямими;
- визначення відстані між двома мимобіжними прямими.

### 4.3.3 Перетворення площини загального положення в проєкціюючу

На рис. 1.41 площина загального положення задана відріком або трикутником ABC.

$$\pi_4 \perp ABC;$$

$$X_{14} \perp \text{ГПГ};$$

$$X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow X_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1};$$

$\alpha$  – кут нахилу прямої до  $\pi_1$

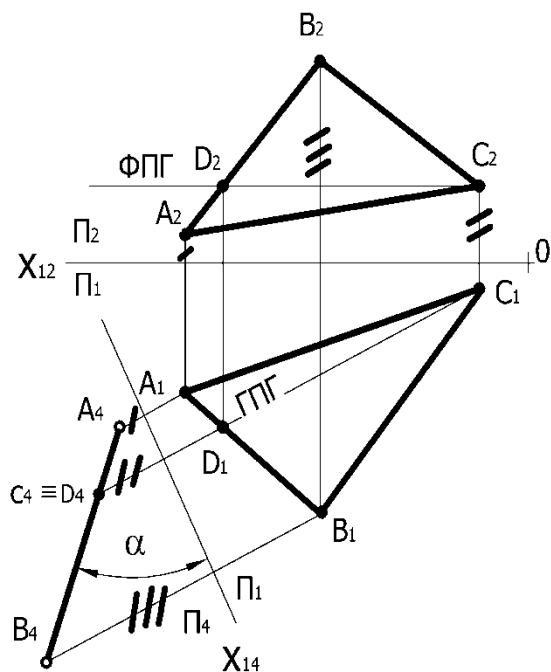


Рисунок 1.41 – Перетворення площини загального положення в проєкціюючу

Щоб перевести цей відрік у проєкціююче положення, необхідно і достатньо, щоб будь-яка пряма, що належить йому, спроекціювалася в точку. За таку пряму доцільно взяти лінію рівня, бо для її перетворення в точку досить однієї заміни. На рис. 1.41 у відріку проведено горизонталь  $CD$ , нову вертикальну площину  $\pi_4$  взято перпендикулярно до площини  $\theta(\Delta ABC)$ , її слід проводити перпендикулярно до горизонтальної проєкції горизонталі ( $C_1D_1$ ). При цьому відрік перетворився у фронтально-проєкціюючу площину і спроекціювався у відрізок прямої  $A_4B_4$ .

Типові задачі:

- визначення відстані від точки до площини;
- визначення кутів нахилу площини до площин проєкцій.

#### 4.3.4 Перетворення проєкціуючої площини у площину рівня

При заміні вісь  $X_{24}$  проводять паралельно  $A_2C_2$  і від осі відкладають відрізки, що дорівнюють відстані від точок горизонтальної проєкції до осі  $X_{12}$ .

$$\Pi_4 \parallel \Delta ABC; \quad X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow X_{24} \frac{\pi_2}{\pi_4}$$

$$X_{24} \parallel A_2C_2; \quad A_4B_4C_4 = |ABC|$$

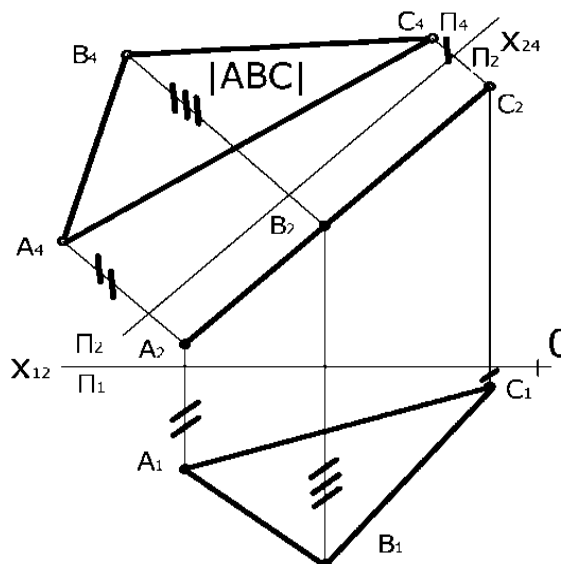


Рисунок 1.42 – Перетворення проєкціуючої площини у площину рівня

Типові задачі:

- визначення натуральних величин плоских фігур;
- геометричні побудови на базі натуральної величини плоскої фігури.

При перетворенні площини загального положення в площину рівня послідовно здійснюються дві заміни площин проєкцій.

#### 4.4 Метод плоско-паралельного переміщення

Плоско-паралельним переміщенням називається такий рух фігури в просторі, при якому всі її точки переміщуються в площинах, паралельних між собою і паралельних одній із площин проєкцій до моменту, коли вона займе окреме положення щодо площин проєкцій. Оскільки положення осі обертання не впливає на остаточний результат, то вибір її довільний.

Щоб встановити відрізок прямої загального положення в положення, паралельне фронтальній площині проєкцій, треба повернути його навколо

«невиявленої» горизонтально-проекціуючою осі і на полі  $\Pi_2$  дістанемо натуральну величину відрізка АВ (рис. 1.43).

Для цього горизонтальну проекцію  $A_1B_1$ , не змінюючи її величини, розташовують на вільному полі креслення, паралельно осі проекцій  $X_{12}$  ( $A_1B_1 \parallel X_{12}$ ). З фронтальних проекцій точок  $A_2$  і  $B_2$  проводять прямі, паралельні осі  $X_{12}$ , до перетину з вертикальними лініями проекційного зв'язку, проведеними з точок  $A_1$  і  $B_1$ .

$A_2'B_2'$  – фронтальна проекція переміщеного відрізка АВ – дорівнює натуральній (дійсній) величині відрізка. Кут  $\alpha$  є кутом нахилу прямої АВ до горизонтальної площини проекцій.

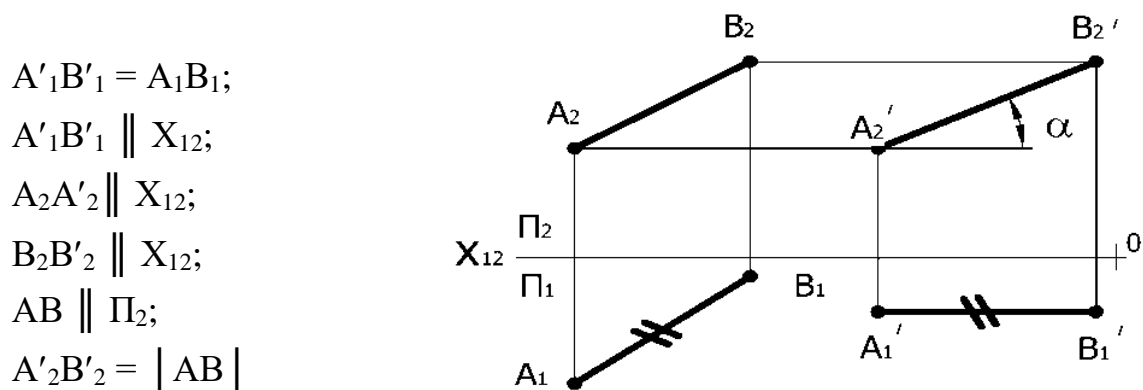


Рисунок 1.43 – Метод плоско-паралельного переміщення

#### 4.5 Натуральна величина похилого перерізу

ПРИКЛАД: Побудувати проекції лінії перетину шестигранної призми фронтально-проекціуючою площиною Р (рис. 1.44). Побудувати натуральну величину фігури перерізу.

У перерізі трикутної призми цією площиною буде шестикутник. Фронтальна проекція фігури перерізу збігається зі слідом січної площини, вершини шестикутника будуть знаходитися на ребрах .

$$1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 \subset P_2; \quad 1 \in BL; 2 \in AK; 3 \in CM; 4 \in FR; 5 \in DN; 6 \in EQ.$$

Горизонтальні проекції збігаються з горизонтальними проекціями відповідних ребер.

$$\text{Отже, } 1_1 \equiv A_1 \equiv D_1; 2_1 \equiv B_1 \equiv E_1; 3_1 \in B_1C_1; 4_1 \in A_1C_1; 5_1 \in D_1N_1; 6_1 \in E_1Q_1.$$

Натуральна величина перерізу визначається методом заміни площин проекцій. Проводимо нову площину  $\Pi_4$ , паралельно площині Р. Вісь  $X_{24}$



проводимо паралельно  $P_2$ . З фронтальних проєкцій точок  $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2$  опускаємо перпендикуляри на нову вісь і відкладаємо на них відрізки, що дорівнюють відстані від точок  $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1$  до осі  $X_{12}$ .

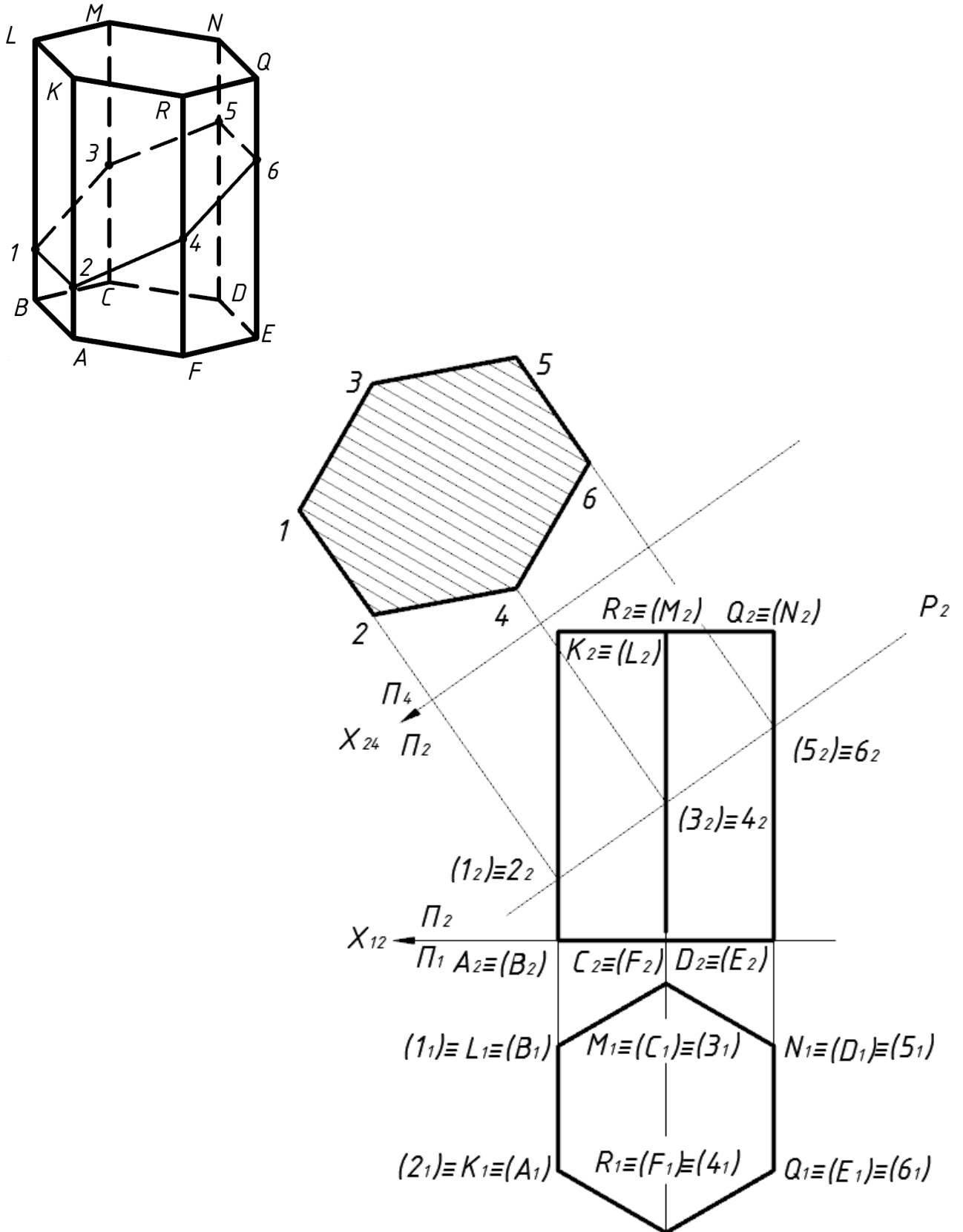


Рисунок 1.44 – Натуральна величина похилого перерізу призми

ПРИКЛАД: Побудувати проєкції лінії перетину піраміди фронтально-проєкціуючою площиною  $P$ . Побудувати натуральну величину фігури перерізу (рис. 1.45).

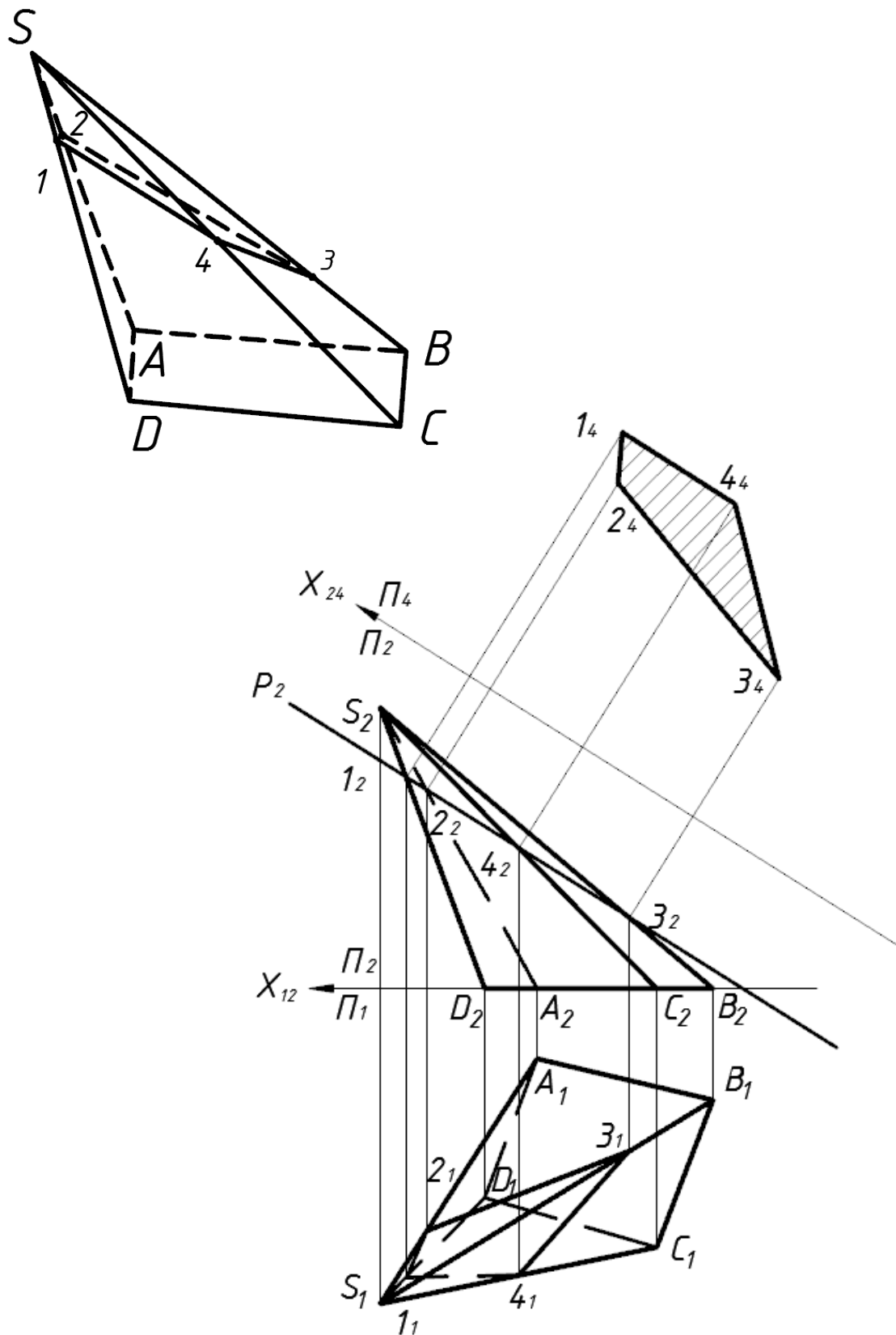


Рисунок 1.45 – Натуральна величина похилого перерізу піраміди

У перетині чотиригранної піраміди такою площиною буде чотирикутник, фронтальна проекція якого збігається зі слідом січної площини  $1_2 2_2 3_2 4_2 \subset P_2$ .

Вершини трикутника будуть знаходитися на ребрах:

$1 \in SD$ ;  $2 \in SA$ ;  $3 \in SB$ ;  $4 \in SC$ .

Отже  $1_1 \in S_1 D_1$ ;  $2_1 \in S_1 A_1$ ;  $3_1 \in S_1 B_1$ ;  $4 \in S_1 C_1$ .

Натуральна величина перерізу визначається методом заміни площин проекцій.

На площині  $\Pi_4$  чотирикутник зобразиться в натуральну величину.

ПРИКЛАД: Побудувати проекції лінії перетину циліндра проекціуючою площиною. Побудувати натуральний вид перерізу (рис. 1.46).

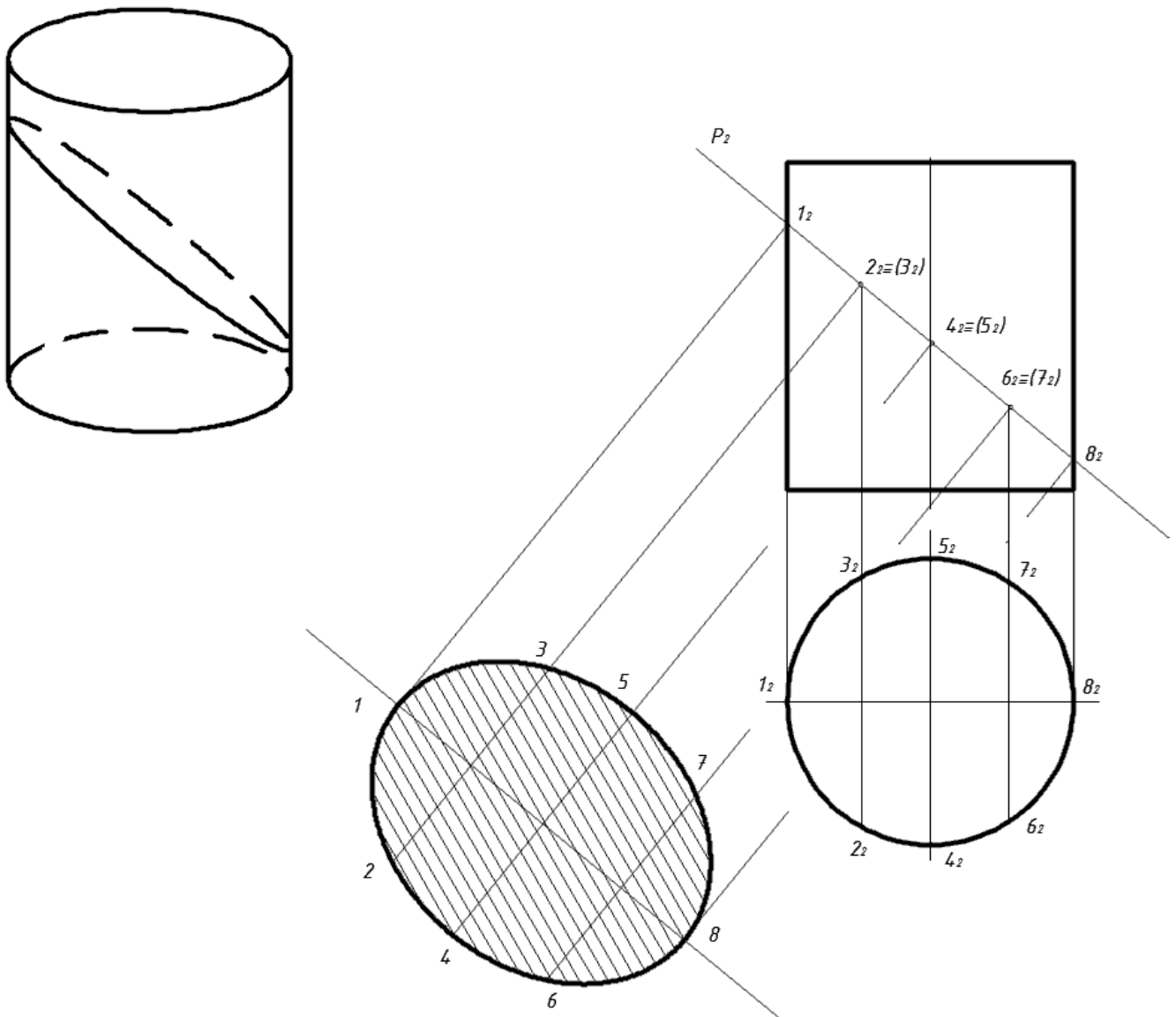


Рисунок 1.46 – Натуральна величина похилого перерізу циліндра

У перетині циліндра такою площиною буде еліпс. Фронтальна проекція перетину збігається зі слідом площини.

$1_2 3_2 5_2 7_2 8_2 6_2 4_2 2_2 \subset P_2$ . тому, що площина проекціуюча.

Горизонтальна проекція перерізу збігається з основою циліндра, тому що циліндр є горизонтально-проекціуючою поверхнею. Горизонтальна проекція циліндра має збиральну властивість.

Натуральний вид перерізу визначимо методом заміни площин проекцій.

**ПРИКЛАД:** Побудувати проекції перерізу прямого кругового конуса проекціуючою площиною  $P$  (рис. 1.47)

Оскільки площина  $P$  перетинає не тільки всі твірні конуса, а і його основу, то фігурою перерізу буде неповний еліпс.

Фронтальні проекції  $1_2, 2_2, \dots$  точок еліптичного перерізу збігаються з фронтальним слідом  $P_2$ . Точки 1 і 2 належать основі конуса. Тому їх горизонтальні проекції  $1_1, 2_1$  знаходяться на горизонтальній проекції основи конуса. Через точки  $3_2 (4_2)$  проводять допоміжну горизонтальну, площину, що перетинає бічну поверхню конуса по колу радіусом  $R_a$ . Через точки  $5_2$  і  $6_2$  проводять ще одну допоміжну горизонтальну площину, яка перетинає бічну поверхню конуса по колу радіуса  $R_b$ . Точку 7 будують за вертикальною відповідністю.

Натуральна величина перерізу визначається методом заміни площин проекцій.

**ПРИКЛАД:** Побудувати проекції перерізу сфери проекціуючою площиною (рис. 1.48).

У результаті перетину утворюється коло, яке проекціується на горизонтальну площину проекцій як еліпс. Точки 1 і 6 належать екватору сфери, тому визначаються за вертикальною відповідністю. Точки на фронтальному меридіані 4 і 5 є точками, що відділяють на полі  $\Pi_1$  видиму частину еліпса від невидимої. Через точки  $2_2$  і  $3_2$  ) проводять допоміжну горизонтальну, площину, що перетинає бічну поверхню конуса по колу радіусом  $R_x$ .

Побудова натуральної величини похилого перерізу сфери зводиться до побудови кола певного діаметра. Центр кола – точка  $O_2$ , знаходиться на

перетині січної площини та перпендикуляра, проведеного з центра сфери до січної площини. Діаметр кола дорівнює відстані  $1_2 - 6_2$  по січній площині. Для побудови похилого перерізу на вільному місці поля креслення проводимо осі. В точці перетину осей, як із центра проводять коло радіусом  $R$ .

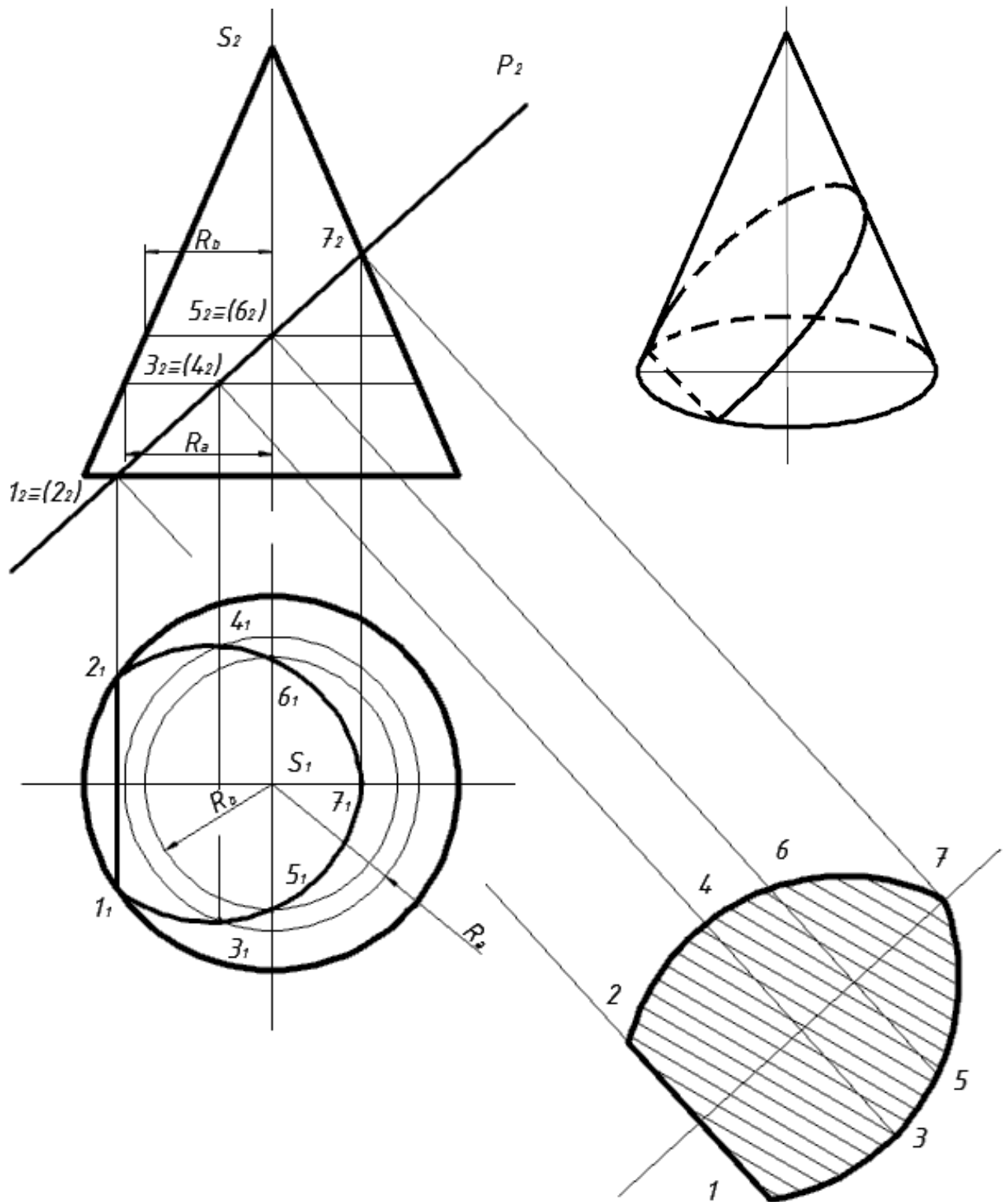


Рисунок 1.47 – Натуральна величина похилого перерізу конуса

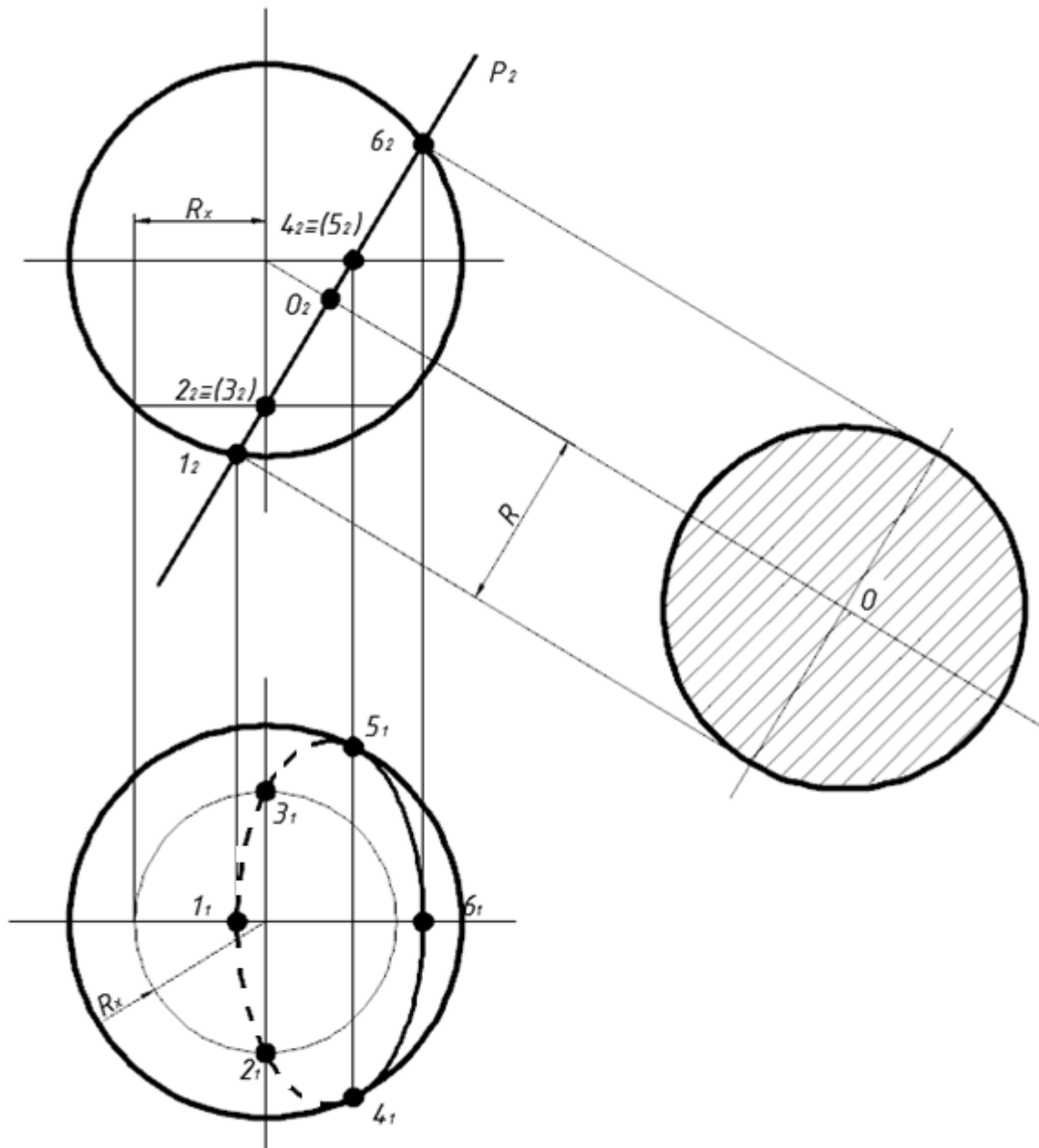


Рисунок 1.48 – Натуральна величина похилого перерізу сфери

#### 4.6 Розгортки поверхонь

У різних галузях техніки при виготовленні виробів з листового матеріалу часто мають справу з розгортками поверхонь.

Розгорткою поверхні називається плоска фігура, утворена сполученням усіх точок і ліній поверхні з площиною без розривів і складок.

Усі поверхні поділяються на розгортні і нерозгортні. Всі багатогранні поверхні розгортні. Кривими поверхнями, що розгортаються, можуть бути

тільки лінійчаті, у яких суміжні твірні паралельні чи перетинаються (циліндричні, конічні, торсові).

Всі інші поверхні розгортаються приблизно. Поверхня, що не розгортається, апроксимується (замінюється) багатогранною поверхнею.

Розгортки будують як сукупність натуральних величин усіх її граней. Натуральні величини ребер визначаємо методом плоско-паралельного переміщення.

**ПРИКЛАД:** Побудувати розгортку поверхні піраміди з нанесенням на неї точки  $K$ , що належить грані піраміди (рис. 1.49).

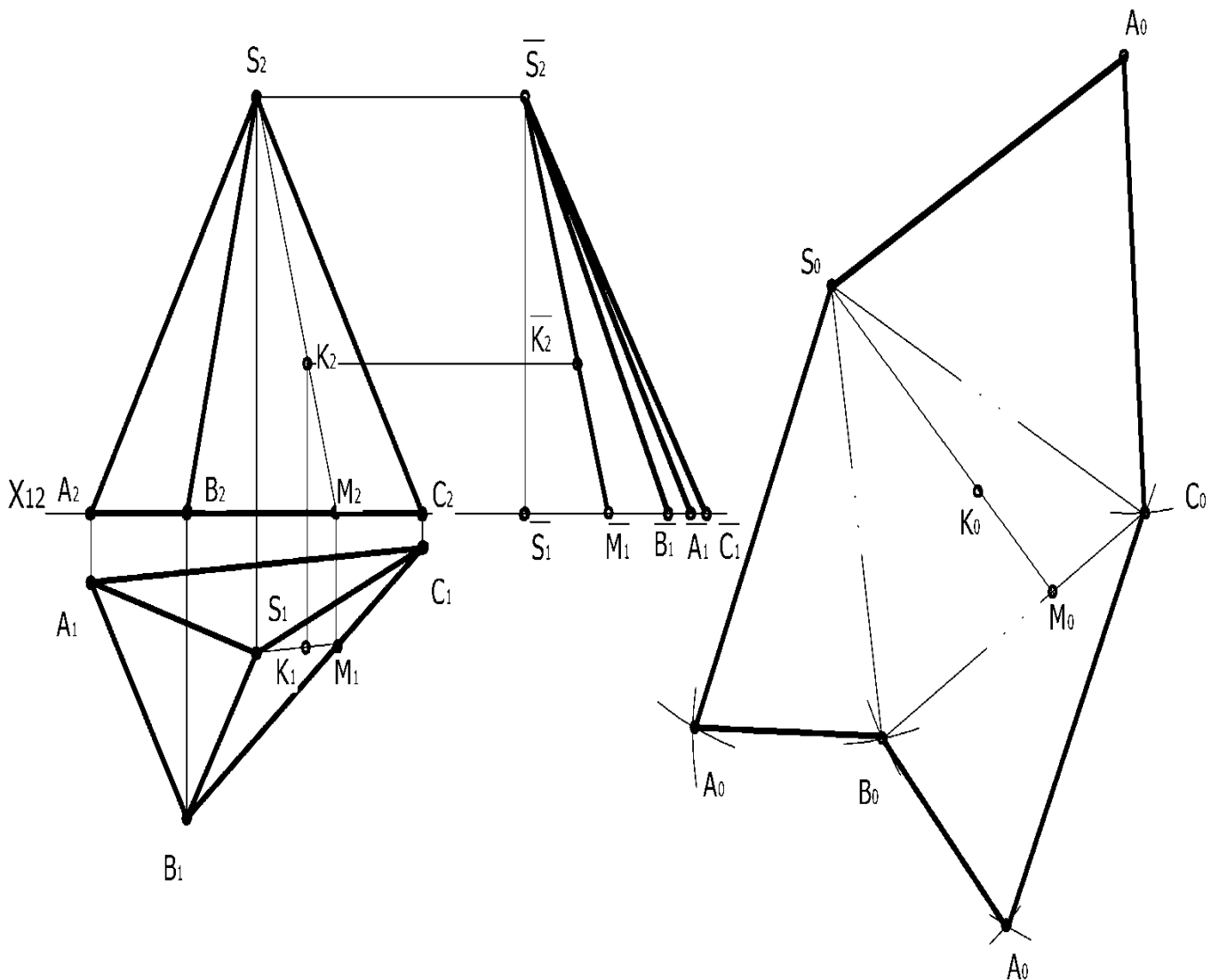


Рисунок 1.49 – Розгортка поверхні піраміди

Будуємо розгортку неправильної трикутної піраміди, основа якої лежить на горизонтальній площині проєкцій. Розгортку виконуємо розрізанням поверхні піраміди вздовж бічного ребра, та суміщенням трьох бічних граней піраміди з площиною її основи. Розгортка трикутної піраміди складається з трьох трикутників бічних граней і трикутника основи.

Трикутники будують за натуральними величинами ребер піраміди.

План розв'язання.

- 1) Методом плоско-паралельного переміщення визначаємо натуральні величини ребер SA, SB, SC.

$$S_1A_1 = S_1A_1; S_2A_1 = |SA|; S_2B_1 = |SB|; S_2C_1 = |SC|; S_2M_1 = |SM|;$$

- 2) Будуємо натуральні величини граней  $S_0A_0B_0$ ;  $S_0B_0C_0$ ;  $S_0A_0C_0$  і основи  $A_0B_0C_0$  за трьома відомими сторонами.

- 3) Наносимо точку K на розгортку, виходячи з її приналежності відповідній прямій.

$$B_0M_0 = B_1M_1; S_0K_0 = S_2K_2$$

**ПРИКЛАД:** Побудувати розгортку поверхні прямого кругового конуса з нанесенням на неї точки K, що належить бічній поверхні конуса (рис. 1.50).

Для побудови розгортки конічної поверхні коло її основи розбивають на 8 рівних частин, тобто в конус вписують восьмигранну піраміду.

Розгортку бокової поверхні конуса будують як сукупність трикутних граней піраміди. Всі твірні конуса рівні між собою. Твірні  $S_1$  і  $S_5$  – фронталі, тому  $S_2I_2 = S_2J_2$  – натуральна величина твірних.

Щоб знайти на розгортці точку K, потрібно спочатку перемістити її фронтальну проєкцію ( $K_2$ ) паралельно осі  $X_{12}$  до положення  $K_2$ . Це відповідає обертанню твірних до положення, паралельного фронтальній площині проєкцій навколо осі, що проходить через вершину конуса, перпендикулярно до площини  $\Pi_1$ . Утворений після обертання натуральний відрізок твірною відкладають на розгортці, тобто  $S_0K_0 = S_2K_2$ .



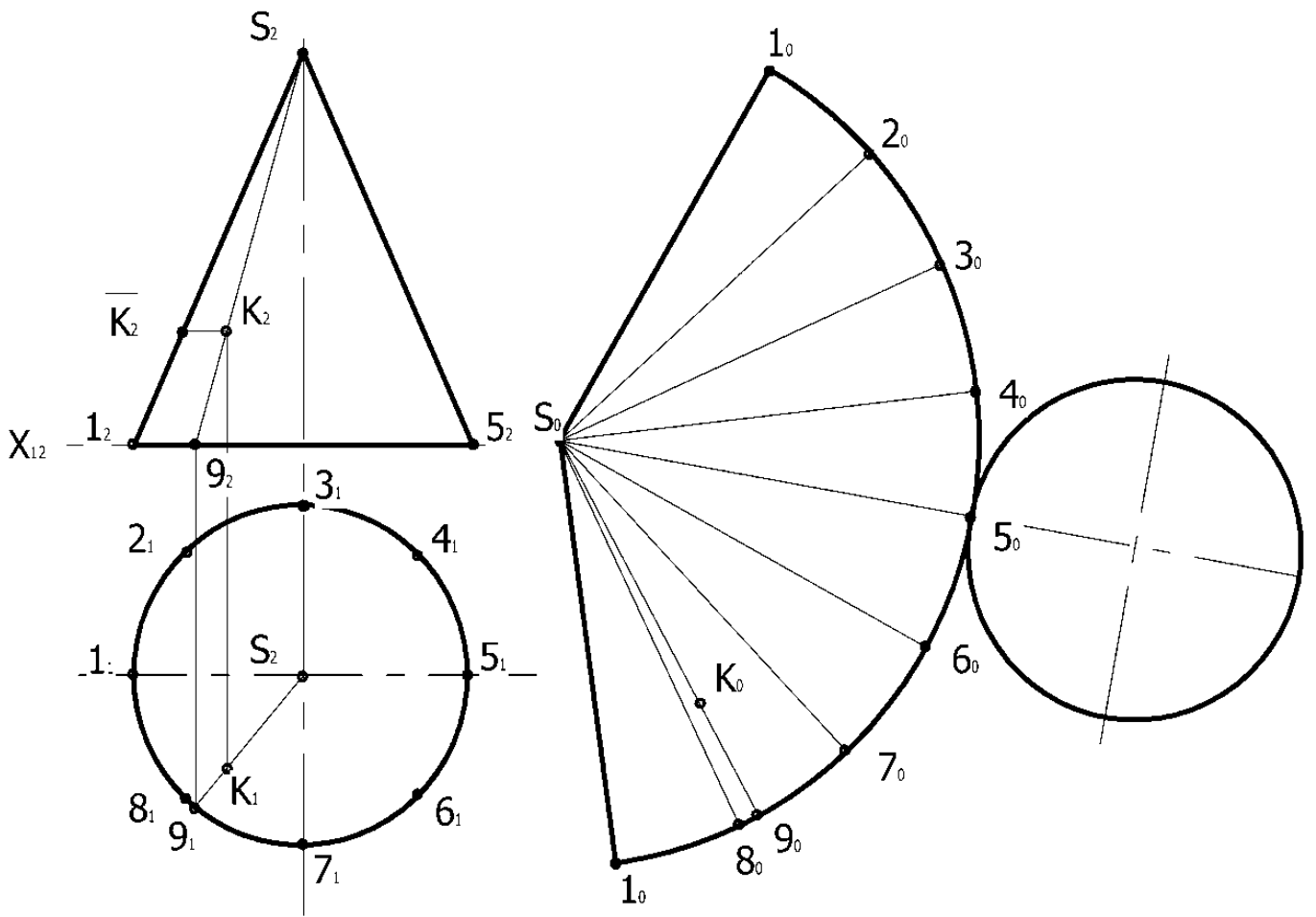


Рисунок 1.50 – Розгортка поверхні конуса

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Михайленко В.Є. Інженерна та комп'ютерна графіка / В.Є. Михайленко, В.М. Найдиш, А.М. Підкоритов, І.А. Скидан. Підручник/ За ред. В.Є. Михайленка. – 2-ге вид., перероб. – К.: Вища школа, 2001. – 350 с.
2. Основи комп'ютерної графіки: Навчальний посібник / За ред. М.В. Левківського. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 232 с.
3. Хмеленко О.С. Нарисна геометрія. – К.: Кондор, 2008. – 438 с.
4. Комп'ютерна графіка: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / Під ред. В.Є. Ходакова. – Херсон: ОЛДІ-плюс, 2008. – 584 с.
5. Морозенко О.П. Інженерна графіка / О.П. Морозенко, С.Е. Кукель, І.П. Карпенко, І.В. Вишневський. Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2011. – 52 с.
6. Морозенко О.П. Правила виконання та оформлення креслень / О.П. Морозенко, Г.В. Малишко. Навчальний посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 48 с.

Навчальне видання

Морозенко Олена Петрівна

Малишко Ганна Віталіївна

Комп'ютерні методи  
нарисної геометрії та інженерної графіки  
Частина 1  
Конспект лекцій

Тем. план. 2017, поз. 139

Підписано до друку 01.08.2017 . Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір друк. Друк плоский.  
Облік.-вид. арк. 2,94. Умов. друк. арк. 2,90. Тираж 100 пр. Замовлення № 127

Національна металургійна академія України  
49600, м.Дніпро-5, пр. Гагаріна,4

---

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ