МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Г. Г. ШВАЧИЧ, В. С. КОНОВАЛЕНКОВ, Т. М. ЗАБОРОВА

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Друкується за Планом видань навчальноЇ та методичноЇ лІтератури,
затвердженим Вченою радою НМетАУ
Протокол №1 від 01.02.2016

Дніпропетровськ НМетАУ 2016

УДК 517.3
Швачич Г. Г., Коноваленков В. С., Заборова Т. М. Вступ до теорії функцій комплексної змінної. Навчальний посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2016. – 33 с.

Містить основні поняття теорії функцій комплексної змінної. Розглянути комплексні числа та дії з ними. Наведені визначення функцій комплексної змінної, аналітичних функцій, диференціювання та інтегрування таких функцій. Наведена велика кількість прикладів. Крім того, посібник містить варіанти завдань для індивідуальної роботи.

Призначений для студентів напряму 6.050101 – комп'ютерні науки.

Іл. 5. Бібліогр.: 9 найм.

Друкується за авторскою редакцією.

Відповідальний за випуск Г. Г. Швачич, д-р техн. наук, проф.

Рецензенти: О.Г.Холод, канд. техн. наук, проф. (ДУ ім. Нобеля)
Ю. М. Головко, канд. фіз.-мат. наук, доц. (НГУ)

ЗМІСТ

ВСТУП

Як відомо, активне вивчення комплексних чисел і функцій комплексної змінної почалося ще у 18 столітті. Особливо великі заслуги найбільшого математика того часу Леонарда Ейлера (1707 – 1783), який справедливо вважається одним із творців цього розділу математики. У роботах Ейлера детально вивчені елементарні функції комплексної змінної, надано умови диференційовністі (1755) і початки інтегрального числення функцій комплексної змінної (1757). Ейлер використовував функції комплексної змінної не тільки в математичних дослідженнях. Він був першим, хто застосував їх в гідродинаміці і картографії.

Дослідження Ейлера отримали розвиток в роботах його послідовників – Коші (1789 –1857), Вейєрштрасса (1815 –1897) і Рімана (1828 – 1866). Саме їх внесок у вдосконалення і розвиток праць Ейлера дозволив оформити теорію функцій комплексної змінної в якості одного з найважливіших розділів математичного аналізу.

Апарат теорії функцій комплексної змінної застосовується при розв'язанні багатьох прикладних задач у фізиці, автоматиці, електростатиці, гідродинаміці і т.д. А при вивченні деяких диференціальних рівнянь навіть просте уявлення про комплексні числа дозволяє уникнути грубих помилок. Наприклад, для лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами характеристичними є квадратні рівняння, які в залежності від знака дискримінанта мають або різні дійсні, або дійсні кратні, або комплексні корени. Проте, зіткнувшись з від'ємним дискримінантом квадратного рівняння, студенти помилково стверджують, що відповідне рівняння не має коренів. Доводиться пояснювати, що в цьому випадку немає дійсних коренів, але є комплексні.

Мета даного посібника – дати мінімум поняття про комплексні числа і функції комплексної змінної, тобто, лише ввести читача в цей найважливіший для сучасного інженера розділ математики. Разом з тим, навіть попереднє знайомство з елементами теорії функцій комплексної змінної буде непоганою стартовою позицією для подальшого більш глибокого занурення в тему, коли виникне необхідність в їх використанні на практиці.

1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

1.1. Поняття комплексного числа.

Нагадаємо, що до **дійсних (або реальних) чисел** відносяться:

1) натуральні, або, що те ж саме, цілі додатні числа;

2) раціональні дроби вигляду $\frac{m}{n}$, де m, n – натуральні числа;

3) ірраціональні числа, тобто, такі, які не можна представити у вигляді раціонального дробу (наприклад, $\sqrt{3} \neq \frac{m}{n}$);

4) нуль;

5) від'ємні числа вигляду 1) – 3).

Звернемось до **комплексних чисел**.

Розглянемо квадратне рівняння $x^2 - 2x + 2 = 0.$

За відомою формулою, розв'язки даного рівняння мають вигляд

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1}.$$

Під квадратним коренем одержано від'ємне число. Витягти квадратний корінь не представляється можливим, якщо обмежитися тільки дійсними числами, оскільки квадрат будь-якого з них буде числом додатним. Тому до деяких пір вважали, що квадратного кореня з від'ємного числа не існує. Введемо число, яке не належить до дійсних, таке, що

$$i^2 = -1.$$

Тоді

$$i = \sqrt{-1}.$$

Число i, введене таким чином, будемо називати ***«уявною одиницею».***

Значення ***«уявної одиниці»*** у будь-якої степені можна записати через наступну формулу:

$$i^{2n}=-1,\ i^{2n+1}=(-1)^n\cdot i.$$

З використанням уявної одиниці можна витягувати корінь з будь-якого від'ємного числа

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=2\cdot\sqrt{-1}=2i\ ;\ \sqrt{-5}=\sqrt{5\cdot(-1)}=\sqrt{5}\cdot i\ .$$

В результаті отримуємо, так звані, уявні числа.
Комплексними називають числа вигляду

$$z=x+iy,$$

де x та y - дійсні числа, а $i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Числа x та y називають дійсною й уявною частинами z. Прийнято позначати їх так: $x=\operatorname{Re}z, y=\operatorname{Im}z$. (Re, Im – абревіатури від латинських слів: realis – дійсний, imagionarius – уявний). Якщо $y=0$, одержимо дійсне число x. Таким чином, дійсні числа є частинними випадками комплексних чисел. Якщо $x=0$, $z=iy$. Таки числа називають суто уявними.

Число $z=x-iy$ називають спряженим до числа $z=x+iy.$ Наприклад,

$$z=5+3i\Rightarrow\ \bar{z}=5-3i\ \text{ або }\ z=-2-4i\Rightarrow\bar{z}=-2+4i;$$

$$z=-i\Rightarrow\bar{z}=i;\quad z=7\Rightarrow\bar{z}=7;$$

1.2. Способи завдання комплексного числа . Операції з комплексними числами. Геометричне представлення комплексного числа

Алгебраїчна форма комплексного числа має вигляд

$$z=x+iy. \tag{1.1}$$

Два комплексних числа вважаються рівними, якщо співпадають їх дійсні та уявні частини. Нехай задано два числа $z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2$. Арифметичні дії з ними виконуються за наступними правилами:

$$z_1\pm z_2=x_1+i\cdot y_1\pm(x_2+i\cdot y_2)=\left(x_1\pm x_2\right)+i\cdot\left(y_1\pm y_2\right);$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+i\cdot y_1)\cdot(x_2+i\cdot y_2)=x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2\cdot i+x_2\cdot y_1\cdot i+y_1\cdot y_2\cdot i^2=$$
$$=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)+i\cdot\left(x_1y_2+x_2y_1\right)\ ;$$

Добуток спряжених комплексних чисел є дійсне число:

$$z\cdot\overline{z}=(x+i\cdot y)\cdot(x-i\cdot y)=x^2-(i\cdot y)^2=x^2+y^2.$$

Користуючись останньою рівністю, операцію ділення двох комплексних чисел будемо виконувати, множачи чисельник і знаменник на спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\cdot\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},(x_2^2+y_2^2)\neq 0.$$

Наприклад, $\frac{2+5i}{1-7i}=\frac{(2+5i)\cdot(1+7i)}{(1-7i)\cdot(1+7i)}=\frac{2+14i+5i+35i^2}{1^2+7^2}=\frac{-33+19i}{50}=-\frac{33}{50}+\frac{19}{50}i.$

Прийнято зображати комплексні числа у вигляді точок $M(x,y)$ на, так званій, комплексній площин XOY, де x –абсциса точки, а y – ордината.

Дійсне число $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ називається модулем комплексного числа $z=x+iy$. Очевидно, що $|z|$ дорівнює відстані точки $M(x,y)$ від початку координат.

Якщо ввести полярні координати (r,φ), то

$$\begin{aligned}x&=r\cos\varphi=|z|\cos\varphi,\\ y&=r\sin\varphi=|z|\sin\varphi,\end{aligned}\qquad(1.2)$$

то комплексне число z можна записати

$$z=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Таким чином, **тригонометрична форма комплексного числа** має вигляд

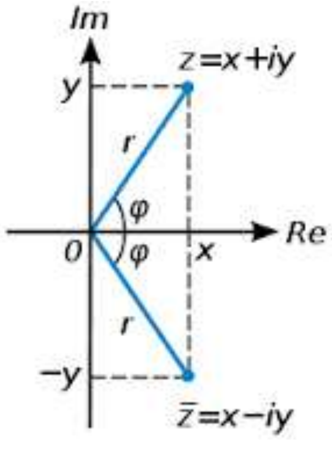

Рис.1.1

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.3}$$

де r – модуль числа z, а φ – це кут (у радіанах), який створює вектор $\overline{OM}$ з додатним напрямком осі OX (рис. 1.1).

Цей кут називають аргументом комплексного числа z і позначають так:

$\varphi = Arg\,z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in Z,$ де при $k = 0$ $\arg z$ є головне значення $Arg\,z$, таке, що $-\pi < \arg z \le \pi,$ причому

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0; \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{якщо } x < 0, y \ge 0; \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{якщо } x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0,\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

За формулою Ейлера,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.5}$$

Таким чином, будь яке комплексне число можна представити у наступній формі:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}. \tag{1.6}$$

Отже, поряд з алгебраїчною і тригонометричною, можна використовувати **показову форму комплексного числа** (1.6).

Натуральний степінь комплексного числа легко отримати, використовуючи саме цю формулу:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.7}$$

Останній результат відомий як **формула Муавра**.

Корінь ступеня *n* (*n* – ціле число) з числа $z = x + iy$ визначається за формулою:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, ..., n-1. \quad (1.8)$$

Приклад 1. Обчислити модуль, головне значення аргумента числа $z = -2 - \sqrt{12}i^{13}$. Представити його у тригонометричній та показової формі.

Розв'язання. Перетворимо дане число до алгебраїчної форми.

Оскільки $i^{13} = (i^2)^6 \cdot i = (-1)^6 \cdot i = i,$ маємо $z = -2 - \sqrt{12}i^{13} = -2 - 2\sqrt{3}i.$ Таким чином, $x = \operatorname{Re} z = -2 < 0;\ y = \operatorname{Im} z = -2\sqrt{3} < 0.$ За формулою (1.4) аргумент числа z дорівнює $\arg z = arctg\,\frac{y}{x} - \pi = arctg\sqrt{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi.$ Модуль числа z

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 4.$ Підставляючи значення аргумента й модуля у вирази

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ та $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, одержимо відповідно тригонометричну та показову форми числа z:

$$z = -2 - 2\sqrt{3}i = 4 \cdot \left(\cos(-\frac{2}{3}\pi) + i\sin(-\frac{2}{3}\pi\right), \quad z = -2 - 2\sqrt{3}i = 4 \cdot e^{-\frac{2}{3}\pi}.$$

Приклад 2. Представити число $z = \left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2$ у алгебраїчній формі.

Розв'язання. Спочатку запишемо у алгебраїчній формі числа $(i^5 + 2)$ та $(i^{19} + 1)$.

$(i^5 + 2) = (i^2)^2 \cdot i + 2 = 2 + i, \quad (i^{19} + 1) = (i^2)^9 \cdot i + 1 = 1 - i.$ Таким чином, $\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1} = \frac{2 + i}{1 - i}.$

Перетворимо останній дріб, помноживши його чисельник та знаменник на число, спряжене до знаменника, тобто на $1 + i.$ Оскільки $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, маємо:

$$\frac{2 + i}{1 - i} = \frac{(2 + i)\cdot(1 + i)}{(1 - i)\cdot(1 + i)} = \frac{2 + i + 2i - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Піднесемо одержане число до квадрата:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}i+\frac{9}{4}i^2=-2+\frac{3}{2}i.$$

Приклад 3. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3x-i)\cdot(2+i)+(x-iy)\cdot(1+2i)=5+6i.$$

Розв'язання. Представимо ліву частину рівняння у алгебраїчній формі:

$$(3x-i)\cdot(2+i)+(x-iy)\cdot(1+2i)=(6x-2i+3ix+1)+(x-iy+2ix+2y)=$$
$$=(7x+2y+1)+i\cdot(5x-y-2).$$

Далі залишається прирівняти дійсні та уявні частини відповідно до умови і розв'язати систему $\begin{cases}7x+2y+1=5,\\ 5x-y-2=6.\end{cases}$ Звідки маємо $\begin{cases}x=\dfrac{20}{17},\\ y=-\dfrac{36}{17}.\end{cases}$

Приклад 4. Обчислити $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою Муавра. Маємо $z=-1+i\sqrt{3},\ n=60,\ r=\sqrt{(-1)^2+3}=2.$ Далі, оскільки $x<0, y>0,$ то

$$\varphi=\pi+arctg\frac{y}{x}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi.$$

Таким чином,

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}=2^{60}\left(\cos(60\cdot\frac{5}{6}\pi)+i\sin(60\cdot\frac{5}{6}\pi)\right)=2^{60}\left(\cos 50\pi+i\sin 50\pi\right)=2^{60}.$$

Приклад 5. Знайти всі значення $\sqrt[4]{1-i}.$

Розв'язання. Скористаємося формулою (1.8):

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), k=0,1,2,\dots,n-1.$$

У нашому випадку $n=4,\ z=1-i,\ r=|1-i|=\sqrt{2},\ \varphi=arctg\dfrac{y}{x}=-\dfrac{\pi}{4},\ k=0,1,2,3.$

Отже, маємо:

$$z_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\right), (k=0);\ z_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right),\ (k=1);$$

$$z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16} + i\sin\frac{15\pi}{16}\right), (k=2);\ z_4 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16} + i\sin\frac{23\pi}{16}\right),\ (k=3).$$

Приклад 6. Виразити $\sin 3\varphi$ та $\cos 3\varphi$ через $\sin\varphi$ та $\cos\varphi.$

Розв'язання. За формулою Муавра , при $n=3,\ r=1$ одержимо:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

З іншого боку, за формулою бінома Ньютона:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + 3\cos\varphi\cdot(i\sin\varphi)^2 + i^3\sin^3\varphi =$$
$$= (\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi) + i\cdot(3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

Прирівнюючи праві частини двох останніх рівностей, маємо:

$$cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi,\ \ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

1.3. Лінії та множини у комплексній площині

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 7. Встановити, яка лінія представлена рівнянням $|z - z_0| = R$?

Розв'язання.

Перший спосіб. За умовою задачі рівняння визначає геометричне місце точок площини, які знаходяться на відстані R від точки z_0. Тобто маємо окружність з центром у точці z_0 радіуса R .

Другій спосіб. Нехай $z = x + iy,\ z_0 = x_0 + iy_0.$ Тоді $z - z_0 = x - x_0 + i\cdot(y - y_0)$, а $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Рівність $|z - z_0| = R$ після зведення до квадрата набуває вигляду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, тобто визначає рівняння кола з центром у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ (або $C(x_0, y_0)$) радіуса R (рис. 1.2).

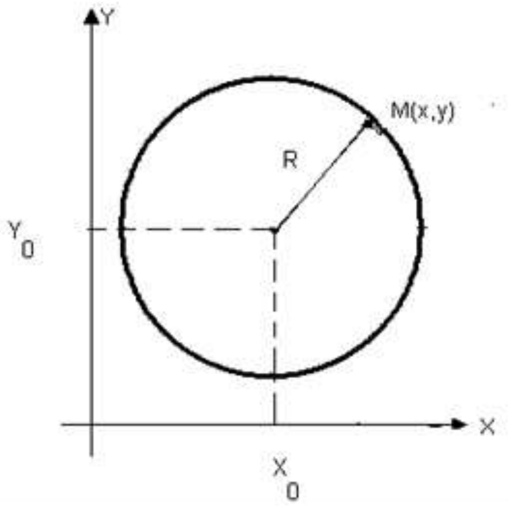

Рис. 1.2

Приклад 8. Знайти множину точок на комплексній площині, яка визначається співвідношенням

$$|z-i|+|z+i|<4.$$

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$. Тоді $|z-i| = |x+i(y-1)| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$, а $|z+i| = |x+i(y+1)| = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$. Таким чином, дане співвідношення набуває вигляду $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}<4$. Позбавляючись від ірраціональності, отримаємо $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}<1$. Ця нерівність описує сукупність точок площини, розташованих усередині області, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

Приклад 9. Яка лінія визначається наступним рівнянням $\mathrm{Re}\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$?

Розв'язання. Нехай $z = x+iy$. Отже, $\mathrm{Re}\frac{1}{z}=\mathrm{Re}\frac{1}{x+iy}=\mathrm{Re}\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

Перетворимо рівність $\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{a}$. Одержимо $x^2+y^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2-\frac{a^2}{4}=0$.

Або $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}=\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Тобто дана лінія – це коло з центром у точці $C\left(\frac{a}{2},0\right)$ та радіусом $\frac{a}{2}$.

2. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Визначення. Якщо кожному комплексному числу $z = x + iy$, що належить до області D, за деяким правилом поставлене у відповідність одне або декілька комплексних чисел $w = u + iv$, то кажуть, що на множині D визначена функція, і записують це так:

$$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y),$$

де $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Точку або точки w, що відповідають даній точці z на D, називають образом точки z, а функцію $w = f(z)$ – відображенням.

Деякі елементарні функції комплексної змінної визначаються наступним чином:

а) лінійна функція $w = az + b$;

б) ступенева функція $w = z^n$;

в) показова функція $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^z(\cos y + i \sin y)$;

г) логарифмічна функція $w = Lnz = \ln|z| + i \cdot (\arg z + 2k\pi)$, $k \in Z$.

Вираз $\ln|z| + i \cdot \arg z$ називається головним значенням логарифмічної функції і позначається через $\ln z$, тобто $Lnz = \ln z + 2k\pi i$;

д) загальна ступенева функція

$w = z^a = e^{aLnz}$ (z та a – будь-які комплексні числа). Головне значення z^a дорівнює: $z^a = e^{a \ln z}$.

е) тригонометричні функції

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};\ tgz = \frac{\sin z}{\cos z};\ ctgz = \frac{\cos z}{\sin z};$$

ж) гіперболічні функції

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2};\ chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2};\ thz = \frac{shz}{chz};\ cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Мають місце співвідношення

$$shiz = i \cdot \sin z,\ chiz = \cos z,\ \sin iz = i \cdot shz,\ chz = \cos iz.$$

з) Зворотні тригонометричні функції

$$Arc\sin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),\ Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),\ Arctgz = -\frac{i}{2} Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Звернемось до прикладів.

Приклад 10. Знайти дійсні та уявні частини функцій:

1) $w = \dfrac{iz+1}{1+\bar{z}}$, 2) $w = shz$.

Розв'язання. 1). Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тоді

$$u+iv=\frac{i\cdot(x+iy)+1}{1+(x-iy)}=\frac{(ix+(1-y))\cdot((1+x)+iy)}{((1+x)-iy)\cdot((1+x)+iy}=\frac{(1+x-y-2xy)+i\cdot(y-y^2+x^2+x)}{(1+x)^2+y^2}.$$

Відокремивши дійсну частину функції від уявної, одержимо:

$$u(x,y)=\frac{(1+x-y-2xy)}{(1+x)^2+y^2};\quad v(x,y)=\frac{x+y+x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}.$$

2) Оскільки $shz = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, можна записати

Остаточно маємо: $u(x,y) = \operatorname{Re} shz = \cos y \cdot shx, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} shz = \sin y \cdot chx.$

Приклад 11. Обчислити $\sin i$.

Розв'язання. За визначенням $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, тому

$$\sin i=\frac{e^{ii}-e^{-ii}}{2i}=\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=i\cdot\frac{e-e^{-1}}{2}=i\cdot sh1.$$

На відміну від тригонометричних функцій дійсної змінної модулі Функцій $\sin z$ та $\cos z$ можуть бути більше одиниці. Дійсно,

$$|\sin i|=|i\cdot sh1|\le\frac{e\ -e^{-1}}{2}\approx 1{,}13>1.$$

Приклад 12. Обчислити функцію $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою $z^a = e^{aLnz}$. Оскільки у нашому випадку $z = 1 - i\sqrt{3}$; $a = \sqrt{2}$, маємо:

$$|z|=\left|1-\sqrt{3}\right|=2,\ \varphi=\arg\left(1-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3};\ Lnz=Ln\left(1-\sqrt{3}\right)=\ln 2+i\cdot\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right);\ k\in Z.$$

Остаточно одержимо

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}Ln\left(1-i\sqrt{3}\right)}=e^{\sqrt{2}(\ln 2+i(-\frac{\pi}{3}+2k\pi))}=e^{\sqrt{2}\ln 2}\cdot e^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}k\pi\right)}=$$

$$=e^{\sqrt{2}\ln 2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}k\pi\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}k\pi\right)\right).$$

Головне значення степеня (при $k=0$) дорівнює $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 2}.e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{2}}$.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $\cos z = 4$.

Розв'язання. За визначенням $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, тому дане рівняння рівносильне рівнянню $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 4$, або, після перетворень, наступному рівнянню: $e^{2iz} - 8e^{iz} + 1 = 0$. Це квадратне рівняння відносно e^{iz}. Розв'язуючи його, одержуємо $e^{iz} = 4 \pm \sqrt{15}$. Логарифмуючи цей вираз, одержуємо

$iz\ln e = Ln\left(4\pm\sqrt{15}\right)$. Тобто $z = \dfrac{1}{i}Ln\left(4\pm\sqrt{15}\right) = i\left(\ln\left(4\pm\sqrt{15}\right) + 2k\pi i\right)$.

Враховуючи, що $\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(4-\sqrt{15}\right) = 1$, маємо: $\ln\left(4+\sqrt{15}\right) = -\ln\left(4-\sqrt{15}\right)$, а тому розв'язок рівняння $\cos z = 4$ можна записати у вигляді

$$z = \pm i\ln\left(4+\sqrt{15}\right) + 2k\pi \quad \left(k \in Z\right).$$

Надаючи k значення $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, одержимо безліч розв'язків даного рівняння.

3. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. УМОВИ КОШІ-РІМАНА

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена в околі точки z_0.

Похідною функції $f(z)$ в точці z_0 називається границя

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left(z_0+\Delta z\right) - f\left(z_0\right)}{\Delta z} = f'\left(z_0\right),$$

коли Δz довільним чином прямує до нуля.

Якщо функція диференційована не тільки в даній точці, а й в деякому околі цієї точки, то вона називається аналітичною в цій точці.

Функція, аналітична у всіх точках деякої області, називається аналітичною в цій області.

Модуль і аргумент похідної в точці z_0, де, $f'(z_0) \neq 0$, має наступний геометричний сенс: $k=\left|f'(z_0)\right|$ – коефіцієнт розтягування в точці z_0 при відображенні $w=f(z)$, а $\varphi = Arg\, f'(z_0)$ дорівнює куту, на який треба повернути дотичну у точці z_0, щоб одержати напрямок дотичної у відповідній точці $w_0=f(z_0)$ до образу даної кривої при відображенні $w=f(z)$.

Основні властивості похідних функцій комплексної змінної аналогічні відповідним властивостям похідних функцій дійсної змінної.

Для того, щоб функція $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ була диференційована в точці $z=z_0=x_0+iy_0$, необхідно і достатньо, щоб дійсні функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ були диференційовані в точці (x_0,y_0) і задовольняли умовам:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

які називаються умовами Коші-Рімана. При виконанні цих умов похідну можна записати наступним чином:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Формули диференціювання функцій комплексної змінної аналогічні відповідним формулам диференціювання функцій дійсної змінної.

Якщо функція $f(z)=u+iv$ аналітична в деякій області *D*, то її дійсна і уявна частини задовольняють рівнянню Лапласа, а саме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ та } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Розв'язки рівняння Лапласа називаються гармонійними функціями.

Дві гармонійні функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$, що задовольняють умовам Коші-Рімана, називаються спарованими. Знаючи, наприклад, дійсну частину аналітичної функції, можна відновити цю функцію з точністю до довільної сталої.

Приклад 14. Встановити, що функція $f(z)=z\cdot \mathrm{Re}\, z$ має похідну тільки в точці $z=0$. Чи є вона аналітичній в цій точці?

Розв'язання.

Перший спосіб.

За визначенням $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$. Для даної функції знайдемо

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)\operatorname{Re}(z+\Delta z)-z\operatorname{Re}z}{\Delta z}=\frac{z\operatorname{Re}z+\Delta z\operatorname{Re}z+z\operatorname{Re}\Delta z+\Delta z\operatorname{Re}\Delta z-z\operatorname{Re}z}{\Delta z}=$$

$$=\frac{z\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}+\operatorname{Re}\Delta z+\operatorname{Re}z.$$

Але при довільному прямуванні Δz до нуля дріб $\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}$ не має границі (при $\Delta y=0$ границя дорівнює 1, а при $\Delta x=0$ границя дорівнює нулю). Таким чином, похідна не існує.

В точці $z=0$ $\Rightarrow \operatorname{Re}\Delta z=\Delta x=0$. Отже похідна $f'(0)$ існує і дорівнює нулю.

При цьому дана функція не є аналітичною, оскільки не існує околу точки $z=0,$ в якому вона має похідні.

Другій спосіб.

Маємо $f(z)=z\operatorname{Re}z=(x+iy)\cdot x=x^2+ixy$. Таким чином, $u(x,y)=x^2, v(x,y)=xy.$

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана:

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=y, \frac{\partial v}{\partial y}=x.$ Ясно, що ці умови задовольняються лише в точці $z=0.$ Отже, функція $f(z)=z\cdot\operatorname{Re}z$ диференційована тільки в цій точці і не є аналітичною.

Приклад 15. Довести, що функція $f(z)=e^{2z}$ аналітична на всій комплексній площині та знайти її похідну.

Розв'язання. За формулою Ейлера,

$$e^{2z}=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y).$$

Звідки $u(x,y)=e^{2x}\cos 2y, v(x,y)=e^{2x}\sin 2y.$

Знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y, \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\sin 2y, \frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\sin 2y, \frac{\partial v}{\partial y}=2e^{2z}\cos 2y.$$

Отже, умови Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ виконуються при будь-

яких

x та y, тобто дана функція є аналітичною на всій комплексній площині. Застосовуючи формулу $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, одержимо шукану похідну:

$$\left(e^{2z}\right)'=2e^{2x}\cos 2y+i\,2e^{2x}\sin 2y=2e^{2x}\left(\cos 2y+i\sin 2y\right)=2e^{2z}.$$

Приклад 16. Знайти аналітичну функцію, якщо її дійсна частина дорівнює $u(x,y)=2e^{x}\sin y+3x-2y$ та виконується умова $f(0)=0$.

Розв'язання. За умовою, $u(x,y)=2e^{x}\sin y+3x-2y$. Треба знайти уявну частину функції, тобто $v(x,y)$.

Спочатку перевіримо, чи є функція $u(x,y)$ гармонійною, що має бути справедливим для аналітичних функцій. Для цього треба встановити, що вона задовольняє рівнянню Лапласа. Шукаємо похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{x}\sin y+3,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2e^{x}\cos y-2,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2e^{x}\sin y,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2e^{x}\sin y.$$

Очевидно, що функція гармонійна, оскільки $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Шукаємо функцію $v(x,y)$, використовуючи те, що вона є спряженою до $u(x,y)$. З умов Коші-Рімана маємо: $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2e^{x}\cos y+2,$

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2e^{x}\sin y+3.$ Інтегруючи першу з цих рівностей, одержимо

$$v(x,y)=\int\left(-2e^{x}\cos y+2\right)dx=-2e^{x}\cos y+2x+\varphi(y).$$

Зверніть увагу, що замість довільної сталої інтегрування записана невідома функція $\varphi(y)$. Дійсно, шукана функція залежить від двох змінних x та y, тому інтегрування по x відновлює функцію $v(x,y)$ лише з точністю до цієї функції $\varphi(y)$. Для визначення $\varphi(y)$ треба знайти $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2e^{x}\sin y+\varphi'(y)$ і прирівняти цю похідну до виразу у правій частині другої з умов Коші-Рімана

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \sin y + 3.$$

Одержуємо: $2e^x \sin y + \varphi'(y) = 2e^x \sin y + 3.$ Звідки маємо $\varphi'(y) = 3.$ Отже, $\varphi(y) = 3y + C.$ Таким чином, $v(x, y) = -2e^x \cos y + 2x + 3y + C.$ Шукана функція з точністю до довільної сталої має вигляд:

$$f(z) = u + iv = 2e^x \sin y + 3x - 2y + i(-2e^x \cos y + 2x + 3y + C).$$

Довільну сталу C знайдемо, використавши умову $f(0) = 0,$ тобто $2e^0 \sin 0 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + i(-2e^0 \cos 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + C) = 0.$ Саме звідси $C = 2.$

Остаточно

$$f(z) = 2e^x \sin y + 3x - 2y + i(-2e^x \cos y + 2x + 3y + 2) = -2ie^z + (2i + 3)z + 2i.$$

Приклад 17. Показати, що функція $u(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1$ не є дійсною частиною ніякої аналітичної функції.

Розв'язання. Достатньо переконатися, що дана функція не задовольняє рівнянню Лапласа. Дійсно, для неї $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \neq 0.$ Отже, $u(x, y)$ не є гармонійною функцією.

4. ВІДОБРАЖЕННЯ

Однозначну функцію $f(z)$ з областю визначення на деякій множині E комплексної площини (z) можна розглядати як відображення множини E на деяку множину K площині (w) (рис.4.1) , яка представляє собою сукупність значень $f(z),$ що відповідають всім $z \in E$.

Сукупність значень, що приймає функція $f(z)$ у точках множини $E,$ називається образом множини E при відображенні $w = f(z).$

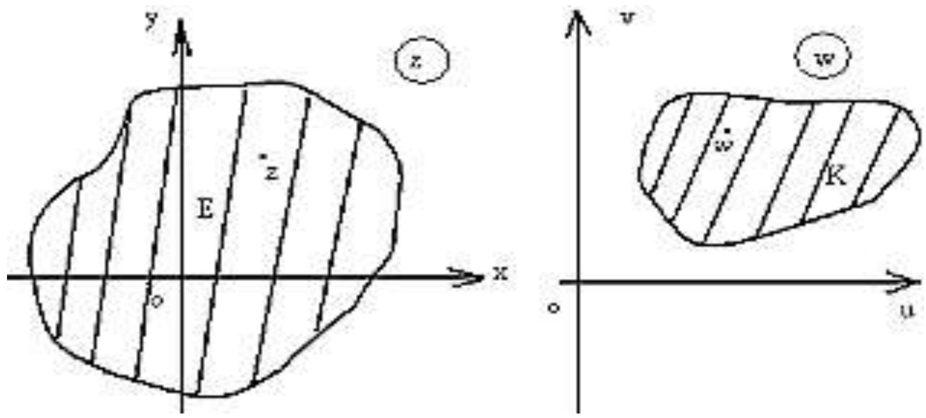

Рис. 4.1

Взаємно однозначне відображення області E площини (z) на область K площини (w) називається конформним, якщо в кожній точці області E воно має властивості збереження кутів і постійності розтягувань.

Для того, щоб відображення області E, що задається функцією $w = f(z)$, було конформним, необхідно і достатньо, щоб $f(z)$ була однолістною (тобто в різних точках області E приймала різні значення) і аналітичною в області функцією, причому $f'(z) \neq 0$ всюди в E.

Нехай у площині (z) крива задана рівнянням $F(x, y) = 0.$ Щоб знайти рівняння образу $\Phi(u, v) = 0$ цієї кривої в площині (w) при відображенні за допомогою функції $w = f(z) = u + iv$, потрібно виключити x і y з рівнянь

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Якщо крива задана у параметричній формі, тобто $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ або

$z = z(t) = x(t) + i\,y(t),$ то параметричні рівняння її образу при відображенні

$w = f(z) = u + iv$ мають вигляд: $\begin{cases} u = u\big[x(t), y(t)\big] = u(t), \\ v = v\big[x(t), y(t)\big] = v(t). \end{cases}$

Приклад 18. Яка лінія на площині (w) одержується при відображенні $w = z^3$ прямої $y = x$?

Розв'язання. Знайдемо дійсну та уявну частини функції $w = z^3$. Якщо

$z = x + iy$, то $w = u + iv = (x+iy)^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\cdot\left(3x^2y - y^3\right).$

Звідси $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$. Виключивши x і y з рівнянь

$$\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2, \\ v = 3x^2y - y^3, \\ \quad y = x, \end{cases}$$ маємо $u = -2x^3$, $v = 2x^3$, тобто $u = -v.$

Отже, функція $w = z^3$ відображає пряму $y = x$ площини (z) у пряму $u = -v$ площини (w).

Приклад 19. Знайти образ лінії $z = -1 + iy$ за допомогою функції $w = e^z$.

Розв'язання. За формулою Ейлера, $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$,
Тобто

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x\cos y, \\ v(x,y) = e^x\sin y. \end{cases}$$

Оскільки для точок лінії $z = -1 + iy$ $x = -1, -\infty < y < \infty,$

одержимо $$\begin{cases} u(x,y) = e^{-1}\cos y, \\ v(x,y) = e^{-1}\sin y. \end{cases}$$

Або, після перетворень, $u^2 + v^2 = \left(\dfrac{1}{e}\right)^2$, тобто шуканим образом даної лінії є окружність.

5. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ТЕОРЕМА ТА ФОРМУЛА КОШІ

Нехай $f(z) = u + iv$ – неперервна функція комплексної змінної z, що визначена в області D, а C – гладка крива, задана рівнянням $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, яка лежить в області D, або, що те ж саме,

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta).$$

Інтеграл від функції $f(z)$ вздовж кривої C визначається наступним чином:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) = \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}dt + i\cdot$$

$$\cdot\int_\alpha^\beta \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}dt.$$

Враховуючи, що $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, $u[x(t), y(t)] = u(z(t))$, $v[x(t), y(t)] = v(z(t))$, маємо:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

Теорема Коші. *Якщо функція* $f(z)$ *аналітична в однозв'язній області* D, а C *– будь-яка кусочно-гладка замкнута крива приналежна* D, *то*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Якщо функція $f(z)$ *аналітична в однозв'язній області* D, а C *– будь-яка кусочно-гладка крива, приналежна області* D, *що з'єднує точки* z_0 та z, тоді $\int_\alpha^\beta f(z)dz = F(z) - F(z_0)$,

де $F'(z) = f(z)$.

Якщо функція $f(z)$ *аналітична в замкнутій області* D *з кусково-гладкою межею* C, *то для будь-якої внутрішньої точки* z_0 *області* D *має місце формула Коші*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

і інтегрування виконується у додатному напрямку (проти годинникової стрілки).

Звернемось до прикладів.

Приклад 20. Обчислити інтеграл $\int_C |z|dz$, де C – відрізок прямої, що направлений від точки $z_0 = 0$ у точку $z_1 = 2 + i$.

Розв'язання. Рівняння прямої, що з'єднує точки O та $2 + i$, має вигляд

$$y = \frac{1}{2}x.$$

Дійсно,

$$z_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0, y_0 = 0; z_1 = 2 + i \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 1.$$

Рівняння прямої, що проходе через дві дані точки:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow \frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{x - 0}{2 - 0} \Rightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Тоді

$$dy = \frac{1}{2}dx.$$

Для даного приклада $u = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, v = 0.$ Таким чином,

$$\int_C |z|dz = \int_C \sqrt{x^2 + y^2}dx + i\int_C \sqrt{x^2 + y^2}dy = \int_0^2 \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}}dx + i\int_0^2 \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2}xdx =$$

$$= \left(1 + \frac{i}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^2 xdx = \frac{\sqrt{5}}{2}(2 + i).$$

Якщо лінія C задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t),$ а начальна та кінцева точки лінії відповідають значенням параметра $t = t_0, t = t_1,$ то

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)]z'(t)dt, \text{ де } z(t) = x(t) + iy(t).$$

Приклад 21. Обчислити $\int_C \operatorname{Re} z dz,$ де C – півколо $|z| = 1, 0 \le argz \le \pi$ (початок шляху знаходиться у точці $z = 1$).

Розв'язання. Перепишемо рівняння лінії C у параметричному вигляді, поклавши $x = \cos t, y = \sin t,$ тоді $z = \cos t + i\sin t,$ а $dz = (-\sin t + i\sin t)dt.$ Параметр t, як випливає з умови, змінюється від 0 до $\pi.$ Таким чином,

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^{\pi} \cos t \cdot (-\sin t + i \cos t) dt = -\int_0^{\pi} \cos t \sin y dt + i \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2t dt +$$

$$+ i\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{4}\cos 2t \Big|_0^{\pi} + i \cdot \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{i\pi}{2}.$$

Приклад 22. Обчислити $\int_C z \operatorname{Re} z dz,$ де C – дуга параболи $y = x^2$, що з'єднує точки $z_0 = 0$ і $z_1 = 1+i.$

Розв'язання. Параметричне рівняння параболи $y = x^2$ має вигляд: $x = t,\ y = t^2$, тому $z = x + iy = t + it^2,\ dt = (1 + i \cdot 2t) dt,$ параметр t змінюється від 0 до 1. Маємо

$$\int_C z \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 (t + it^2) \cdot t \cdot (1 + i\, 2t) dt = \int_0^1 (t^2 + 3it^3 - 2t^4) dt = \left[\frac{t^3}{3} + 3i\frac{t^4}{4} - \frac{2}{5}t^5\right]_0^1 = -\frac{1}{15} + \frac{3}{4}i.$$

Контурний інтеграл від аналітичної функції в однозв'язній області дорівнює приросту первісної цієї функції на шляху інтегрування:

$$\int_{z_0}^{z} f(z) dz = F(z) - F(z_0).$$

Приклад 23. Обчислити $\int_0^{1+i} z^2 dz.$

Розв'язання. Оскільки функція $f(z) = z^2$ аналітична на всій площині, то, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, одержимо

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{1 + 3i - 3 - i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

Для будь-якої аналітичної функції $f(z)$ в деякій однозв'язній області D інтеграл $\int_C f(z) dz,$ що береться по будь-якому кусково-замкненому контуру C, розташованому в області D, дорівнює нулю.

Приклад 24. Обчислити інтеграл $\int\limits_C \frac{dz}{z-4}$, де C – еліпс $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

Розв'язання. Підінтегральна функція є аналітичною в області, що обмежена еліпсом, а тому $\int\limits_C \frac{dz}{z-4} = 0.$

Якщо функція** $f(z)$ **аналітична у замкненій області** $\overline{D}$ **(однозв'язній чи багатозв'язній) з кусково-гладкою межею** C (рис. 5.1) **, то значення функції** $f(z)$ **у будь-якій точці області** D **можна обчислити, знаючи тільки значення на межі** C **цієї області за формулою Коші:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

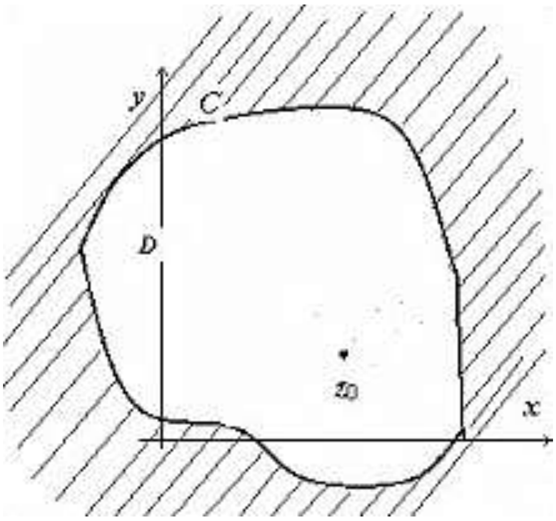

Рис. 5.1

Приклад 25. Обчислити інтеграл $\int\limits_C \frac{e^z dz}{z(z-3)}$, де C – окружність радіуса $\frac{3}{2}$ з центром у точці 2.

Розв'язання. Функція $f(z) = \frac{e^z}{z}$ аналітична у колі $|z-2| = \frac{3}{2}$, тому, використовуючи формулу Коші, маємо:

$$\oint_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z(z-3)}dz = \oint_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\frac{e^z}{z}}{z-3}dz = 2\pi i \cdot \left[\frac{e^z}{z}\right]_{z_0=3} = 2\pi i \cdot \frac{e^3}{3} = \frac{2}{3}\pi e^3 i.$$

Приклад 26. Обчислити $\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}dz}{z(z-1)}$.

Розв'язання. В області, обмеженій окружністю $|z-2|=3$, маємо дві точки $z=0,\ z=1$, у яких знаменник інтегральної функції дорівнює нулю (рис. 5.2).

Так що безпосередньо застосувати формулу Коші не представляється можливим. За допомогою розкладання підінтегральної функції представимо даний інтеграл у вигляді суми. Для цього використаємо, що

$$\frac{1}{z^2-z} = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1)+Bz}{z(z-1)}.$$

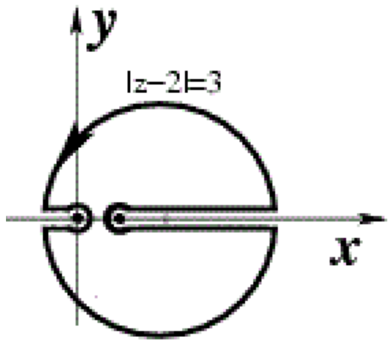

Рис. 5.2

Для знаходження невизначених коефіцієнтів маємо рівняння $1 = A(z-1)+Bz$. Нехай $z=0,$ тоді $A=-1$. Нехай $z=1,$ тоді $B=1$. Підставивши знайдене розкладання до даного інтеграла, приведемо його до алгебраїчної сумі двох таких інтегралів, до яких застосування формули Коші вже можливо. Маємо

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}dz}{z(z-6)} = \oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z-1}dz - \oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z}dz = 2\pi i \cdot \left[e^{z^2}\right]_{z_0=1} - 2\pi i \cdot \left[e^{z^2}\right]_{z_0=0} = \pi i e^1 - \pi i =$$

$$= \pi i(e-1).$$

6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання1. Записати в алгебраїчній формі:

1. $\left(3-2i^{7}\right)^{2}+\dfrac{2-3i}{1+2i}-i^{271}$; 2. $\left(2+5i^{3}\right)^{2}+\dfrac{1+i}{-4+3i}+i$

3. $\left(\dfrac{i^{5}+2}{i^{19}+1}\right)^{2}+(i+3)\cdot(i-2)$. 4. $(4-9i)^{2}-i^{873}\cdot\frac{1}{(1-4i)^{2}}$.

5. $\left(2-3i^{7}\right)^{2}+\dfrac{4-3i}{1+2i}\cdot i^{423}$. 6. $7i+\dfrac{2-4i}{-3+i}-i^{347}\cdot(2-i)^{2}$.

7. $\left(4-3i^{5}\right)^{2}-\dfrac{1+2i^{3}}{4+i}\cdot i^{423}$. 8. $3i-\dfrac{5-5i}{(-7+i)^{2}}+i^{47}\cdot(-2+i)^{2}$.

9. $i+\dfrac{1-5i}{7-i^{3}}-i^{77}\cdot(-2+i)^{3}$. 10. $\left(5+3i^{5}\right)^{2}-\dfrac{3+2i}{4-i}\cdot i^{23}$

11. $9i-\dfrac{3+5i}{-7+i}+i^{477}\cdot(-2+i)^{2}$. 12. $\dfrac{1}{1-2i}+\dfrac{1}{3+i}-i^{423}$.

13. $\dfrac{8+i}{7-i}+i^{83}\cdot(4-i)^{2}$. 14. $\left(1+4i^{5}\right)^{2}-\dfrac{4-2i}{4+i^{3}}\cdot i^{323}$.

15. $9i-\dfrac{3+5i}{-7+i}+i^{477}\cdot(-2+i)^{2}$. 16. $\left(2+5i^{5}\right)^{2}+\dfrac{1+2i}{2+i}\cdot i^{235}$.

17. $i+\dfrac{1+5i}{-3+2i}+i^{77}\cdot(2-i)^{2}$. 18. $-i+\dfrac{1+3i}{4+i^{3}}+i^{47}\cdot(-3-i)^{2}$.

19. $\left(5+3i^{5}\right)^{2}-\dfrac{3+2i}{4-i}\cdot i^{23}$ 20. $9i-\dfrac{3+5i}{-7+i}+i^{477}\cdot(-2+i)^{2}$.

21. $\dfrac{1}{1-2i}+\dfrac{1}{3+i}-i^{43}$. 22. $\dfrac{8+2i}{7+i}+i^{13}\cdot(4-i)^{2}$. 23. $\left(1-3i^{5}\right)^{2}-\dfrac{4+5i}{5+i^{3}}\cdot i^{33}$.

24. $\left(2+5i^{5}\right)^{2}+\dfrac{1+2i}{2+i}$. 25. $19i-\dfrac{3+5i}{-7-i}+i^{77}\cdot(1+i)^{2}$.

Завдання 2. Знайти множину точок та побудувати її на площині:

1. $|z-2|\geq 1$; 2. $|Z+4|\leq 4$; 3. $\operatorname{Im}Z\leq 1$. 4. $|Z|\geq 2$. 5. $\arg(Z)=\dfrac{\pi}{6}$;

6. $1 \le |Z| \le 2$. 7. $\frac{\operatorname{Re} Z}{\operatorname{Im} Z} = 3$. 8. $\frac{\pi}{6} \le \arg Z \le \frac{\pi}{4}; |Z| \le 2$. 9. $|Z| \ge 1; \arg Z = \frac{\pi}{3}$.

10. $\frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = 5$. 11. $|Z - 2 + i| = 2$. 12. $|z - 2| \ge 1;$ 13. $|Z + 4| \le 4;$

14. $\arg Z = \pi/4;$ 15. $1 \le |Z| \le 2$. 16. $|\operatorname{Re} Z| \le 2$. 17. $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}; 1 \le |Z| \le 2$.

18. $\frac{\pi}{6} \le \arg Z \le \frac{\pi}{4}, |Z| = 2$. 19. $\arg Z = \pi/4; 1 \le |Z| \le 2$.

20. $1 \le |Z| \le 2, \frac{\pi}{6} \le \arg Z \le \frac{\pi}{3}$. 21. $\operatorname{Re} Z \ge 2$. 22. $|Z| = \operatorname{Re} Z$.

23. $\arg Z = \pi/4; 1 \le |Z| \le 2$. 24. $\frac{\operatorname{Re} Z}{\operatorname{Im} Z} = -1$. 25. $|Z| \le 1; \arg Z = \frac{\pi}{6}$.

Завдання 3. Виконати обчислення:

1. $\sqrt[3]{-8i}$. 2. $\sqrt[4]{16i}$ 3. $\sqrt[4]{4+2i}$. 4. $\frac{(2+5i)^{11}}{(9-i)^7 \cdot (-3+2i)^3}$. 5. $\frac{(\sqrt{3} \cdot i)^8}{(7-4i)^3 \cdot (-3-i)^6}$.

6. $\frac{(7-2i)^{14}}{(-1+i)^8 \cdot (2-5i)^7}$. 7. $\frac{(3-i)^9 \cdot (\sqrt{3}+i)^6}{(-6-9i)^{10}}$. 8. $\sqrt[4]{-1}$. 9. $\frac{(1-\sqrt{3} \cdot i)^6}{(1+4i)^3 \cdot (3+i)^4}$.

10. $\frac{(1-\sqrt{3} \cdot i)^6}{(1+4i)^3 \cdot (3+i)^4}$. 11. $\sqrt[3]{8i}$. 12. $\sqrt[4]{81i}$. 13. $\sqrt[4]{64i}$. 14. $\sqrt[3]{-3}$.

15. $\sqrt{1-i}$. 16. $\frac{(-5+7i)^4}{(-2-3i)^5 \cdot (1-i)^3}$. 17. $\sqrt[3]{27i}$. 18. $\frac{(1-5i)^4}{(-2-i\sqrt{3}) \cdot (1-2i)^5}$.

19. $\frac{(7-4i)^5}{(-2-i)^6 \cdot (1+i)^2}$. 20. $\frac{(\sqrt{2i})^5}{(6+7i)^3 \cdot (-2-3i)^4}$. 21. $\sqrt[4]{-i}$. 22. $\frac{(2+3i)^5}{(2+i\sqrt{3}) \cdot (1+2i)^6}$.

23. $\sqrt[6]{1+\sqrt{3}i}$. 24. $\sqrt[3]{9}$. 25. $\sqrt[5]{1+\sqrt{3}i}$.

Завдання 4. Відновити аналітичну функцію f(z), якщо

1. $U(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, f(0) = 0;$ 2. $U(x,y) = x^2 - y^2 + 2x, f(i) = 2i - 1$.

3. $U(x,y) = arctg\,\frac{y}{x}$. 4. $U(x,y) = x^2 - y^2 + 2x, f(1) = 0;$ 5. $V(x,y) = 2e^x \sin y$.

6. $U(x,y) = x^2 - y^2 + 2x, f(1) = 0;$ 7. $V(x,y) = 5x^2 + 3xy - 5y^2, f(1-i) = 4 - 3i$.

8. $U(x,y) = 2xy + 3$. 9. $U(x,y) = x^3 - 3y^2x + 2, f(0) = 2 + i$.

10. $U(x,y)=x^2-y^2+xy,\ f(0)=0;$ 11. $U(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2},\ f(1)=6+i.$ 12. $U(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y);\ f(0)=0;$ 13.U(x,y)=2y-$\frac{x}{x^2+y^2}$; f(3i)=6-i.

14. $U(x,y)=2xy+3,$ 15. $V(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}-2y;\ f(1)=0.$

16. $U(x,y)=arctg\frac{y}{x}-6y,\ f(1)=5i.$ 17. $U(x,y)=x^3-3xy^2,\ f(1)=0.$

18. $U(x,y)=2e^x\sin y+3x-2y,\ f(0)=0.$ 19. $U(x,y)=x^2-y^2+3x+y,\ f(0)=i.$

20. $U(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^2,\ f(0)=0.$

21. $U(x,y)=2e^x\cos y,\ f(0)=2(1+i).$ 22. $U(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y);\ f(0)=0;$

23. $V(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2},\ f(1)=i.$ 24. $V(x,y)=x^2-y^2+2x,\ f(1)=0;$

25. $V(x,y)=x^2-y^2+2x,\ f(0)=1.$

Завдання 5 . Розв'язати рівняння (1-15) або обчислити (16-25):

1. $SinZ=3.$ 2. $tgz=i.$ 3. $4\cos z=5.$ 4. $ctgz=-i.$ 5. $e^z+i=0.$
6. $tgz=\frac{5}{3}i.$ 7. $\ln(i-z)=1.$ 8. $chz=0.5.$ 9. $\sin z+i=0$
10. $shz=1.$ 11. $ctgz=1-i.$ 12. $2\cos z-3=0.$ 13. $tgz=\frac{1}{3}i.$
14. $\ln(1-z)=i.$ 15. $e^{z+i}+1=0.$ 16. $1^{1-i}.$ 17. $(1-i)^{1+i}.$ 18. $e^{-1+\pi i}.$
19. $(-1)^i.$ 20. $sh(\pi i).$ 21. $e^{-1+i}.$ 22. $e^{2+i}.$ 23. $1^{1-\sqrt{3}i}.$
24. $(1+i)^{\sqrt{3}+i}.$ 25. $\cos(\pi-i).$

Завдання 6 . Перевірити, чи є дана функція аналітичною і, якщо це справедливо, знайти її похідну:

1. $W=ze^z.$ 2. $w=\frac{1}{z}.$ 3. $w=\frac{1}{z-i}.$ 4. $w=e^{z^2}.$ 5. $w=y+xi.$
6. $w=(\operatorname{Re}z)^2+i(\operatorname{Im}z)^2.$ 7. $w=e^{5z}.$ 8. $w=e^{2z}+z$ 9. $w=e^{2z}-z^2.$
10. $w=\bar{z}^3.$ 11. $W=ze^z.$ 12. $w=\frac{1}{\bar{z}}.$ 13. $W=\bar{z}^2.$ 14. $W=e^{1-z}.$
15. $w=z\operatorname{Re}z.$ 16. $w=|z|\cdot\bar{z}.$ 17. $w=|z-1|^2.$ 18. $w=e^{-z}-z.$

19. $w=\bar z\cdot \mathrm{Re}(iz)$. 20. $w=\sin 2z+z$. 21. $w=e^z\cdot z$. 22. $w=z^2+\bar z^2$.

23. $W=ze^{1-z}$. 24. $w=\dfrac{1}{2z}$. 25. $w=z\,\mathrm{Re}\,z^2$.

Завдання 7. Обчислити інтеграли від функцій комплексної змінної:

1. $\int\limits_C (e^z+z\cdot\bar z)dz$, де С-дуга $|z|=1;(0\le \arg z\le\pi)$.

2. $\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz$.

3. $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}}\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}dz$.

4. $\int\limits_C \bar z dz,$ де С– дуга окружності $x=\cos t, y=\sin t$.

5. $\int\limits_1^i z\sin z dz$.

6. $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z\cos\pi z}{z^2+2z}dz.$

7. $\oint\limits_L \dfrac{e^z}{z^2+z}dz,$ ***L:*** $|z|=1.$

8. $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}dz.$

9. $\oint\limits_{|z-i|=1}\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}dz.$

10. $\int\limits_C \mathrm{Re}\,Zdz,\ C: z=(2+i)t, 0\le t\le 1.$

11. $\int\limits_1^i \dfrac{\ln z}{z}dz$ по відрізку прямої, що з'єднує точки $z_1=1, z_2=i.$

13. $\int\limits_{|z|=4}\dfrac{e^{iz}}{z^2+9}dz.$

14. $\int\limits_0^{1+i}\sin z.\cos z dz$

15. $\int\limits_c z\cdot\mathrm{Re}\,z dz,$ С – окружність $|z|=1.$

16. $\int\limits_{|z|=4}\dfrac{dz}{(z^2+9)(z+9)}.$

17. $\int\limits_c (1+i-2\bar z)dz,$ де C– парабола $y=x^2$, що з'єднує точки $z_1=0, z_2=1+i.$

18. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(z-1)(z-2)}dz.$ 19. $\displaystyle\int\limits_{1}^{i} ze^{z}dz.$ 20. $\displaystyle\int\limits_{-i}^{i} ze^{z^2}dz.$ 21. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}.$

22. $\displaystyle\int\limits_{C} \operatorname{Im} z\,dz,$ де C– ламана з вершинами у точках $z_0=0, z_1=i, z_2=2+i.$

23. $\displaystyle\int\limits_{C} z\cdot\bar{z}dz,$ де C – дуга параболи $y=x^2$, що з’єднує точки $z_0=0, z_1=1+i.$

24. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2i} (z+5)\cos z\,dz.$ 25. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} \frac{chz}{z^2-1}dz.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1.– М.: Наука, 1985. – 456 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.2.– М.: Наука, 1985. – 576 с.

3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учебник для втузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1989. –736 с.

4. Чинаев П.И., Минин Н.А., Перевозчиков А.Ю., Черенков А.А. Высшая математика. Специальные главы: Пособие для студентов вузов / Под ред. П. И. Чинаева. – 2-е изд. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1981. – 368 с.

5. Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А. Специальный курс высшей математики для втузов. .– М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.

6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 256 с.

7. Кручкович Г.И., Мордасова Г.М., Сулейманова Х.Р. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики: Учебное пособие для втузов. – М., Высшая школа,1970. – 512 с.

8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – 4-ое изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 749 с.

9. Райцин Р.А., Кондратьева Д.Е., Сорокина Н.Е., Черная А.П. Методические указания к разделу курса высшей математики «Комплексные числа и функции комплексного переменного». – Днепропетровск, ДХТИ, 1982. – 44 с.

Навчальне видання

Швачич Геннадій Григорович

Коноваленков Володимир Степанович

Заборова Тамара Михайлівна

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Тем.план 2016, поз.

Підписано до друку 22.04.2016. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.

Облік.-вид. арк.1.94. Умов. друк. арк. 1.91.Тираж 100 пр. Замовлення № 55

Національна металургійна академія України

49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ